Równania różniczkowe cząstkowe

dr hab. Mieczysław Cichoń

Celem wykładu jest omówienie problematyki równań różniczkowych czastkowych w ujęciu klasycznym. Po omówieniu niezbędnych zagadnień ogólnych podane zostaną wybrane metody rozwiązywania takich równań (możliwe modyfikacje dostosowywujące wykład do stopnia zaawansowania słuchaczy).

1) Równanie różniczkowe cząstkowe. Rząd równania. Rozwiązanie. Metoda rozdzielania zmiennych.
2) Całki pierwsze układu równań różniczkowych zwyczajnych. Związek z równaniem różniczkowym cząstkowym (z dowodem).
3) Całki pierwsze niezależne. Ogólna postać całki pierwszej (z dowodem).
4) Rozwiązywanie równań różniczkowych I rzędu - liniowych, jednorodnych - schemat postępowania. Metoda charakterystyk.
5) Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania jednorodnego cząstkowego I rzędu.
6) Rozwiązywanie równań quasi-liniowych (redukcja do równania liniowego - z uzasadnieniem).
7) Lemat o istnieniu całek pierwszych klasy C^2 z nieznikającą pochodną I rzędu w Ω (z dowodem).
8) Klasyfikacja równań II rzędu.
9) Wyprowadzenie wzorów transformacyjnych.
10) Sprowadzanie równań do postaci kanonicznej (różnych typów). Równanie charakterystyk.
11) Funkcje własne i wartości własne zagadnienia brzegowego dla równań różniczkowych zwyczajnych.
12) Metoda Fouriera rozdzielania zmiennych - schemat postępowania dla równania struny ograniczonej.
13) Rozwiązanie równania struny nieograniczonej (metoda d'Alemberta).
14) Zagadnienie Dirichleta dla prostokąta - schemat rozwiązywania.
15) Zagadnienie Dirichleta dla koła i innych obszarów (metoda siatek).
16) Równanie Laplace'a, funkcje harmoniczne, twierdzenie o kresach funkcji harmonicznej, zasada ekstremum. Lemat o całkach pierwszych analitycznych.
17) Twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej - schemat dowodu. Szczególne przypadki twierdzenia.
18) Równanie Poissona i zagadnienie Dirichleta dla tego równania.
19) Inne metody rozwiązywania równań r. cząstkowych - metoda siatek (schemat różnicowy).
20) Metoda przekształceń całkowych (Fouriera i Laplace'a).
21) Przegląd wybranych (pozostałych) metod.

Przykładowe TYPY zadań na egzamin ... - czyli nie wyczerpuje możliwości pytań!

1. Podaj 4 różne (tzn. niezależne w sensie stosowanym dla całek pierwszych) przykłady funkcji harmonicznych na obszarze zawierającym koło jednostkowe na $\mathbb{R}^2$. Sprawdź ich niezależność.

2. Lemat o istnieniu całek pierwszych klasy C^2 z nieznikającą pochodną I rzędu w Ω (z dowodem). Podaj co najmniej jedno jego zastosowanie.

3. Omówić krótko metodę rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych quasi-liniowych I rzędu.

4. Most o długości l metrów położono w sposób dokładnie poziomy względem sąsiedniego terenu, ale w czasie testu poprzez wjazd pojazdów wywołano jego ruch poprzez nadanie pewnej prędkości początkowej zależnej od punktu "x" mostu tzn. $F(x) =$ .... (tu coś wstawię...). Stosując model d'Alemberta stwierdzić czy most może się zarwać tzn. dla pewnego $x \in (0, l)$ mamy $\lim_{t\to\infty} u(t, x) = \infty$?

5. Zagadnienia brzegowe dla równania Laplace'a - przeprowadzić dyskusję na temat ilości rozwiązań.

6. Dla podanego niżej zagadnienia omów krótko główne etapy jego rozwiązywania metodą Fouriera (zwróć uwagę na warunki konieczne metody):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + t \cdot x \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x) \\ u(t,0) = 0 \\ u(t,1) = 0 \end{cases}.$$

7. Dla podanych poniżej fragmentów tekstu:

   a) podać definicje pojęć wymienionych we fragmencie,
   b) podać twierdzenia (pełne sformułowania) występujące w tym fragmencie,
   c) podać dla jakiego rozumowania (dowodu) jest to fragment oraz napisać kolejny krok tego rozumowania!

