ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVII (2001)

Grzegorz Graff (Gdańsk)

O problemie homeomorfizmów minimalnych

1. Wstęp. Sławna *Księga Szkocka* wciąż stanowi inspirujące źródło matematycznych problemów, które choć proste w sformułowaniu niosą ze sobą bogatą treść matematyczną. Jednym z takich zagadnień, postawionych jeszcze w latach trzydziestych przez Stanisława Ulama, jest kwestia istnienia tzw. homeomorfizmów minimalnych nakłutej płaszczyzny (por. [5], Problem 115). Zagadnienie to przez ponad 60 lat skutecznie opierało się różnorodnym próbom rozwiązania i dopiero ostatnie lata przyniosły odpowiedź na zadane przez Ulama pytanie. A brzmi ono następująco.

Rozważmy płaszczyznę „nakłutą” r punktami: $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$. Czy istnieje wówczas taki homeomorfizm f tego zbioru na siebie, że orbita każdego punktu jest gęsta? Dodać należy, że przez orbitę punktu x rozumiemy orbitę i „w przód” i „w tył” czyli zbiór $\{f^k(x)\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$.

Słowo komentarza należy się nazwie, pod jaką funkcjonuje problem. Zbiór D nazywamy niezmienniczym względem f, jeżeli $f(D) = D$, zaś homeomorfizm $f : X \to X$ nazywamy minimalnym, jeżeli nie dopuszcza on istnienia w X żadnego właściwego, niepustego, domkniętego podzbioru niezmienniczego. Łatwo sprawdzić, że równoważnie problem Ulama wyrazić można następująco: czy istnieje homeomorfizm minimalny zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ na siebie.

W długiej historii problemu uzyskano wiele wyników częściowych. Wymienić tu należy rezultat Brechnera i Mauldina z 1975 roku (por. [2]). Udzielili oni negatywnej odpowiedzi dla samej płaszczyzny, pokazując, że dla homeomorfizmu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi następująca alternatywa, wykluczająca istnienie gęstej orbity: albo istnieje $x \in \mathbb{R}^2$ taki, że $f^2(x) = x$, albo dla każdego $x \in \mathbb{R}^2$ mamy $|f^k(x)| \to \infty$. Rozwiązanie nieomal kompletne przedstawił M. Handel w 1992 roku (por. [4]) wykazując nieistnienie homeomorfimów minimalnych dla $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ poza przypadkiem $r = 3$, czyli płaszczyzny trzykrotnie nakłutej.

Negatywna odpowiedź w przypadku dowolnej ilości nakłuć pochodzi od francuskich matematyków Patrice le Calvez i Jeana Yoccoza z 1997 roku (por. [6]). Elegancja przeprowadzonego przez nich rozumowania, które zostanie poniżej naszkicowane, polega na nieoczekiwanym wykorzystaniu dobrze znanego narzędzia topologii algebraicznej, jakim jest indeks punktu stałego.

Historię problemu zamyka interesujący pomysł uproszczenia dowodu Calvez i Yoccoza przedstawiony przez J. Franksa w 1999 roku (por. [3]), który z kolei wykorzystuje inne narzędzie topologiczne, a mianowicie indeks Conleya.

2. Postać indeksów iteracji dla pewnej klasy homeomorfizmów płaszczyzny. Przedstawimy najpierw uzyskaną przez Calvez i Yoccoza (por. [6]) formułę na ciąg indeksów kolejnych iteracji dla lokalnego homeomorfizmu płaszczyzny, spełniającego dodatkowe, tzw. otoczeniowe warunki.

Twierdzenie 2.1. *Niech p będzie punktem stałym zachowującego orientację lokalnego homeomorfizmu f płaszczyzny w siebie.*

Zakładamy, że są spełnione następujące dwa warunki, które nazywać będziemy otoczeniowymi:

(A) *Nie istnieje otoczenie V punktu p takie, że*

$$f(V) \subset V \quad \textit{lub} \quad V \subset f(V).$$

(B) *Istnieje otoczenie W punktu p takie, że*

$$\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} f^k(W) = \{p\}.$$

Wówczas istnieją dodatnie liczby całkowite s, q takie, że dla każdego $k \neq 0$

$$\operatorname{Ind}(f^k, p) = \begin{cases} 1 - sq, & \textit{jeżeli } q \mid k, \\ 1, & \textit{jeżeli } q \nmid k, \end{cases}$$

gdzie $\operatorname{Ind}(f^k, p)$ *oznacza indeks punktu stałego p dla f^k.*

3. Formuła Calvez i Yoccoza a problem Ulama. Przede wszystkim zauważmy, że zamiast rozważać płaszczyznę nakłutą r razy, możemy równoważnie mówić o sferze S^2 nakłutej $r+1$ razy. Ostateczną odpowiedź na pytanie Ulama udzieloną przez Calvez i Yoccoza można sformułować następująco.

