ODWZOROWANIA WIELOWARTOŚCIOWE

MIECZYSŁAW CICHOŃ

1. Pojęcie multifunkcji. naturalne realizacje

Tu wprowadzimy podstawowe pojęcia...

Przez odwzorowanie wielowartościowe (multifunkcję) rozumiemy dowolne odwzorowanie $P : T \longrightarrow 2^X$, gdzie 2^X jest rodziną wszystkich podzbiorów X. Na ogół interesowaŕ nas będzie sytuacja, gdy ma ona wartości niepuste.

Dziedziną (istotną) multifunkcji nazywamy zbiór

$$T_P = \{t \in T : P(t) \neq \emptyset\}.$$

Wtedy $P : T_P \longrightarrow N(X)$, gdzie $N(X)$ jest rodziną wszystkich niepustych podzbiorów X. W tym przypadku będziemy również pisać

$$P : T \rightsquigarrow X.$$

Multifunkcje będziemy oznaczać wielkimi literami F, G, P,... .

Odwzorowania są naturalne w wielu różnych sytuacjach:

1: Miejsca zerowe wielomianów np. $P(x) = \{y : w(x, y) = 0\}$, gdzie $w(x, y)$ jest wielomianem dwóch zmiennych;
2: Częste w teorii sterowania: $F(t) = f(t, Y)$, gdzie $f : T \times Y \longrightarrow X$ jest daną funkcją;
3: $G(t) = \{x : g(t, x) \leq 0\}$ dla danej funkcji $g : T \times X \longrightarrow \mathbb{R}$;
4: $Log(z) = \{w : \exp w = z\}$ określonej dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
5: Niech $a, b : T \longrightarrow \mathbb{R}$ będą danymi funkcjami. Rozważamy przedziały

$$P(t) = [a(t), b(t)].$$

Wtedy $P : T \rightsquigarrow \mathbb{R}$ oraz dziedziną P jest zbiór $T_P = \{t : a(t) \leq b(t)\}$.

2. Ciągi zbiorów

2.1. Definicja oparta o teorię mnogości. .

Podstawowe informacje w języku polskim są w książkach K. Kuratowskiego "Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii" str. 54 oraz K.Kuratowski, M. Mostowski "Teoria Mnogości" - strona 70 (dostęp w ICM : http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/mon/mon27/mon2702.pdf).

Date: wersja BARDZO robocza 2016.

w dużej części oparte o [4], [5]

Bardzo dziękuję prof. A. Fryszkowskiemu za udostępnienie manuskryptu [4] **- polecam jego książki!**

2.2. **Pojęcie granicy w przestrzeni topologicznej.** Można tu wykorzystać poprzednie definicje, ale "poprawić" pewne (omawiane na wykładach) konrprzykłady (brak zieżności ciągu zbiorów jednoelementowych będących wyrazami ciągów zbieżnych!!).

Definuijemy:

$$\widetilde{Ls}A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}$$

$$\widetilde{Li}A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}.$$

Dla zainteresowanych: topologia Fella na rodzinie zbiorw. Jest generowana przez dwa rodzaje zbiorw. Dla $A \subset S$ zdefinujmy

$$A^- = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\},$$

and

$$A^+ = \{B \in 2^X : B \subset A\}.$$

Dolna topologia Fella na 2^X jest generowana przez podbazę zbiorów otwartych postaci W^-, gdzie W jest zbiorem otwartym w X.

Górna topologia Fella na 2^X jest generowana przez podbazę zbiorów otwartych postaci C^+, gdzie C ma zwarte dopenienie w X.

Poza klasą przestrzeni lokalnie zwarych X nie jest to nawet przestrzeń Hausdorffa, ale w naszych rozważaniach rozpatrujemy na ogół lokalnie zwarte przestrzenie metryczne, wię nie jest to istotnym ograniczeniem.

Ta topologia wprowadzona na $cl(X)$ jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy X jest lokalnie zwarta i spełnia drugi aksjomat przeliczalności [7, Theorem 5.1.5]). Oczywiście dla $X = \mathbb{R}$ nie mamy problemu i nie musi,y rozpatrywać ciągów uogólnionych ...

A teraz najważniejsze pojęcie

Definicja 1. *Niech (A_n) będzie ciągiem domkniętych zbiorów w przestrzeni topologicznej X. Zbiór LiA_n nazywamy* **granicą dolną w sensie Kuratowskiego** *tego ciągu jeśli jest zbiorem wszystkich punktów $y \in X$, dla których ich dowolne otoczenia mają niepuste przekroje ze zbiorami A_n poza, co najwyżej, ich skończoną liczbą.*

Odpowiednio: **granica górna Kuratowskiego** *LsA_n to zbiór punktów $y \in X$, dla których ich dowolne otoczenia mają niepuste przekroje z nieskończoną liczbą zbiorów A_n.*

Lemat 2. (cf. [19, Theorem 2.6]) *W dowolnej przestrzeni topologicznej X topologie Fella i Kuratowskiego są porównywalne: $\tau_F \subset \tau_K$.*

A w przypadku lokalnie zwartych X mamy więcej ([19, Theorem 1.1]):

Lemat 3. ([7, Theorem 5.2.10] or [18, Proposition 2.4]) *Niech X będzie lokalnie zwarta. Ciąg domkniętych podzbiorẃ w X jest zbieżny w τ_F wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbie:zny w τ_K i obie granice sĄ równe.*

Co więcej:

Stwierdzenie 4. ([7, Proposition 5.2.5]) *Niech (A_n) będzie ciągiem domkniętych pozdbiorów lokalnie zwartej przestrzeni X. Następujące warunki są równoważne:*

- [K1] $A \subset LiA_n$ *i dla dowolnego zbioru zwartego* $K \subset X$, *mamy* $Ls(K \cap A_n) \subset A$,
- [K2] A_n *jest zbieżny w topologii Fella do* A.

Dla zwartych przestrzeni S topologia Fella jest równoważna z topologią wyznaczoną przez metrykę Hausdorffa ([7, Corollary 5.1.11]).

Wybieranie podciągów zbieżnych (proszę porównać z wynikiem dla ciągów liczbowych!!):

Stwierdzenie 5. ([7, Theorem 5.2.12]) *Niech* X *będzie przestrzenią metryczną oraz* A_n *- ciągiem zbiorów w* $cl(X)$. *Wtedy* (A_n) *ma podciąg zbieżny w sensie Kuratowskiego.*

2.3. **Granice ciągu zbiorów w przestrzeniach metrycznych i unormowanych.** .

Inna (równoważna) definicja zbieżności w sensie Kuratowskiego może być podana w przestrzeniach metrycznych. Rozpocznijmy od sformuownia ogólnego:

Definicja 6. ([18, Definition 1.9]) *Niech* (A_n) *będzie ciągiem domkniętych zbiorów w przestrzeni metrycznej* X. *Zbiór* LiA_n *nazywamy granicą dolną w sensie Kuratowskiego tego ciągu jeśli jest zbiorem wszystkich punktów* $y \in X$, *dla których ich dowolne otoczenia mają niepuste przekroje ze zbiorami* A_n *poza, co najwyżej, ich skończoną liczbą.*

Odpowiednio: granica górna Kuratowskiego LsA_n *to zbiór punktów* $y \in X$, *dla których ich dowolne otoczenia mają niepuste przekroje z nieskończoną liczbą zbiorów* A_n.

Jeśli $LiA_n = LsA_n = A$ to piszemy $LimA_n = A$ i mówimy, że (A_n) jest zbieżny do A w sensie Kuratowskiego.

Ta zbieżność nie jest topologiczna w dowolnej przestrzeni (Twierdzenie Mrówki [18, Proposition 2.2]), ale na przestrzeniach lokalnie zwartych Hausdorffa już istnieje topologia powiązana z tą zbieżnością.

