ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXV (1999)

Daniel Simson (Toruń)

Początki toruńskiej algebry

W roku 1951 Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk (IM PAN) opracował strategiczny program rozwoju głównych dziedzin matematyki polskiej zgodnie z uchwałami Pierwszego Kongresu Nauki Polskiej, który odbył się w Warszawie w okresie od 29 czerwca do 2 lipca 1951 roku.

Jednym z elementów tego programu było zorganizowanie w Polsce badań naukowych w zakresie kierunków słabo reprezentowanych lub dotychczas nie istniejących w polskiej matematyce, a odgrywających poważną rolę w matematyce światowej. Do takich dziedzin należała algebra, która praktycznie nie istniała w matematyce polskiej okresu międzywojennego.

Program IM PAN przewidywał m.in. stworzenie ośrodka badań algebraicznych, którego organizację powierzono głównie Jerzemu Marii Łosiowi, a jako miejsce sugerowano Toruń.

Jerzy Maria Łoś urodził się w roku 1920. Głównymi jego zainteresowaniami naukowymi były m.in. podstawy matematyki, logika matematyczna, teoria modeli, algebra i metody matematyczne w ekonomii.

W roku 1947 ukończył studia i uzyskał tytuł magistra na UMCS w Lublinie[1]. Stopień naukowy doktora nadano mu na Uniwersytecie Wrocławskim w roku 1949 na podstawie rozprawy pt. „Teoria matryc logiki wielowartościowej”, której promotorem był prof. Jerzy Słupecki. Tytuł naukowy profesora nadzwyczajnego nadano mu w roku 1954, zaś tytuł naukowy profesora zwyczajnego w roku 1957. Od roku 1964 był członkiem korespondentem Polskiej Akademii Nauk, a w roku 1983 został członkiem rzeczywistym.

Realizując sugestie zawarte w programie IM PAN J. Łoś przeniósł się z Wrocławia do Torunia w 1952 roku i rozpoczął budowanie zespołu badawczego o tematyce algebraicznej. Zaangażował do tego Edwarda Sąsiadę (ur. w roku 1924), Józefa Słomińskiego (ur. w roku 1929), Stanisława Balcerzyka (ur. w roku 1932), Pawła Jarka (ur. w roku 1933) i kilku innych młodych matematyków. W krótkim czasie zorganizował w Toruniu badania w zakresie algebry i utworzył Toruński Oddział IM PAN, który istnieje do chwili obecnej.

[1] Dokładny tytuł: „magister filozofii w zakresie filozofii w sensie ścisłym”, patrz Nauka Polska 3 (1971).

Poniżej zamieszczamy karykaturę Jerzego Łosia z roku 1952 wykonaną przez Leona Jeśmanowicza (1914–1989).

Zespół algebraików toruńskich stworzony przez J. Łosia skoncentrował tematykę swych badań głównie na następujących problemach:

• Podstawy matematyki, teoria modeli (ultraprodukty) i teoria algebr uniwersalnych.

• Teoria grup abelowych, a w szczególności problemy istnienia patologicznych rozkładów grup abelowych na sumy proste właściwych podgrup (patrz [16], [13]), tzw. *I. Kaplansky's Test Problem* (patrz [17]), grupy algebraicznie zwarte (patrz [1], [12]), konstrukcje dużych grup nierozkładalnych (patrz [15]), serwantność (patrz [10], [11]).

• Teoria pierścieni.

Działalność toruńskiej grupy algebraików zaowocowała w dość krótkim czasie rezultatami o znaczeniu europejskim i światowym. Początkowym efektem tych działań były wyniki naukowe J. Łosia oraz wypromowanie przez niego kilku doktorów. Pod jego kierunkiem powstały prace doktorskie: J. Słomińskiego pt. „Teoria algebr z działaniami o nieskończonej liczbie argumentów" w roku 1957 (patrz [22]), E. Sąsiady pt. „O rozszczepialności grup mieszanych" w roku 1959 (patrz [16]) oraz S. Balcerzyka pt. „O grupach ilorazowych pewnych podgrup zupełnej sumy prostej beztorsyjnych grup abelowych" w roku 1959 (patrz [2]). Doktorzy ci w krótkim czasie przygotowali rozprawy habilitacyjne: J. Słomiński w roku 1961 na temat „O wyznaczaniu postaci kongruencji w algebrach abstrakcyjnych z równościowo definiowalnymi stałymi elementami" [23], E. Sąsiada w roku 1961 na temat „Pierścienie proste i radykalne w sensie Jacobsona" oraz S. Balcerzyk w roku 1962 na temat „On classes of abelian groups" [3].

