Rozdział III.

Odwzorowania.

Niech X i Y oznaczają dowolne zbiory niepuste. Odwzorowaniem określonym w zbiorze X o wartościach ze zbioru Y nazywamy przyporządkowanie (pewną metodą) każdemu elementowi $x \in X$ jakiegoś elementu $y \in Y$. Zapiszemy to $f \ : \ X \longrightarrow Y$, gdzie f jest symbolem tego odwzorowania. Odwzorowanie dla którego każdemu $x \in X$ przyporządkowano dokładnie jeden $y \in Y$ nazywamy funkcją.

Bardziej precyzyjne określenie pojęcia funkcji wymagałoby przypomnienia relacji i iloczynu kartezjańskiego. Pozwolimy sobie odesłać zainteresowanych do literatury (np. [28],[29],[30]), gdyż do naszych potrzeb powyższa definicja jest wystarczająca.

Ustalmy tylko pewne symbole i nazwy: $y = f(x)$ nazywać będziemy wartością funkcji f w punkcie x, zbiór X jest dziedziną funkcji, a $f(X) \subset Y$ zbiorem wartości (albo obrazem x) funkcji f.

Warto tu także zaznaczyć, że w części literatury (a i u nas też tak będzie w dalszych rozdziałach ...) pojęcie ,,funkcja" zastrzega się dla przypadku $Y = \mathbb{R}$, w pozostałych przypadkach pozostawiając pojęcie ,,odwzorowanie".

Najczęściej odwzorowania opisywać będą wzory np.

(a) $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^2 + 1$,

(b) $f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x, y) = (x + y, x - y)$,

ale dobrze określoną funkcją jest również taka:

(c) ,,dowolnej liczbie rzeczywistej nieujemnej przyporządkowano ilość liczb pierwszych p takich, że $p < x$" (wówczas $f \ : \ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$).

Ze względu na trudności w badaniu takich odwzorowań starać się zawsze będziemy do określania ich wzorem. Dla porządku podajmy kilka innych, bardziej znanych metod zadawania funkcji: zestaw wzorów (tzw. klamrowe), tabela, wykres, histogram.
O ile funkcja opisana jest wzorem to należy również podać jej dziedzinę.
W pierwszym przypadku będziemy domyślnie rozumieć, że dziedziną jest zbiór dla którego dany wzór ma sens (największy taki zbiór). Mówimy, że funkcja
$f \ : \ X \longrightarrow Y$ odwzorowuje zbiór X na zbiór Y (f jest surjekcją), gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje (co najmniej jeden) element $x \in X$ taki, że $y = f(x)$. Inaczej mówiąc $f(X) = Y$.
O ile $f(X) \subsetneq Y$ (tj. $f(X) \subset Y$, ale istnieje $y \in Y \setminus f(X)$) to mówimy, że f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y.
Przykładem funkcji f z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ jest $f(x) = 4x + 2$, a przykładem funkcji f z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$ (wówczas $f(X) =< 1, \infty)$).

Fakt, że f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y oznaczać będziemy $f \ : \ X \xrightarrow{\text{na}} Y$.
Natomiast mówić będziemy, że funkcja $f \ : \ X \longrightarrow Y$ jest różnowartościowa (inne nazwy: iniekcja, wzajemnie jednoznaczna, jedno-jednoznaczna, ,,jeden na jeden"), gdy zachodzi implikacja

$$(f(x) = f(y)) \Longrightarrow (x = y) \ , \quad \text{dla dowolnego} \quad x, y \in X \ .$$

Funkcją różnowartościową jest np. $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, a nie jest nią np. $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Fakt różnowartościowości funkcji f oznaczać będziemy $f\ :\ X \xrightarrow{1-1} Y$.

Jeżeli funkcja $f\ :\ X \xrightarrow{1\text{-}1} Y$ jest równocześnie różnowartościowa i odwzorowuje zbiór X na zbiór Y to nazywamy ją bijekcją. W tym przypadku f określa również inną funkcję z Y na X nazywaną funkcją odwrotną do f (oznaczaną przez f^{-1}): $f^{-1}\ :\ Y \underset{\text{na}}{\xrightarrow{1\text{-}1}} X$

$$(f^{-1}(y) = x) \Longleftrightarrow (f(x) = y)\ .$$

Niech $f(x) = 2x + 6$, $\qquad f\ :\ \mathbb{R} \underset{\text{na}}{\xrightarrow{1\text{-}1}} \mathbb{R}$.

Przykład 1.

Sprawdzimy ten fakt: niech $x_1 \neq x_2$, wówczas $x_1 - x_2 \neq 0$ oraz

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) =& 2x_1 + 6 - (2x_2 + 6) = 2x_1 + 6 - 2x_2 - 6 = \\ &= 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) \neq 0 \quad \text{na mocy założenia.} \end{aligned}$$

Funkcja f jest więc różnowartościowa.
Weźmy teraz dowolne $y \in \mathbb{R}$. Ponieważ szukamy $x \in \mathbb{R}$ takiego, że $y = f(x)$, to uzyskamy równanie

$$\begin{aligned} &y = 2x + 6 \\ &y - 6 = 2x \\ &\frac{1}{2}y - 3 = x \quad . \end{aligned}$$

Istnieje więc $x \in \mathbb{R}$ takie, że $y = f(x)$, czyli $f\ :\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$.

Wówczas analogicznie j.w. mamy

$$\begin{aligned} &y = 2x + 6 \\ &y - 6 = 2x \\ &\frac{1}{2}y - 3 = x \end{aligned}$$

Stąd $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$, $\qquad f^{-1}\ :\ \mathbb{R} \underset{\text{na}}{\xrightarrow{1\text{-}1}} \mathbb{R}$.
Warto porównać wykresy funkcji (wykresem funkcji nazywać będziemy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ określony następująco:
$\{(x, y) \in X \times Y\ :\ y = f(x)\ , x \in X\})$.