Mamy następujące charakteryzacje granic Kuratowskiego:

$$LsA_n = \{x \in X : \liminf_{n\to\infty} dist(x, A_n) = 0\},$$

$$LiA_n = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} dist(x, A_n) = 0\}$$

oraz

$$LsA_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \quad and \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} \subset LiA_n.$$

Dla porwnania: zbieżność ciągów zbiorów w $\mathbb{R}$ w topologii Fella daje nam:

Stwierdzenie 7. ([7, Corollary 5.1.7]) *Ciąg zbiorów domkniętych* A_n *w* $\mathbb{R}$ *jest zbieżny do* A *w topologii Fella wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zwrtego zbioru* $K \subset \mathbb{R}$ *mamy* $\lim_{n\to\infty} e(K \cap A, A_n) = 0$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} e(K \cap A_n, A) = 0$.

Jest to charakteryzacja w terminach funcji odstępu $e(\cdot, A)$, a nie funkcji $dist(\cdot, A)$! Te defincje są omawiane na wykładzie i ćwiczeniach, a zostaną wprowadzone w kolejnym podrozdziale.

3. Ciągłość multifunkcji

....

Definicja 8. *Odwzorowanie wielowartościowe $G : E \to 2^E$ o niepustych, domkniętych wartościach nazywamy hemi-półciągłe z góry (uhc) [słabo hemi-półciągłe z góry, $\omega - uhc$] wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x^* \in E^*$ i każdego $\lambda \in R$ zbiór $\{x \in E : \sigma(x^*, G(x)) < \lambda\}$ jest otwarty w E [w (E, ω))], gdzie $\sigma(x^*, G(\cdot))$ jest funkcją półciągłą z góry daną wzorem $\sigma(x^*, A) = \sup\limits_{x\in A} x^*(x)$.*

Definicja 9. *Odwzorowanie wielowartościowe $G : E \to 2^E$ nazywamy słabo ciągowo hemi-półciągłe z góry ($\omega - seq$ uhc) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x^* \in E^*$, funkcja $\sigma(x^*, G(\cdot)) : E \to R$ jest ciągowo półciągła z góry w (E, ω).*

4. Metryki na rodzinach zbiorów

Czyli o odległościach zbiorów - nie tylko metryka Hausdorffa...

Metryka (Pompeiu-)Hausdorffa ([7]) (X, d) - przestrzeń metryczna)

Zdefiniujmy funkcję "dist" odległości punktu od zbioru:

$$dist(a, B) = \inf_{b\in B} d(a, b).$$

Dla zbiorów domkniętych $X, Y \subset X$ zdefiniujmy:

$$e(X, Y) = \sup_{x\in X} dist(x, Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} d(x, y) = \inf\{r > 0 \; : \; X \subset B(Y, r)\},$$

oraz

$$h(X, Y) = \max\{e(X, Y), e(Y, X)\} \; .$$

Przyjmijmy umownie, $e(\emptyset, Y) = 0$.

Wielkość $e(X, Y)$ nazywamy odstępem (excess) lub odległością niesymetryczną pomiędzy zbiorami X i Y. Funkcję $h : cl(X) \times cl(X) \to \mathbb{R}_+$ nazywamy odległością Hausdorffa zbiorów X i Y. Można pokazać, że na rodzinie zbiorów domkniętych jest to metryka.

Zbiory nieograniczone: metryka Hausdorffa może wynosić $+\infty$:

$$h([-n, n], \mathbb{R}) = +\infty$$

dla $n \geq 1$.

Pamiętajmy (przykład na zajęciach), że nawet metryki równoważne mogą generować nierównoważne metryki Hausdorffa, czyli ta metryka jest ona silnie zależna od ustalonej metryki na X!!

4.1. Własności metryki Hausdorffa.

- d – metric in X, $d(a, B) = \inf_{b\in B} d(a, b)$ – odległość "distance",
- $e_d(A, B) = \sup_{a\in A} d(a, B)$ – odstęp "excess",
- $h_d(A, B) = \max\{\, e(A, B), e(B, A) \,\}$ – metryka Hausdorffa,
- $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ – kula otwarta, $\mathcal{O}_r(A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$ – ε-otoczenie

Opisy równoważne:

1. $B(a, \varepsilon) = \mathcal{O}_\varepsilon \{a\}$ $\qquad$ $\mathcal{O}_\varepsilon A = \bigcup\limits_{a\in A} B(a, \varepsilon)$ $\qquad$ $x \in \mathcal{O}_\varepsilon A \Leftrightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

2. $e(A,B) = \inf\{\, r>0 : A \subset \mathcal{O}_r\, B\,\} = \sup_{x\in X}(d(x,B) - d(x,A)) = \inf_{f:A\to B}\ \sup_{a\in A} d(a, f(a))$
3. $h(A,B) = \inf\{\, r>0 : A \subset \mathcal{O}_r\, B,\ B \subset \mathcal{O}_r\, A\,\} = \sup_{x\in X} |d(x,A) - d(x,B)|$

Własności odstępu zbiorów e i metryki h

1. $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$ $\qquad h(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
2. $h(A,B) = h(B,A)$ $\qquad e(A,B) \neq e(B,A)$ (w całej ogólności)
3. $e(A,B) \leqslant e(A,C) + e(C,B)$ $\qquad h(A,B) \leqslant h(A,C) + h(C,B)$
4. $e(A,B) = e(A,\overline{B}) = e(\overline{A},B) = e(\overline{A},\overline{B})$ $\qquad h(A,B) = h(A,\overline{B}) = h(\overline{A},B) = h(\overline{A},\overline{B})$
5. $A \subset B \ \Rightarrow\ e(A,C) \leqslant e(B,C)$
6. $e(A\cup C, B\cup C) \leqslant e(A,B)$ $\qquad h(A\cup C, B\cup C) \leqslant h(A,B)$
7. $e(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} B_i) \leqslant \sup_{i\in I} e(A_i,B_i)$ $\qquad h(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} B_i) \leqslant \sup_{i\in I} h(A_i,B_i)$
8. $e(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, B) = \sup_{i\in I} e(A_i,B)$ $\qquad e(A, \bigcup\limits_{i\in I} B_i) \leqslant \inf_{i\in I} e(A,B_i)$
9. $d(x, \bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \inf_{i\in I} d(x,B_i)$ $\qquad \inf_{a\in A\ b\in B} d(a,b) \leqslant \min\{e(A,B), e(B,A)\} \leqslant h(A,B)$
10. $e(\lambda A, \lambda B) = |\lambda|\cdot e(A,B)$ $\qquad e(\lambda A, \mu A) \leqslant |\lambda - \mu|\cdot \|A\|$ $\qquad$ (gdzie $\|A\| = \sup_{a\in A}\|a\|$)
11. $e(A+C, B+C) \leqslant e(A,B)$ $\qquad h(A+C, B+C) \leqslant h(A,B)$
12. $e[\,A, \lambda B + (1-\lambda)C\,] \leqslant \lambda\cdot e(A,B) + (1-\lambda)\cdot e(A,C) \quad \forall_{\lambda\in(0,1)}$
13. $h[\,A, \lambda A + (1-\lambda)C\,] \leqslant h(A,C) \quad \forall_{\lambda\in(0,1)}\ \forall_{A,C}$ – zwarty

[w przestrzeniach unormowanych]

14. $e(\operatorname{conv} A, \operatorname{conv} B) = e(A, \operatorname{conv} B) \leqslant e(A,B)$ $\qquad h(\operatorname{conv} A, \operatorname{conv} B) \leqslant h(A,B)$
15. $e_{d\wedge 1}(A,B) = e_d(A,B)\wedge 1$ $\qquad h_{d\wedge 1}(A,B) = h_d(A,B)\wedge 1$ $\qquad$ (gdzie $d\wedge 1 = \min\{1,d\}$)