Dziś można już obiektywnie ocenić znaczenie badań podjętych w latach pięćdziesiątych przez algebraików toruńskich. Z satysfakcją należy stwierdzić, że osiągnięcia zespołu toruńskiego z teorii grup abelowych odegrały istotną rolę w rozwoju tej teorii, wiele z nich weszło na stałe do literatury światowej z tej dziedziny, do dzisiaj są wysoko cenione, stosowane i często cytowane (patrz monografia [7]). Poważne znaczenie odegrały w szczególności prace J. Łosia o serwantności [10], [11], wyniki S. Balcerzyka o grupach algebraicznie zwartych [1] oraz prace E. Sąsiady o dużych grupach nierozkładalnych i o rozkładach patologicznych grup abelowych [15]–[17].

W latach pięćdziesiątych, sześćdziesiątych i siedemdziesiątych wyniki te stanowiły inspirację do nowych kierunków badań zarówno w teorii grup abelowych, jak i w teorii modułów nad pierścieniami (patrz m.in. [20])[2].

Oprócz teorii grup abelowych dziedzinami, w których działalność naukowa toruńskiej grupy profesora J. Łosia i prowadzone przez niego prace badawcze uwieńczone zostały również dużymi sukcesami, były podstawy teorii modeli i algebra uniwersalna. Z okresu toruńskich badań lat pięćdziesiątych pochodzi m.in. szeroko znane i stosowane twierdzenie Łosia o ultraprodukcie znane w literaturze matematycznej jako „*Łoś's Principle*" (oczywiście słowo „Łoś" na ogół jest wymawiane i pisane błędnie). Wiele przykładów jego zastosowań można znaleźć w monografii C. U. Jensena i H. Lenzinga [9]. Poniżej formułujemy to twierdzenie w pewnej uproszczonej wersji.

W tym celu przypomnijmy następującą definicję (patrz H. Rasiowa [14, str. 290]).

Definicja. Rodzinę $\mathcal{F} \subseteq 2^I$ w algebrze Boole'a $(2^I, \cup, \cap)$ wszystkich podzbiorów ustalonego niepustego zbioru I nazywamy filtrem, jeśli spełnia następujące warunki:

(i) $I \in \mathcal{F}$;
(ii) Jeśli $X, Y \in \mathcal{F}$, to $X \cap Y \in \mathcal{F}$;
(iii) Jeśli $X \in \mathcal{F}$ oraz $A \in 2^I$, to $X \cup A \in \mathcal{F}$.

Jeśli poza tym $\mathcal{F}$ nie zawiera zbioru pustego i jest filtrem maksymalnym, to $\mathcal{F} \subseteq 2^I$ nazywamy *ultrafiltrem.*

Łatwo pokazać, że rodzina $\mathcal{F} \subseteq 2^I$ jest ultrafiltrem w algebrze Boole'a $(2^I, \cup, \cap)$, jeśli $\mathcal{F}$ spełnia następujące warunki:

(a) $\mathcal{F}$ nie zawiera zbioru pustego;
(b) Jeśli $X, Y \in \mathcal{F}$, to $X \cap Y \in \mathcal{F}$;
(c) Jeśli $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \subseteq B \subseteq I$, to $B \in \mathcal{F}$;
(d) Jeśli $A \in 2^I$, to $A \in \mathcal{F}$ lub $I \setminus A \in \mathcal{F}$.

---

[2] Opinie te przekazywali mi w bezpośrednich rozmowach i dyskusjach algebraicy włoscy (z Uniwersytetu w Padwie), niemieccy i amerykańscy, a w szczególności Profesor Laszlo Fuchs z Tulane University w USA, który w połowie lat pięćdziesiątych blisko współpracował z algebraikami toruńskimi.

L. Fuchs jest Węgrem; w latach pięćdziesiątych pracował w Budapeszcie. Po rewolucji węgierskiej w październiku 1956 roku wyemigrował do USA, gdzie przebywa i pracuje do dzisiaj. Zajmuje się głównie teorią grup abelowych i teorią modułów nad pierścieniami przemiennymi.

Załóżmy, że $\{R_j\}_{j\in I}$ jest rodziną grup (lub pierścieni, półgrup, itp.) indeksowanych elementami ustalonego zbioru I, oraz niech $\mathcal{F} \subseteq 2^I$ będzie ultrafiltrem w zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru I. *Ultraproduktem* rodziny $\{R_j\}_{j\in I}$ nazywamy zbiór

$$\Big(\prod_{j\in I} R_j\Big)/\mathcal{F} = \Big(\prod_{j\in I} R_j\Big)/\!\sim$$

składający się ze wszystkich klas równoważności ciągów $\{r_j\}_{j\in I} \in \prod_{j\in I} R_j$ względem relacji

$$\{r_j\}_{j\in I} \sim \{r'_j\}_{j\in I} \quad \Leftrightarrow \quad \big\{j \in I\,; r_j = r'_j\big\} \in \mathcal{F}.$$