Twierdzenie 3.1. *Nie istnieje homeomorfizm minimalny nakłutej sfery na siebie.*

Dowód. Niech $X = S^2 \setminus G$, gdzie $G = \{p_1, \ldots, p_{r+1}\}$. Załóżmy nie wprost, że istnieje homeomorfizm minimalny f zbioru X na siebie. Przedłużmy go do odwzorowania $g : S^2 \to S^2$. Przedłużenie to przekształca zbiór G na G. Wybierając odpowiednio dużą iterację parzystą znajdujemy takie n, że $g^n(p_i) = p_i$ dla $i = 1, \ldots, r+1$ oraz g^n zachowuje orientację.

Chcemy teraz zastosować Twierdzenie 2.1 do każdego z punktów p_i oraz do odwzorowania g^n, w tym celu zaś sprawdzić należy, czy spełnione są warunki otoczeniowe.

(A) Załóżmy nie wprost, że istnieje otoczenie otwarte V punktu p_i, dla którego $g^n(V) \subset V$. Wówczas albo $V = g^n(V)$ albo $V \setminus g^n(V) \neq \emptyset$. Pierwszy przypadek zachodzić nie może, gdyż g^n jako homeomorfizm S^2 w S^2 przekształca brzeg V w siebie, a zatem punkty z brzegu nie mają gęstej orbity. Rozważmy drugi przypadek. Ponieważ $g^n(V)$ jest zbiorem otwartym i homeomorficznym obrazem V, więc zbiór $Y = V \setminus g^n(V)$ ma niepuste wnętrze. Zauważmy także, że $(g^n)^k(V) \subset g^n(V)$ dla $k > 0$. Niech $x \in \operatorname{Int} Y$; dla punktu x przy $k > 0$ mamy $(g^n)^k(x) \in g^n(V)$, czyli

$$(g^n)^k(x) \notin Y.$$

Z drugiej strony,

$$(g^n)^{-k}(x) \notin Y,$$

gdyby bowiem $(g^n)^{-k}(x) \in Y$, to $(g^n)^k((g^n)^{-k}(x)) = x \notin Y$. Z powyższych dwóch warunków wynika, że orbita punktu x względem g może mieć tylko skończoną ilość elementów w $\operatorname{Int} Y$, bo jeśli dla pewnego i jest $g^i(x) \in Y$, to dla każdego $k \neq 0$ mamy $g^{nk+i}(x) = (g^n)^k(g^i(x)) \notin Y$, a zatem orbita ta nie może być gęsta.

Podobnie wykluczamy możliwość odwrotnej inkluzji, czyli $V \subset g^n(V)$.

(B) Weźmy, dla ustalenia uwagi, p_1 i niech W_1 będzie odpowiednio małym otoczeniem p_1 takim, że $g^t(W_1)$, $t = 1, \ldots, n-1$, stanowią małe otoczenia punktów zbioru G, rozłączne dla różnych $p_i \in G$. Oznaczmy przez $N_t = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} g^{nk+t}(W_1)$, $t = 1, \ldots, n$. Wówczas g przeprowadza każdy ze zbiorów z rodziny $\{N_t\}_{t=1}^n$ na zbiór z tej rodziny. Gdyby zatem istniał $x \in N_n = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} g^{nk}(W_1)$, $x \neq p_1$, to jego orbita względem g nie byłaby gęsta w $S^2 \setminus G$.

Zastosujemy teraz do sfery twierdzenie Lefschetza–Hopfa. Mówi ono, że liczba Lefschetza równa jest sumie indeksów izolowanych punktów stałych. Dla homeomorfizmu $h = g^n$ możemy więc dla każdego $j > 0$ napisać równość:

$$\mathrm{L}(h^j) = \sum_{i=1}^{r+1} \operatorname{Ind}(h^j, p_i), \tag{$*$}$$

gdzie $\mathrm{L}(h^j)$ jest liczbą Lefschetza odwzorowania h^j.