Własności $\mathcal{O}$

1. $\overline{A} = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon\,\overline{A} = \mathcal{O}_\varepsilon\, A$ $\qquad \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1} A} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_2} A \quad \forall_{\varepsilon_1<\varepsilon_2}$
2. $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathcal{O}_\varepsilon A \subset \mathcal{O}_\varepsilon B$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon A \cap B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\, A \cap \mathcal{O}_\varepsilon B\,)$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap \mathcal{O}_\varepsilon B \neq \emptyset$
3. $\mathcal{O}_\varepsilon\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_\varepsilon A_i$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon\,(\mathcal{O}_\varepsilon A)^{\mathrm{c}} \subset A^{\mathrm{c}}$
4. $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}[\,\mathcal{O}_{\varepsilon_2} A\,] \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$ $\qquad \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(\mathcal{O}_{\varepsilon_2} A) \neq \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(\mathcal{O}_{\varepsilon_1} A)$ (w ogólności)
5. $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}[\,\mathcal{O}_{\varepsilon_2} A\,] = \mathcal{O}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$ $\quad$ [w przestrzeniach unormowanych]
6. $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(A) + \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A+B)$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon(A+B) = A + \mathcal{O}_\varepsilon B$ $\qquad \mathcal{O}_\varepsilon(-A) = -\mathcal{O}_\varepsilon A$
7. $\lambda\mathcal{O}_\varepsilon(A) \subset \mathcal{O}_{|\lambda|\cdot\varepsilon}(\lambda A)\ \ \forall_{\lambda\neq 0}$ $\qquad \lambda\cdot\mathcal{O}_\varepsilon(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\lambda A)\ \ \forall_{|\lambda|\leqslant 1}$
8. $\operatorname{conv}(\mathcal{O}_\varepsilon A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\operatorname{conv} A)$ $\qquad \operatorname{conv}(\mathcal{O}_\varepsilon \operatorname{conv} A) = \mathcal{O}_\varepsilon \operatorname{conv} A$

Inne własności:

1. $e(A,B) < \varepsilon \ \Rightarrow\ A \subset \mathcal{O}_\varepsilon B$ $\qquad A \subset \overline{\mathcal{O}_\varepsilon B} \ \Rightarrow\ e(A,B) \leqslant \varepsilon$
2. $h(\mathcal{O}_{\varepsilon_1} A_1, \mathcal{O}_{\varepsilon_2} A_2) \leqslant h(A_1,A_2) + \max(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ $\qquad h(A, \mathcal{O}_\varepsilon A) \leqslant \varepsilon$
3. $h(\mathcal{O}_{\varepsilon_1} A_1, \mathcal{O}_{\varepsilon_2} A_2) = h(A_1,A_2) + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ [w przestrzeniach unormowanych]
4. C – wypukły $\ \Rightarrow\ \mathcal{O}_\varepsilon C$ – wypukły [w przestrzeniach unormowanych]
5. $\varphi\colon X \multimap Y,\ h\,[\,\varphi(x_1), \varphi(x_2)\,] \leqslant L\cdot d(x_1,x_2)$ $\qquad$ (i.e. φ – wielowartościowo Lipschitz'a)

   $\Rightarrow$ $\qquad e[\,\varphi(A), \varphi(B)\,] \leqslant L\cdot e(A,B)$ $\qquad \varphi\,(\,\mathcal{O}_\varepsilon A\,) \subset \mathcal{O}_{L\cdot\varepsilon}\,\varphi(A)$
6. $K = \bigcap_{n=1}^\infty K_n$ — zstępujący ciąg zwartych zbioróe $\ \Rightarrow\ h(K_n, K) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
7. $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{h} A$, A_n – spójny, A – zwarty $\ \Rightarrow\ A$ – spójny
8. $\operatorname{Li} A_n = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n=m}^\infty \mathcal{O}_\varepsilon A_n \ \subset\ \operatorname{Ls} A_n = \bigcap_{m=1}^\infty \overline{\bigcup_{n=m}^\infty A_n}$

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{h} A \;\Rightarrow\; \operatorname{Li} A_n = A = \operatorname{Ls} A_n$$

5. Ciągłści multifunkcji

Definicje oprzemy o znane przypadki dla FUNKCJI...

6. Selektory

Selektorem(selekcją) multifunkcji $F : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ nazywać będziemy każdą funkcję $f : X \to Y$ taką, że $f(x) \in F(x)$ dla każdego $x \in X$. Istnienie takiej funkcji wynika z aksjomatu wyboru.

Oczywiście może mieć ona różne doadatkowe własności, takie jak ciągłość czy mierzalność i zbadamy warunki wystarczające do istnienia (i liczby) takich selektorów.

6.1. **Twierdzenie Michaela o ciągłych selektorach.** W tym rozdziale omówimy twierdzenie o istnieniu ciągłego selektora dla multifunkcji *p.z.d.* z domkniętymi i wypukłymi wartościami oraz podstawowe jego konsekwencje.

Będziemy teraz zakładać, że T jest parazwartą przestrzenią topologiczną Hausdorff'a. Dla dowolnej rodziny $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ funkcji ciągłych z T w przestrzeń Banacha X multifunkcja $P : T \longrightarrow cl\,(X)$ dana wzorem

$$P\,(t) = cl\,\{p_\alpha\,(t) : \alpha \in \Lambda\}$$

jest *półciągła z dołu* Oczywiście każda funkcja p_α jest ciągłym selektorem P. Z drugiej strony istnieją ciągłe multifunkcje, które nie mają ciągłych selektorów.

Przykład 10 (Aubin-Cellina)**.** *Niech $T \subset \mathbb{R}^2$ będzie domkniętą kulą jednostkową. Rozważmy odwzorowanie wielowartościowe $P : T \longrightarrow cl\,(T)$ dane dla $t = (r\cos\varphi_t, r\sin\varphi_t)$ wzorem*

$$P\,(t) = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : |\varphi + \varphi_t| \le \pi\,(1-r)\}\,.$$

Wtedy P **jest** *odwzorowaniem* **ciągłym***, ale* **nie ma ono ciągłych selektorów.**

Twierdzenie 11 (Michael)**.** [5, 6] *Niech T będzie przestrzenią parazwartą, a X - p. Banacha. Załóżmy, że $P : T \longrightarrow clco\,(X)$ jest multifunkcją p.z.d.. Wtedy P ma ciągły selektor.*

Dowód: Dowód prowadzi się w trzech krokach. Szczegóły można znaleźć w [5, 6]. Tu tylko zarys dowodu, który warto znać, bo jest bardzo charakterystyczny i wszelki rozszerzenia tego twierdzenia (a istniejątakie) bazują na tej konstrukcji.

I. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, skonstruujemy tzw. ciągły $\varepsilon-$ selektor , tzn. taką funkcję ciągły $p : T \longrightarrow X$, że

$$dist\,(p\,(t)\,, P\,(t)) < \varepsilon.$$

Dowodzi się, że wẃczas multifunkcja

$$R\,(t) = P\,(t) \cap B\,\{p\,(t)\,, \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

multifunkcja $R : T \longrightarrow co\,(X)$ jest także *p.z.d.*.

II. Teraz podane zostaną konstrukcje dwóch ciągów:

(i) funkcji ciągłych $p_n : T \longrightarrow X$, $n = 1, 2, ...$ i multifunkcji *p.z.d.*

$$P_n : T \longrightarrow clco\,(X)\,,\ n = 0, 1, 2, ...$$

mających, dla każdego $t \in T$, następujące własności:

$$a)\ dist\,(p_{n+1}(t), P_n\,(t)) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

(ii) multifunkcji

$$b)\ P_{n+1}(t) \subset P_n(t) \subset P(t).$$

III. Ostatecznie pokazuje się, że , p_n zbiega niemal jednostajnie do p i stąd wyniknie, że p jest żądaną (ciągłym selektorem.