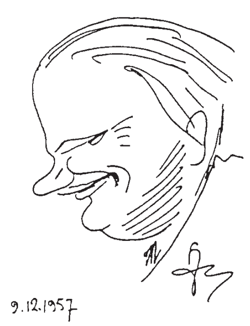
Następujący ważny rezultat nazywany jest powszechnie w literaturze naukowej *twierdzeniem Łosia o ultraprodukcie.*

Twierdzenie. *Niech $\{R_j\}_{j\in I}$ oraz $\mathcal{F}$ będą takie jak wyżej oraz niech σ będzie formułą pierwszego rzędu w teorii grup (odpowiednio: pierścieni, półgrup, itp.). Formuła σ jest spełniona w ultraproducie $\prod_{j\in I} R_j/\mathcal{F}$ wtedy i tylko wtedy gdy jest spełniona w R_i dla prawie wszystkich $i \in I$, tzn. zbiór $I_\sigma = \{i \in I\,; \sigma$ jest spełniona w $R_i\}$ należy do $\mathcal{F}$.*

Ważną konsekwencją powyższego twierdzenia Łosia jest następujący wniosek o „zwartości".

Wniosek. *Niech Σ będzie zbiorem formuł pierwszego rzędu w danej teorii (np. grup, pierścieni, półgrup, itp.) takim, że dla każdego skończonego podzbioru Σ' zbioru Σ istnieje model tej teorii (tzn. grupa, pierścień, półgrupa, itp.), w którym spełnione są wszystkie formuły ze zbioru Σ'. Wtedy istnieje model tej teorii (tzn. grupa, pierścień, półgrupa, itp.), w którym spełnione są wszystkie formuły ze zbioru Σ.*

Badania w zakresie algebry uniwersalnej zapoczątkowane przez J. Łosia dotyczyły głównie algebr z nieskończenie argumentowymi działaniami i algebr częściowych. Idee te zostały rozwinięte przede wszystkim w pracach J. Słomińskiego (p. poniżej karykaturę), a w szczególności w jego wspomnianej wyżej pracy doktorskiej [22] i rozprawie habilitacyjnej [23]. Odegrały one dużą rolę w rozwoju algebry uniwersalnej.



W roku 1961 Jerzy Łoś przeniósł się z Torunia do Warszawy, gdzie mieszkał i pracował do ostatnich chwil swego życia. W latach sześćdziesiątych przerwał swe badania naukowe z zakresu algebry, podstaw matematyki i logiki, oraz rozpoczął pracę naukową w dziedzinie zastosowania metod matematycznych w ekonomii. Przez długi okres był dyrektorem Instytutu Podstaw Informatyki PAN w Warszawie aż do chwili przejścia na emeryturę w roku 1990. Zmarł w Warszawie 1 czerwca 1998 roku w wieku 75 lat.

Przypomnijmy, że w uznaniu wybitnych osiągnięć naukowych profesora Jerzego Łosia Senat Uniwersytetu w Hagen (RFN) nadał mu 27 kwietnia 1995 roku tytuł Doktora Honoris Causa.

W końcu lat pięćdziesiątych S. Balcerzyk i E. Sąsiada kontynuując i rozszerzając program J. Łosia, rozpoczęli w Toruniu badania w zakresie teorii pierścieni oraz algebry homologicznej i jej zastosowań w topologii. Formalnym efektem tych prac i współpracy algebraików z topologami była zorganizowana w Toruniu w czerwcu 1962 roku konferencja naukowa na temat: „Metody Algebraiczne w Topologii". Jej organizatorem był Andrzej Granas (ur. w roku 1929), a jednym z jej uczestników był profesor Karol Borsuk. Materiałami z tej konferencji są następujące trzy skrypty: (1) Andrzej Białynicki-Birula, „*Teoria snopów*", (2) Andrzej Granas, „*Przestrzenie włókniste*", (3) Stanisław Balcerzyk i Edward Sąsiada, „*Podstawowe pojęcia algebry homologicznej*" (p. poniżej karykatury S. Balcerzyka, A. Granasa i E. Sąsiady).

Działalność naukowa S. Balcerzyka od początku lat sześćdziesiątych dotyczyła głównie metod homologicznych w algebrze, topologii algebraicznej, algebraicznej K-teorii, algebry przemiennej, teorii modułów, algebraicznej teorii liczb, metod kategoryjnych w algebrze i geometrii algebraicznej. Uzyskał w tym zakresie wiele oryginalnych i ważnych wyników, które omówimy w oddzielnych artykułach (patrz m.in. [21]). Już w połowie lat sześćdziesiątych stworzył w Toruniu prężny zespół zajmujący się powyższą tematyką, w którego skład weszli m.in. Tadeusz Józefiak (ur. w roku 1942), Daniel Simson (ur. w roku 1942) oraz Andrzej Tyc (ur. w roku 1942).