   TEKST A: "...Teraz weźmy $f \in C(\delta K)$. Z twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji istnieje ciąg $(f_m) \subset C^2$ zbieżny jednostajnie do f. Oznaczmy przez $u_m(r, \varphi)$ funkcję harmoniczną będącą rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta odpowiadającego funkcji f_m: (.....) Skoro ciąg (f_m) jest jednostajnie zbieżny to spełnia warunek Cauchy'ego ze względu na topologię zbieżności jednostajnej (.......) Istnieje więc funkcja $v(r, \varphi)$ taka, że ciąg (u_m) jest jednostajnie zbieżny do $v(r, \varphi)$. Oczywiście $v(r, \varphi)$ spełnia warunek brzegowy naszego zagadnienia. Należy jeszcze wykazać, że $v(r, \varphi)$. ....(?)..."

   TEKST B: "**...**istnieje więc funkcja klasy C^1 rozwiązująca układ równań - oznaczmy ją przez ϕ, czyli $u(x) = \phi(u_1(x), ..., u_{n-1}(x))$, gdzie $u_i(x)$ są danymi w założeniu całkami pierwszymi niezależnymi. Stąd całek pierwszych niezależnych może............(?).."

8. Określ typ i znajdź postać kanoniczną dla równania:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{..............................} = 0.$$

9. Rozwiązując poniższe zagadnienie metodą Fouriera znajdujemy wartości własne dla pewnych równań zwyczajnych. Znaleźć te wartości dla poniższego zagadnienia i podać znane Ci definicje i twierdzenia z tym związane.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{....................} \\ u(x,0) = 1 \\ u(x,1) = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = 0 \end{cases}.$$

10. Podaj przykład równania różniczkowego cząstkowego na **całej** płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dla którego następująca funkcja jest jego rozwiązaniem szczególnym (odpowiedzi w obu przypadkach uzasadnić):

    a) $u(x, y) =$ ....,

    b) $u(x, y) =$ ....

11. Całka pierwsza układu równań różniczkowych zwyczajnych. Definicja, istnienie (z dowodem), liczba całek niezależnych, podać PRZYKŁAD układu równań różniczkowych zwyczajnych wraz z jego całkami pierwszymi niezależnymi. Podać związek takich całek pierwszych z równaniami różniczkowymi cząstkowymi pierwszego rzędu.

12. Funkcje harmoniczne i ich własności. Związki tych funkcji z równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

13. Dla której pary z warunków brzegowych należy zastosować metodę rozwinięcia w postaci szeregu Fouriera (względem funkcji własnych) - w metodzie rozdzielania zmiennych: (odpowiedzi uzasadnij)

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0 & (R) \\ u(x,0) & = \ldots\ldots\ldots & (1) \\ u(x,1) & = \ldots\ldots\ldots\ldots & (2) \\ u(0,y) & = \ldots\ldots\ldots\ldots & (3) \\ u(1,y) & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (4) \end{array}\right.$$

    a) (1) i (2),

    b) (1) i (4)

    c) (3) i (4)

    d) (1) i (3)

    e) (2) i (4).

14. Na przykładzie układu równań:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

    porównaj jego całki pierwsze (niezależne) oraz jego rozwiązanie (podaj odpowiednie definicje i własności).

15. Znaleźć kształt jaki przyjmie struna nieograniczona w chwili $t = 6$ jeżeli jej początkowy kształt dany jest wzorem $u(0, x) =$ .... i została ona puszczona swobodnie. Omówić wykorzystaną metodę.

16. Sprowadzić równanie do postaci kanonicznej (w odpowiednich dziedzinach):

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

17. Postać kanoniczna równania parabolicznego - omówić zagadnienie (postać, całe wyprowadzenie!, zastosowanie do wybranego przez siebie przykładu).

18. Rozwiązanie równania struny (dwustronnie) nieograniczonej metodą d'Alemberta. Przeprowadzić pełne rachunki.

19. Określić typ (typy) równania

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

    Jaki będzie typ (typy) tego równania po zamianie zmiennych:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \quad ?$$

    Odpowiedź uzasadnij.

20. Postać kanoniczna równania eliptycznego - omówić zagadnienie na wybranym przez siebie przykładzie) (a nie w postaci abstrakcyjnej!) (postać równania, wyprowadzenie).

21. Które z poniższych zapisów są równaniami różniczkowymi cząstkowymi (zgodnie z definicją) (w, u, z są zależne od zmiennych x, y) - uzasadnij odpowiedzi:

    a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$,

    b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

    c) $\sqrt{-x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

    d) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

    e) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

22. Na przykładzie układu równań:

$$\begin{cases} x'(t) = \ldots\ldots \\ y'(t) = \ldots\ldots \end{cases}$$

    porównaj jego całki pierwsze (niezależne) oraz jego rozwiązanie (podaj odpowiednie definicje i własności). Podaj i rozwiąż równanie różniczkowe cząstkowe związane z danym układem równań.

23. Znajdź rozwiązania równania (tak dużą klasę rozwiązań jak tylko potrafisz!! - niekoniecznie wszystkie):

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

    Omów wybraną przez siebie metodę!