■

Oryginalne twierdzenie Michaela mówi znacznie więcej, niż przedstawione powyżej i ma następujące sformułowanie:

Twierdzenie 12. [6, 5] *Przestrzeń topologiczna Hausdorffa jest parazwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha X posiada własność, że dowolna p.z.d. multifunkcja $P : T \longrightarrow clcoX$ ma ciągły selektor .*

Poprzedni wynik daje również odpowiedź na pytanie, **ile ciągłych selektorów** posiada dana *p.z.d.* multifunkcja $P : T \longrightarrow clco(X)$ i czy dla danego $t_0 \in T$ multifunkcja $P : T \longrightarrow clco(X)$ ma ciągłe selektory przyjmujące zadaną z góry wartość $x_0 \in P(t_0)$.

Stwierdzenie 13. *Załóżmy, że multifunkcja $P : T \longrightarrow clco(X)$ jest p.z.d. i niech $T_0 \subset T$ będzie ustalonym podzbiorem domkniętym. Wówczas każdą ciągły selektor $p : T_0 \longrightarrow X$ odwzorowania $P|_{T_0} : T_0 \longrightarrow clco(X)$ można przedłużyć do ciągłego selektora P na całym T. W szczególności, dla danych $t_0 \in T$ oraz $x_0 \in P(t_0)$, istnieje ciągły selektor p_{t_0,x_0} odwzorowania P taka, że*

$$p_{t_0,x_0}(t_0) = x_0.$$

Ciekawy wynik (nawiążemy do niego w przypadku mierzalnych selektorów) daje nam następujące twierdzenie:

Twierdzenie 14. *Niech $P : T \longrightarrow clco(X)$ będzie daną multifunkcją. Wówczas P jest* p.z.d. *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciągłe funkcje $p_\alpha : T \longrightarrow X$ takie, że dla każdego $t \in T$*

$$P(t) = cl\{p_\alpha(t) : \alpha \in \Lambda\}. \tag{1}$$

Jeżeli obie przestrzenie T i X są ośrodkowe to można zakładać, że reprezentacja (1) jest przeliczalna.

Twierdzenie Michaela ma zastosowania w wielu działach matematyki, w tym również w badaniu funkcji rzeczywistych. **(PROSZĘ ZROBIĆ RYSUNEK!!!!)**

Wniosek 15. *Rozważmy funkcje $a, b : T \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające nierówność $a(t) \leq b(t)$ $(t \in T)$ i takie, że a jest* **funkcją** *p.z.g., zaś b –* **funkcją** *p.z.d.. Załóżmy ponadto, że dla pewnego zbioru domkniętego $T_0 \subset T$ istnieje ciągła funkcja $c : T_0 \longrightarrow R$ spełniająca dla wszystkich $t \in T_0$ nierówności*

$$a(t) \leq p(t) \leq b(t). \tag{2}$$

Wtedy p daje się przedłużyć w sposób ciągły na całą przestrzeń T w taki sposób, by spełniona była nierówność (2). W szczególności, dla dowolnych $t_0 \in T$ i $x_0 \in [a(t_0), b(t_0)]$ istnieje ciągła funkcja p_{t_0,x_0} taka, że dla wszystkich $t \in T$ zachodzi (2) oraz

$$p_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$$

Twierdzenie 14 ma również swój odpowiednik w analizie rzeczywistej **(PROSZĘ ZROBIĆ RYSUNEK!!!!)**. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 16. *Niech $a, b : T \longrightarrow R$ będą danymi odwzorowaniami. Wtedy:*

i. odwzorowanie a jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje ciągłe $a_\alpha : T \longrightarrow R$, $\alpha \in \Lambda$, *takie, że dla każdego* $t \in T$

$$a(t) = \sup_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha(t). \tag{3}$$

Podobnie,

ii. odwzorowanie b jest p.z.g. wtedy i tylko wtedy, gdy *posiada ono reprezentację*

$$b(t) = \inf_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha(t) \tag{4}$$

z ciągłymi $b_\alpha : T \longrightarrow R$, $\alpha \in \Lambda$. *Ponadto, dla ośrodkowej przestrzeni metrycznej* (T, d) *można żądać, żeby reprezentacje (3) i (4) były przeliczalne.*

Należy stwierdzić, że w Twierdzeniu Michaela wszystkie założenia są istotne.

Stwierdzenie 17. *Niech* $P : T \longrightarrow clco(X)$ *będzie multifunkcją p.z.d. i załóżmy, że mamy dane takie funkcje ciągłe* $c : T \longrightarrow X$ *i* $r : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *że dla każdego* $t \in T$ *zbiór*

$$R(t) = P(t) \cap B(c(t), r(t)) \neq \emptyset.$$

Wtedy $R : T \longrightarrow co(X)$ *ma ciągły selektor .*

7. Multifunkcje mierzalne

Niech T będzie danym zbiorem z $\sigma -$ *cialem* Σ mierzalnych podzbiorów T, zaś X oraz Y będą przestrzeniami topologicznymi.

Definicja 18. *Multifunkcja* $P : T \rightsquigarrow X$ *nazywa się* $\Sigma-$*mierzalna* (*lub krótko mierzalna*), *jeśli dla każdego zbioru otwartego* $U \subset X$ *zbiór* $P_-(U) \in \Sigma$.

Przykład 19. *Multifunkcja* $P(t) = \{p(t)\}$ *z* $p : T \longrightarrow X$ *jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy p jest funkcją mierzalną.*

Inne przykłady będą podane poniżej. Przedstawimy również pewne charakteryzacje mierzalności multifunkcji i ich własności. Zaczniemy od

Stwierdzenie 20. *Następujące warunki są równoważne:*

(*i*) $P : T \rightsquigarrow X$ *jest mierzalna;*

(*ii*) *dla każdego zbioru domkniętego* $F \subset X$ *zbiór*

$$P^-(F) \in \Sigma.$$

W przypadku, gdy (X, d) *jest ośrodkową przestrzenią metryczną to oba waunki są równoważne następującemu:*

(*iii*) *dla każdej kuli otwartej* $B(x, r)$ *zbiór*

$$P^-\{B(x, r)\} \in \Sigma.$$

Uwaga 21. *Zauważmy, że, multifunkcja* $P : T \rightsquigarrow X$ *jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\overline{P} : T \longrightarrow cl(X)$, *dana przez* $\overline{P}(t) = clP(t)$, *jest mierzalna.*

W przestrzeniach metrycznych (X, d) pojęcie mierzalności odwzorowań wielowartościowych można wyrazić w terminach metryki d. Mamy mianowicie:

Stwierdzenie 22. *Multifunkcja* $P : T \rightsquigarrow X$ *jest* $\Sigma -$ *mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek:*

odwzorowanie $t \longrightarrow dist(x, P(t))$ *jest* $\Sigma -$ *mierzalne dla dowolnych* $x \in X$.

Uwaga 23. *Zauważmy, że dla każdego* $t \in T$ *odwzorowanie* $x \longrightarrow dist\,(x, P\,(t))$ *jest ciągłe. W sytuacji, gdy* $\Sigma = \mathcal{L}$ *wystarczy to formułować następująco:*
odwzorowanie $x \longrightarrow dist\,(x, P\,(t))$ *jest ciągłe dla p.w.* $t \in T$.

Mierzalne multifunkcje posiadają **bogatszą strukturę** niż odwzorowania punktowe. Główne ich własności prezentujemy poniżej.