Z twierdzenia Hopfa o izomorfizmie wiadomo jednak, że homeomorfizmy sfery S^2 mogą mieć tylko dwie wartości liczby Lefschetza: 0, gdy zmieniają orientację, lub 2, gdy ją zachowują. Lewa strona równości $(*)$ wynosi zatem 2, podczas gdy prawa jest, na mocy Twierdzenia 2.1, sumą niedodatnich liczb całkowitych. Otrzymujemy sprzeczność, która dowodzi tezy. $\square$

Zwróćmy uwagę na fakt, że Calvez i Yoccoz pokazali w Twierdzeniu 2.1 periodyczność ciągu indeksów iteracji, a także niedodatniość elementów tego ciągu. O ile periodyczność dla zachowujących orientację homeomorfizmów płaszczyzny można wywnioskować z wcześniejszej pracy M. Browna z 1990 roku (por. [1]), to znaczenie dla problemu Ulama ma część tezy wynikająca z warunków otoczeniowych, która stwierdza niedodatniość indeksów. Nadmienić należy, że formuła z Twierdzenia 2.1 została uzyskana dzięki subtelnej, ale nader skomplikowanej analizie dynamiki lokalnego planarnego homeomorfizmu wokół punktu stałego (praca Calvez i Yoccoza liczy ponad 50 stron!). Dla rozstrzygnięcia problemu minimalnych homeomorfizmów wystarczy jednak, jak widać z przytoczonego powyżej dowodu, skromniejsza informacja związana z niedodatniością przynajmniej niektórych elementów ciągu $\mathrm{Ind}(f^k, p)$. Tą drogą poszedł J. Franks, który wykorzystał indeks Conleya. Ten topologiczny niezmiennik określony jest dla izolowanego, zwartego zbioru niezmienniczego. Warunek otoczeniowy (B) z Twierdzenia 2.1 oznacza jednak, że punkt stały $\{p\}$ jest właśnie izolowanym zbiorem niezmienniczym, jest on także, rzecz jasna zwarty, można zatem stosować do niego metody teorii indeksu Conleya.

J. Franks wyraził $\mathrm{Ind}(f^k, p)$ jako minus jeden razy ślad pewnego (generowanego przez f^k) endomorfizmu skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Z drugiej strony wykazał on także, że dla dowolnej macierzy rzeczywistej A, ślad $\mathrm{tr}\, A^k \geqslant 0$ dla nieskończenie wielu wartości k. Ostatecznie zatem $\mathrm{Ind}(f^k, p) \leqslant 0$ dla takich k. Fakty te wystarczają do zbudowania sprzeczności potrzebnej dla udowodnienia tezy Twierdzenia 3.1. Mamy bowiem $\sum_{i=1}^{r+1} \mathrm{Ind}(h^j, p_i) = \sum_{i=1}^{r+1} -\mathrm{tr}\, A_i^j = -\mathrm{tr}\, B^j$, gdzie $B = \bigoplus_{i=1}^{r+1} A_i$. Zatem znowu $-\mathrm{tr}\, B^j \leqslant 0$ dla nieskończenie wielu j, a więc dla tych j mamy $\sum_{i=1}^{r+1} \mathrm{Ind}(h^j, p_i) \leqslant 0$.

Kończąc opis zmagań z problemem Ulama dodać należy, że jak dotąd wciąż otwarte pozostaje pytanie o istnienie homeomorfizmów minimalnych w wyższych wymiarach, na przykład dla nakłuć $\mathbb{R}^3$. W tych przypadkach podążać trzeba będzie prawdopodobnie zupełnie inną drogą, gdyż zarówno podejście Calvez i Yoccoza jak i Franksa w istotny sposób wykorzystywały specyficzne topologiczne własności płaszczyny.

Prace cytowane

[1] M. Brown, *On the fixed point index of iterates of planar homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. 108 (4) (1990), 1109–1114.

[2] B. Brechner, R. Mauldin, *Homeomorphisms of the plane*, Pacific J. Math. 59 (2) (1975), 375–381.

[3] J. Franks, *The Conley Index and non-existence of minimal homeomorphisms*, Illinois J. Math. 43 (3) (1999), 457–464.

[4] M. Handel, *There are no minimal homeomorphisms of the multipunctured plane*, Ergodic Theory Dynam. Systems 12 (1992), 75–83.

[5] R. D. Mauldin (red), *The Scottish Book*, Birkhäuser, Boston 1981.

[6] P. Calvez, J.-C. Yoccoz, *Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe*, Ann. of Math. 146 (1997), 241–293.