Stwierdzenie 24. *Niech* $r : T \longrightarrow R$, $p_n : T \longrightarrow X$ *i* $P_n : T \rightsquigarrow X$ *będą danymi odwzorowaniami mierzalnymi* $(n = 0, 1, 2, ...)$, *zaś* $\omega : X \longrightarrow Y$ *funkcją ciągłą. Wtedy odwzorowania*

$$P\,(t) = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n\,(t)\,,$$

$$Q\,(t) = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n\,(t)\,,$$

$$C\,(t) = cl\,\{p_n\,(t) : n = 0, 1, 2, ...\}\,,$$

i

$$\omega\,(P)\,(t) = \omega\,\{P\,(t)\}$$

są również mierzalne.

Przykład 25. *Multifunkcja* $I\,(t) = [a\,(t)\,, b\,(t)]$ *jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowania* $a = a\,(\cdot)$ *i* $b = b\,(\cdot)$ *są mierzalne.*

8. Mierzalne selektory

Przypomnijmy, że selektorem multifunkcji $P : T \rightsquigarrow X$ nazywamy każde odwzorowanie $p : T \longrightarrow X$, że

$$p\,(t) \in P\,(t) \quad dla \quad każdego \quad t \in T.$$

Jeżeli p jest mierzalna (ciągła) to wtedy mówimy o mierzalnej (ciągłym) selektorze odwzorowania P.

W przypadku zwartej przestrzeni Hausdorffa T z $\sigma - cialem$ $\mathcal{L}$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a danym przez miarę Radona μ, przez mierzalną selektor rozumiemy również odwzorowanie mierzalne $p : T \longrightarrow X$ takie, że

$$p\,(t) \in P\,(t) \;\; dla\; prawie\; wszystkich\;\; (p.w.)\;\; t \in T.$$

W teorii mierzalnych selektorów podstawowy wynik należy do Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego. My formułujemy go następująco:

Twierdzenie 26. [Kuratowski & Ryll-Nardzewski] *Załóżmy, że* $P : T \longrightarrow cl\,(X)$ *jest multifunkcją mierzalną przyjmującą wartości w przestrzeni polskiej* X. *Wtedy* P *posiada mierzalną selektor .*

Dowód: Prezentowany poniżej dowód składa się, podobnie jak w przypadku twierdzenia Michaela, z trzech etapów. Etapy II i III są prawie identyczne, a etap I bazuje na podobnej idei, ale używa się innych argumentów. Przede wszystkim zauważmy, że można przechodząc do metryki równoważnej zakładać, iż średnica

$$\delta\,(X) = \sup\,\{dist\,(x, y) : x, y \in X\} \leq 1.$$

Wtedy etapy konstrukcji są następujące:
bf Etap 1. dla danego $\varepsilon > 0$ skonstruujemy mierzalną funkcję $p : T \longrightarrow X$ taką, że

(a) $R(t) = P(t) \cap B\{p(t), \varepsilon\} \neq \emptyset$ oraz
(b) multifunkcja R jest mierzalna;

Etap 2. Pokazujemy istnienie dwóch ciągów: odwzorowań mierzalnych $p_n : T \longrightarrow X$ i $P_n : T \longrightarrow cl(X)$ mających dla każdego $t \in T$ i $n = 1, 2, ...$ następujące własności:
(c) $dist(p_n(t), P_n(t)) \leq \frac{1}{2^n}$; i
(d) $P_{n+1}(t) \subset P_n(t) \subset P(t)$.

Etap 3. Wykazujemy, że $p_n \to p$ i stąd p okazuje się szukanym selektorem.
■

Twierdzenie Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego 26 zostało opublikowane w 1965 roku. Niedługo potem ukazała się praca Ch. Castainga, która jest uzupełnieniem twierdzenia. U jej podstaw leży poprzednio zrobiona obserwacja, że dla ciągu funkcji mierzalnych $p_n : T \longrightarrow X$, $n = 1, 2, ...$ multifunkcja

$$P(t) = cl\{p_n(t) : n = 1, 2, ...\} \tag{5}$$

jest mierzalna.

Definicja 27. *Każdą rodzinę funkcji mierzalnych* $p_n : T \longrightarrow X$, $n = 1, 2, ...$ *spełniających (5) nazywamy się reprezentacją Castainga multifunkcji* $P : T \longrightarrow cl(X)$.

Sytuacja powyższa może być w pewnym sensie odwrócona. Mamy mianowcie następującą charakteryzację multifunkcji mierzalnych przy pomocy mierzalnych selektorów:

Twierdzenie 28. [Castaing] *Multifunkcja* $P : T \longrightarrow cl(X)$ *jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy posiada ona reprezentację Castaing'a przy użyciu przeliczalnej rodziny mierzalnych selektorów*

$$p_n : T \longrightarrow X, \quad n = 1, 2, ...$$

Wniosek 29. *Niech* $P : T \longrightarrow cl(X)$ *będzie mierzalnym odwzorowaniem wielowartościowym. Wtedy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taki zbiór zwarty* $T_\varepsilon \subset T$, *że* $\mu(T \backslash T_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *oraz* P *obcięta do* T_ε *jest ciągła.*

W zastosowaniach wykorzystywane będą wyniki dotyczące istnienia takich selektorów dla multifunkcji dwóch zmiennych (właściwie: złożeń z funcjami):

Lemat 30. *Niech* $v \in C(I, E)$ *i odwzorowanie* $F : I \times E \to 2^E$ *spełnia założenia:*
- (i) *dla każdego* $z \in E$ *odwzorowanie* $t \mapsto F(t, z)$ *ma mierzalny selektor,*
- (ii) *dla każdego* $t \in I$ *odwzorowanie* $z \mapsto F(t, z)$ *jest* $\omega - seq\ uhc$,
- (iii) *odwzorowanie* f *ma niepuste, domknięte i wypukłe wartości,*
- (iv) *istnieje funkcja* $a \in L^1(I, R)$, *że dla prawie wszystkich* $t \in I$ *i* $z \in E$, $\|F(t, z)\| \leq a(t)$.

Wówczas odwzorowanie $t \mapsto F(t, v(t))$ *ma mierzalny (całkowalny) selektor* u_0, $u_0(t) \in F(t, v(t))$ *dla prawie wszystkich* $t \in I$.

9. Całki wielowartościowe

9.1. **Wielowartościowa całka Riemanna [Dinghas, 1957].** Konstrukcja oparta o sumy Riemanna: sumy algebraiczne Minkowskiego zbiorów oraz metryka Hausdorff

9.2. **Całka Aumanna [Aumann].** Wykorzystanie selektorów multifunkcji F:

$$(A)\int_I F(s)\,ds = \{\int_I f(s)\,ds : f - \text{mierzalny selektor } D\}$$

9.3. **Całka Debreu [Debreu].** Twierdzenia Rådströma i Hörmandera ....

R - (A - niepusty, zwarty i wypulły podzbiór przestrzeni unormowanej X (i - izometria X ze stożkiem wypukłym Y w przestrzeni unormowanej Z - rodzina zbiorów rozpatrywana z metryką Hausdorffa)

H - (A - niepusty, domknięty, ograniczony, wypukły podzbiór lokalnie wypukłej X (i - włożenie X w Y) oraz

$$i(A) = \sigma(\cdot, A)$$

10. Punkty stałe odwzorowań z wypukłymi wartościami

10.1. **Przypadek odwzorowań punktowych.** Teoria punktów stałych dla funkcji $p : X \longrightarrow X$ może być przeniesieona na odwzorowania wielowartościowe $P : X \rightsquigarrow X$. Powiemy, że $x \in X$ jest punktem stałym P jeżeli

$$x \in P(x).$$

Taka teoria jest używana w wielu dziedzinach matematyki, głównie w analizie nieliniowej, inkluzjach różniczkowych i teorii sterowania. Istnieje mnóstwo wyników dotyczących tego tematu i nie jest naszym celem dać kompendium tej wiedzy. Podamy tylko najważniejsze i najczęściej wykorzystywane. Będziemy zakładać, że zbiory $P(x)$ są wypukłe. Należy stwierdzić, że w teorii punktu stałego dla multifunkcji kluczową rolę odgrywają selektory. Użycie ich pozwala bowiem zredukować problem do przypadku jednopunktowego. Spośród wszystkich twierdzeń o punktach stałych przypomnijmy następujące:

Twierdzenie 31 (Schauder)**.** *Niech K będzie zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Wtedy każde odwzorowanie ciągłe $f : K \longrightarrow K$ posiada punkt stały.*

Należy podkreślić, że oba założenia wypukłości i zwartości są istotne. Istnieją uogólnienia na dowolne zbiory $K \in \mathit{clco}(X)$, ale wymagają one założeń zwartości funkcji f. Przypomnijmy, że $f : X \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem zwartym, jeżeli jest ciągłe i zbiór $f(X)$ jest warunkowo zwarty (totalnie ograniczony).

Twierdzenie 32. *Niech K będzie domkniętym wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Wtedy każde odwzorowanie zwarte $f : K \longrightarrow K$ posiada punkt stały.*

Drugim niezbędnym twierdzeniem dla funkcji jest twierdzenie Banacha (o kontrakcji) - por. podręczniki z analizy matematycznej!!!

10.2. **Przypadek wielowartościowy.** Twierdzenia o punktach stałych mają swoje odpowiedniki dla odwzorowań półciągłych z dołu i z góry. Dla półciągłych z dołu jest to łatwe zastosowanie ciągłych selektorów.

Twierdzenie 33 (M)**.** *Niech Z będzie zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Wtedy każde p.z.d. odwzorowanie $P : Z \longrightarrow \mathit{clco}(Z)$ posiada punkt stały.*

Twierdzenie 34. *Niech Z będzie domkniętym wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Wtedy każde p.z.d. odwzorowanie $P : Z \longrightarrow \mathit{clco}(Z)$ takie, że $P(Z)$ jest warunkowo zwarty posiada punkt stały.*

Metoda ciągłych selektorów może być również użyta dla odwzorowań półciągłych z góry, choć nie da się tego zrobić bezpośrednio. Półciągłość z góry nie gwarantuje bowiem istnienia ciągłych selektorów (odpowiednik twierdzenia Schaudera!):

Twierdzenie 35. **[Ky Fan]** *Niech Z będzie* **zwartym** *i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Wtedy każde półciągłe z góry odwzorowanie $P : Z \longrightarrow clco\,(Z)$ posiada punkt stały.*

Odpowiednikiem twierdzenia Banacha o kontrakcji dla multifunkcji jest **twierdzenie Covitz-Nadlera**:

Twierdzenie 36. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Jeżeli $N : X \to cl(X)$ jest kontrakcją ze względu na metrykę Hausdorffa tj istnieje stała $k < 1$ taka, że dla dowolnych $x, y \in X$*

$$h(N(x), N(y)) \leq k \cdot d(x, y),$$

to N posiada punkt stały.

11. Inkluzje różniczkowe

Funkcję $x : I \longmapsto X$ będziemy nazywać absolutnie ciągłą (mild function), jeśli istnieje funkcja $u \in L^1\,(T, X)$ taka, że dla każdego $t \in I$ mamy

$$x\,(t) = a + \int_0^t u\,(s)\,ds.$$

Funkcję u będziemy oznaczać przez x' i nazywać pochodną. Musimy jednak być świadomi, że w dowolnych przestrzeniach Banacha klasyczna definicja absolutnej ciągłości nie gwarantuje istnienia pochodnej. Dzieje się tak tylko w przestrzeniach Banacha posiadających własność Radona-Nikodyma, w szczególności w R^l.

Inkluzją różniczkową nazywamy relację

$$x' \in F\,(t, x)\,,$$

gdzie $F : I \times X \longrightarrow N\,(X)$ jest danym odwzorowaniem wielowartościowym. Jeśli żądamy, by $x\,(0) = \zeta$ to mówimy o zagadnieniu Cauchy'ego

$$\begin{aligned} x' &\in F\,(t, x)\,, \\ x\,(0) &= \zeta. \end{aligned} \tag{6}$$

Rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (6) nazywamy funkcję absolutnie ciągłą $x : I \longmapsto X$ taką, że

$$x'\,(t) \in F\,(t, x\,(t)) \quad p.w. \;\; w \;\; I$$

oraz

$$x\,(0) = \zeta.$$

Łącznie z (6) rozważamy tzw. "zrelaksowane" inkluzje różniczkowe

$$\begin{aligned} x' &\in clcoF\,(t, x)\,, \\ x\,(0) &= \zeta. \end{aligned} \tag{7}$$

Ogólnie: mamy 3 główne metody rozwiązywania zagadnień dla inkluzji różniczkowych:

1. Zastosowanie teorii wielowartościowych punktów stałych.
2. Sprowadzenie do równań ró.zniczkowych poprzez twierdzenia selekcyjne.

3. Zastosowanie twierdzenia Baire'a o kategoriach.

11.1. **Zastosowanie teorii wielowartościowych punktów stałych.** Zauważmy, że x jest rozwiązaniem problemu (6) wtedy, gdy $u = x'$ jest punktem stałym odwzorowania wielowartościowego

$$K : L^1(T, X) \longmapsto dcl(T, X)$$

danego wzorem

$$K(u) = \left\{ w \in L^1(T, X) : w(t) \in F(t, u(t)) \quad p.w.\ w \quad I \right\}.$$

Badanie zatem własności rozwiązań danej inkluzji sprowadza się do badania zbioru punktów stałych $\mathcal{F}ix(K)$.

Inkluzje z prawą stroną półciągłą z góry

Rozpatrzmy teraz zagadnienie

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(0) = \zeta. \tag{8}$$

O prawej stronie $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ będziemy zakładać, że

$(G1)$ dla każdego $x \in R^l$ multifunkcja $t \longrightarrow F(t, x)$ jest mierzalna;
$(G2)$ dla każdego $t \in I$ multifunkcja $x \longrightarrow F(t, x)$ jest $p.z.g.$;
$(G3)$ istnieje funkcja $p \in L^1(I)$ taka, że dla każdego $x \in R^l$ mamy

$$\sup\{|z| : z \in F(t, x)\} \leq p(t) \quad p.w. \quad w \quad I.$$

Twierdzenie 37. *Załóżmy, że $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ spełnia warunki $(G1), (G2)$ i $(G3)$. Wtedy dla każdego $\zeta \in R^l$ zagadnienie (11) ma rozwiązanie.*

Proof. Idea dowodu: niech

$$S = \left\{ \begin{array}{c} s \in AC\left(I, R^l\right) : |s'(t)| \leq p(t) \quad p.w.\ w\ I \\ oraz \quad s(0) = \zeta \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Zbiór $S \subset C\left(I, R^l\right)$ jest zwarty i wypukły. Określmy multifunkcję

$$K : S \longrightarrow clco\left(L^1\left(I, R^l\right)\right)$$

wzorem

$$K(s) = \left\{ \begin{array}{c} u \in AC\left(I, R^l\right) : u'(t) \in F(t, s(t)) \\ p.w.\ w\ I \quad oraz \quad u(0) = \zeta \end{array} \right\}. \tag{10}$$

Sprawdzamy założenia Kakutaniego (Ky Fana) o punkcie stałym i otrzymać punkt stały $s \in K(s)$. Łatwo sprawdzić, że s jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (11). □

Można udowodnić, że zagadnienie (11) ma rozwiązanie, jeśli o $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ zakładać, że spełnia warunki $(G1), (G2)$ oraz

$(G3)'$ istnieją funkcje $p \in L^1(I)$ i $q \in L^\infty(I)$ takie, że dla każdego $x \in R^l$ mamy

$$\sup\{|z| : z \in F(t, x)\} \leq p(t) + q(t)|x| \quad p.w. \quad w \quad I.$$

Inkluzje z prawą stroną półciągłą z dołu

Zajmiemy się teraz zagadnieniem

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(0) = \zeta, \tag{11}$$

gdzie prawa strona spełnia warunki:

$(D1)$ $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ jest multifunkcją łącznie mierzalną;
$(D2)$ dla każdego $t \in I$ multifunkcja $x \longrightarrow F(t,x)$ jest $p.z.g.$;
$(D3)$ istnieje funkcja $p \in L^1(I)$ taka, że dla każdego $x \in R^l$ mamy

$$\sup\{|z| : z \in F(t,x)\} \leq p(t) \quad p.w. \quad w \quad I.$$

Twierdzenie 38. *Załóżmy, że $F : I \times R^l \longrightarrow clco\left(R^l\right)$ spełnia warunki $(D1), (D2)$ i $(D3)$. Wtedy dla każdego $\zeta \in R^l$ zagadnienie (11) ma rozwiązanie.*

Proof. Podobna idea:

$$S = \left\{ \begin{array}{r} s \in AC\left(I, R^l\right) : |s'(t)| \leq p(t) \quad p.w. \ w \ I \\ oraz \quad s(0) = \zeta. \end{array} \right\}.$$

i

$$K(s) = \left\{ \begin{array}{r} u \in AC\left(I, R^l\right) : u'(t) \in F(t, s(t)) \quad p.w. \ w \ I \\ oraz \quad u(0) = \zeta. \end{array} \right\}$$

$S \subset C\left(I, R^l\right)$ jest zbiorem zwartym i wypukłym, dla każdego $s \in S$ zbiory $K(s)$ są domknięte i wypukłe oraz $K(s) \subset S$, a $K : S \longrightarrow clcoS$ jest półciągła z dołu.

Ustalmy $s_0 \in S$, $s_n \longrightarrow s_0,$, $u_0 \in K(s_0)$. Dowidzimy, że istnieją $u_n \in K(s_n)$ takie, że $u_n \longrightarrow u_0$. Niech v_n będą takimi funkcjami mierzalnymi, że dla każdego $t \in T$

$$v_n(t) \in F(t, s_n(t))$$

oraz

$$|v_n(t) - u_0'(t)| = d\left(u_0'(t), F(t, s_n(t))\right).$$

Z uwagi na $(D3)$ mamy $|v_n(t)| \leq p(t) \quad p.w. \ w \ I$ oraz z $(D2)$ oraz

$$\begin{aligned} & \limsup |v_n(t) - u_0'(t)| \\ = & \limsup d\left(u_0'(t), F(t, s_n(t))\right) \\ \leq & d\left(u_0'(t), F(t, s_0(t))\right) = 0 \quad p.w. \ w \ I. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Lebesgue'a mamy zatem

$$v_n \longrightarrow u_0' \quad w \quad L^1\left(I, R^l\right).$$

Łatwo sprawdzić, że naturalnym kandydatami są w tej sytuacji funkcje $u_n \in K(s_n)$ takie, że

$$\begin{aligned} u_n' &= v_n, \\ u_n(0) &= \zeta \end{aligned}$$

i że rzeczywiście ciąg $\{u_n\}$ spełnia żądany warunek. Zatem odwzorowanie $K : S \longrightarrow clcoS$ posiada punkt stały s i jest on rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (11). □

11.2. **Lemat Filippova i zbiory rozwiązazań.** Będziemy teraz rozważali inkluzje różniczkowe

$$\left\{ \begin{array}{c} x' \in F(t,x) \\ x(0) = \zeta \end{array} \right. . \tag{12}$$

O multifunkcji $F : I \times X \longrightarrow cl(X)$ będziemy zakładać, że ma ona następujące własności:
i. F jest $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(X) - mierzalna$ po (t,x);
ii. istnieje funkcja $l \in L^1(I, R^+)$ taka, że dla każdych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi nierówność

$$d_H\left(F(t,x_1), F(t,x_2)\right) \leq l(t)\,|x_1 - x_2| \quad p.w. \quad w \quad I;$$

iii. dla każdego $(\zeta, z) \in L^1(I, X)$ istnieje $\beta = \beta_{\zeta,z} \in L^1(I, R)$ taka, że

$$d_H(z(t), F(t, \mathcal{I}(\zeta, z)(t))) \leq \beta(t) \quad p.w. \;\; w \;\; I.$$

Naszym celem jest zbadanie własności zbioru rozwiązań $\mathcal{R}$ zagadnienia (12).

Dla sformułowania Lematu Filippova oznaczmy

$$m(t) = \int_0^t l(\tau)\, d\tau.$$

Twierdzenie 39 (Filippov Lemma)**.** *Załóżmy, że $F : I \times X \longrightarrow cl(X)$ spełnia warunki $i. - ii$ i iii_0. oraz rozważmy funkcje $z \in AC(I, X)$ i $\beta \in L^1(T, R)$ spełniające nierówność*

$$d_H(z'(t), F(t, z(t))) \leq \beta(t) \quad p.w. \;\; w \;\; I.$$

Wtedy dla każdych $\zeta \in X$ i $\varepsilon \in R^+$ istnieje $u \in L^1(I, X)$ taka, że funkcja

$$v = \mathcal{I}(\zeta, u) = \zeta + \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

jest rozwiązaniem (12) spełniającym warunki:

a)

$$\begin{gathered} |z'(t) - v'(t)| \leq \\ \leq \varepsilon + l(t) \exp\{m(t)\} + l(t)|z(0) - \zeta| + \\ + l(t) \int_0^t \beta(\tau) \exp\{m(t) - m(\tau)\}\, d\tau + \beta(t) \quad p.w. \;\; w \;\; I; \end{gathered}$$

oraz

b)

$$\begin{gathered} |z(t) - v(t) - (z(0) - \zeta)| \leq \\ \leq \{\varepsilon + |z(0) - \zeta|\} \exp\{m(t)\} + \\ + \int_0^t \beta(\tau) \exp\{m(t) - m(\tau)\}\, d\tau. \end{gathered}$$

Udowodnimy teraz klasyczne twierdzenie Filippova-Ważewskiego, że zbiór $\mathcal{R}_F$ rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (12)

$$\begin{cases} u' \in F(t, u), \\ u(0) = \zeta \end{cases}$$

jest gęsty w zbiorze $\overline{\mathcal{R}} = cl\mathcal{R} = \mathcal{R}_{clc}$ rozwiązań "zrelaksowanego (uwypuklonego)" zagadnienia

$$\begin{cases} u' \in clcoF(t, u) \\ u(0) = \zeta \end{cases} . \tag{13}$$

Bęziemy zakładać, że $F : I \times R^k \longrightarrow cl\left(R^k\right)$ spełnia warunki $i., ii$ i iii_0, a ponadto

iv. istnieje $p \in L^1(I, R)$ taka, że dla każdego $s \in S$

$$\sup\{|u| : u \in F(t, x)\} \leq p(t) \quad a.e. \;\; w \;\; I.$$

Oznaczmy przez $\overline{\mathcal{R}}$ zbiór rozwiązań dla (13). Wtedy

Twierdzenie 40 (Filippov-Ważewski)**.** *Załóżmy, że* $F : I \times X \longrightarrow cl\,(X)$ *spełnia warunki* $i., ii, iii_0$ *i iv. i niech* $\zeta \in X$. *Wtedy dla każdego* $\overline{r} \in \overline{\mathcal{R}}$ *i dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje rozwiązanie* $r \in \mathcal{R}$ *spełniające oszacowanie*

$$\|\overline{r} - r\|_C \leq \varepsilon M.$$

11.3. **Sprowadzenie do równań różniczkowych - poprzez twierdzenia selekcyjne.** Najbardziej banalne zastosowania dotyczą wykorzystania twierdzenia Michaela i twierdzenia Peano.

Znacznie ciekawsze są prace Bressana bazujące na konstrukcji selektorów kierunkowo ciągłych (rozwiązania Carathéodory'ego): najkrócej mówiąc można pominąć założenie wypukłości wartości F!!

Tym razem odeślę do pracy magisterskiej o selektorach kierunkowo ciągłych (po polsku!!): K. Leśniak (UMK Toruń) - plik PostScript:

http://www-users.mat.umk.pl/ much/WORKS/ABressan.ps (Rozdział 4)

....

11.4. **Zastosowanie twierdzenia Baire'a o kategoriach.** Cellina: porównanie zbiorów rozwiązań dla S_2:

$$x'(t) \in \{-1, 1\}\ ,\ x(0) = 0$$

oraz S_1

$$x'(t) \in [-1, 1]\ ,\ x(0) = 0.$$

(tj. S_2 jest zbiorem rezydualnym w S_1).

Rozpatrujemy:

$$\left\{ \begin{array}{c} x' \in F\,(t, x) \\ x\,(0) = \zeta \end{array} \right. . \tag{14}$$

oraz

$$\left\{ \begin{array}{c} x' \in \partial F\,(t, x) \\ x\,(0) = \zeta \end{array} \right. . \tag{15}$$

Mamy:

Twierdzenie 41. *Zakładamy, że* $F : I \times K(x_0, r) \to cc(\mathbb{R}^k)$ *jest ciągła w sensie Hausdorffa ograniczna przez* $M < r$ *oraz, że* **wartości** $F(t, x)$ **mają niepuste wnętrza:** $intF(t, x) \neq \emptyset$**.**

Wtedy zagadnienia (14) *i* (15) *mają niepuste zbiory rozwiązań oraz zbiór* S_2 *dla* (15) *jest rezydualnym pozdbiorem dla* S_1 *(czyli* (14)*).*

12. Symbole

$(X, d) -$ *przestrzeń metryczna*;
$(X, \|\cdot\|)$ -przestrzeń unormowana;
$\mathbb{R}$ - *zbiór liczb rzeczywistych*;
$\mathbb{C}$ $-$ *zbiór liczb zespolonych*;
$\mathbb{R}^n$ $-$ *przestrzeń euklidesowa*;
$I = [0, 1] -$ *odcinek w* $\mathbb{R}$;
$clA -$ *domknięcie zbioru* A;
$IntA -$ *wnętrze zbioru* A;
$coA-$ *uwypuklenie* (*obwiednia wypukła*) *zbioru* A;

$clcoA-$ *domknięte uwypuklenie* (*domknięta obwiednia wypukła*) *zbioru* A;
$N(X) -$ *rodzina niepustych podzbiorów zbioru* X;
$cl(X) -$ *rodzina domkniętych niepustych podzbiorów zbioru* X;
$b(X) -$ *rodzina ograniczonych niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej* (X, d);
$bcl(X) -$ *rodzina domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni metrycznej* (X, d);
$c(X) -$ *rodzina zwartych niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej* (X, d);
$co(X) -$ *rodzina wypuklych niepustych podzbiorów przestrzeni unormowanej* $(X, ||)$;
$clco(X)$ - rodzina wypukłych i domknietych podzbiorów *przestrzeni unormowanej* $(X, ||)$;
$cc(X)$ -rodzina wypukłych i zwartych podzbiorów *przestrzeni unormowanej* $(X, ||)$;
$B(x, r)$ - kula *otwarta w przestrzeni metrycznej* (X, d) *o środku* x *i promieniu* r;
$\overline{B}(x, r)$ -kula *domknięta w przestrzeni metrycznej* (X, d) *o środku* x *i promieniu* r;
$dist(x, A) = \inf\{dist(x, a) : a \in A\} -$ *odległość punktu* x *od zbioru* A;
$e(A, B) = \sup\limits_{a \in A} dist(a, B)$;
$h(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\} -$ *metryka Hausdorffa*;
$P : T \rightsquigarrow X$, $P : T \to N(X) -$ *multifunkcja ze zbioru* T *w podziory* X
$P_{-}(A) = \{t : P(t) \cap A \neq \emptyset\} -$*przeciwobraz* $(z\ -)$ *zbioru* A *przez multifunkcję* P;
$P_{-}(A) = \{t : P(t) \subset A\} -$ *przeciwobraz* $(z\ +)$ *zbioru* A *przez multifunkcję* P;
$P(A) = \bigcup\limits_{x \in A} P(x) -$ *obraz zbioru* A *przez multifunkcję* P;
$\sigma_A(x^*) = \sigma(x^*, A) = \sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in A\} - funkcja\ podparcia\ zbioru\ A$;
$\sigma_P(t, x^*) = \sigma_{P(t)}(x^*) - funkcja\ podparcia\ multifunkcji\ \ P(t)$;

References

[1] J.-P. Aubin, A. Celina, *Differential Inclusions* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984).
[2] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis* (Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, New York, 1984).
[3] A. Bressan and G. Colombo, Extensions and selections of maps with decomposable values, Studia Math. 90 (1988), 69-86.
[4] A. Fryszkowski, Teoria multifunkcji, w przygotowaniu.
[5] A. Fryszkowski, Fixed Point Theory for Decomposable Sets, Kluwer, 2004.
[6] D. Repovš and P.V. Semenov, Continuous Selections of Multivalued Mappings, Kluwer, 1998.
[7] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Mathematics and Its Applications Vol. 268, Springer, 1993.
[8] G. Beer, *On convergence of closed sets in a metric space and distance functions*, Bull. Austral. Math. Soc 31 (1985), 421–432.
[9] G. Beer, *On the compactness theorem for sequences of closed sets*, Math. Balcanica 16 (2002), 327–338.
[10] G. Beer, *Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets*, Bull. Australian Math. Soc. 35 (1987), 81–96.
[11] G. Beer, J. Rodríguez-López, *Topologies sequentially equivalent to Kuratowski-Painlevé convergence*, in: Applied Topology: Recent progress for Computer Science, Fuzzy Mathematics and Economics, 2010, pp. 7–13.
[12] G. Beer, J. Rodríguez-López, *Topologies associated with Kuratowski-Painlevé convergence of closed sets*, J. Convex Anal. 17 (2010), 805-826.
[13] E. Duke, K. Hall and R. Oberste-Vorth, *Changing time scales I: The continuous case as a limit*, Proceedings of the Sixth WSEAS International Conference on Applied Mathematics, WSEAS, Athens, 2004.
[14] Z.M. Fang, S.J. Li, and K.L. Teo, *Painleve-Kuratowski convergences for the solution sets of set-valued weak vector variational inequalities*, J. Inequal. Appl. 2008.1 (2008), Article ID 435719.
[15] P.E. Kloeden, *Upper semicontinuous dependence of pullback attractors on time scales*, J. Difference Equ. Appl. 12 (2006), 357–368.
[16] K. Kuratowski, *Topology. Vol. I.*, Academic Press, 1966.
[17] B. Lawrence, R. Oberste-Vorth, *Solutions of dynamic equations with varying time scales*, in: Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials (2007), pp. 452–461.

[18] R. Lucchetti, A. Torre, *Classical set convergences and topologies*, Set-Valued Analysis 2 (1994), 219–240.
[19] T. Nogura, D. Shakhmatov, *When does the Fell topology on a hyperspace of closed sets coincide with the meet of the upper Kuratowski and the lower Vietoris topologies?*, Topology Appl. 70 (1996), 213–243.
[20] R. Oberste-Vorth, *The Fell topology on the space of time scales for dynamic equations*, Adv. Dyn. Syst. Appl 3 (2008), 177–184.
[21] R. Oberste-Vorth, *The Fell topology for dynamic equations on time scales*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory 9 (2009), 407–414.
[22] K. Deimling, *Multivalued Differential Equation* (Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992).