Najstarszym toruńskim uczniem Jerzego Łosia był Edward Sąsiada. Urodził się w roku 1924 we Lwowie. Studia matematyczne ukończył na Uniwersytecie Wrocławskim pod kierunkiem prof. Bronisława Knastera. W październiku 1952 roku został zatrudniony na UMK w Toruniu na stanowisku asystenta, ale 1 stycznia 1953 roku przeszedł do pracy w Toruńskim Oddziale Instytutu Matematycznego PAN, gdzie był zatrudniony do chwili przejścia na emeryturę w roku 1994. Na UMK w Toruniu zatrudniał się okresowo w wymiarze pół etatu lub w pełnym wymiarze godzin na drugim etacie prowadząc seminaria naukowe, seminaria magisterskie i wykłady monograficzne.

Na początku lat sześćdziesiątych działalność naukowa Edwarda Sąsiady (wówczas młodego doktora nauk matematycznych) koncentrowała się głównie na teorii pierścieni nieprzemiennych. Jednym z efektów jego badań w teorii pierścieni jest praca habilitacyjna, której głównym wynikiem jest konstrukcja pierścienia R, będącego pierścieniem prostym i równym swemu radykałowi Jacobsona. Wynik ten został uzyskany w czasie pobytu E. Sąsiady na Uniwersytecie Łomonosowa w Moskwie w roku 1960[3] i stanowił rewelację w skali światowej. Do dzisiaj przykład E. Sąsiady i podana przez niego metoda konstrukcji są wysoko cenione przez algebraików na całym świecie.

Ponieważ przedstawienie tego rezultatu nie wymaga zaawansowanego aparatu i języka algebraicznego, więc opiszemy go poniżej w pewnym skrócie.

Przypomnijmy, że pierścieniem *łącznym* nazywamy system algebraiczny $(R, +, \cdot)$, gdzie R jest niepustym zbiorem, $+, \cdot : R \times R \to R$ są dwuargumentowymi działaniami w R (zwanymi *dodawaniem* i *mnożeniem*) przyporządkowującymi dowolnej parze (r, s) elementów w R elementy $r + s$ oraz rs należące do R. Zakłada się ponadto, że $(R, +)$ jest grupą przemienną, działanie mnożenia $\cdot$ jest łączne oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, tzn. dla dowolnych $r, s_1, s_2 \in R$ zachodzą równości $r(s_1 + s_2) = rs_1 + rs_2$ oraz $(s_1 + s_2)r = s_1r + s_2r$ (patrz [4], [5]). Mnożenie w R nazywamy niezerowym, jeśli istnieją elementy $r, s \in R$ takie, że iloczyn rs jest różny od zera, tzn. różny od elementu neutralnego grupy przemiennej $(G, +)$.

Jeśli istnieje element neutralny $1 \in R$ względem mnożenia, to nazywamy go *jedynką* pierścienia R, zaś R nazywamy wtedy pierścieniem *z jedynką.* Pierścień R nazywamy *przemiennym*, jeśli $rs = sr$ dla dowolnych $r, s \in R$.

W 1945 roku Nathan Jacobson zdefiniował w dowolnym pierścieniu R ideał dwustronny (zwany dzisiaj *radykałem Jacobsona* pierścienia R)

$$J(R) \subseteq R$$

[3]Wynik został przedstawiony przez E. Sąsiadę w referacie na posiedzeniu Moskiewskiego Towarzystwa Matematycznego dnia 20 grudnia 1960 roku.

(patrz N. Jacobson [8]) jako zbiór wszystkich elementów $r \in R$ takich, że dla dowolnego $x \in R$ istnieje $y \in R$ dla którego zachodzą równości

$$(*) \qquad xr + y + xry = rx + y + yrx = 0.$$

Oryginalna definicja radykału podana przez N. Jacobsona różni się od powyższej, ale nieskomplikowany rachunek pokazuje, że obie definicje są równoważne (patrz wstęp w monografii C. Faith [6]).

Jeśli pierścień R posiada jedynkę $1 \in R$, to równości $(*)$ przyjmują postać

$$(1 + xr)(1 + y) = 1 = (1 + y)(1 + rx),$$

co oznacza, że

$$(**) \quad r \in J(R) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + xr \text{ jest odwracalny w } R \text{ dla dowolnego } x \in R.$$

Jest to powszechnie znana obecnie postać definicji radykału Jacobsona. W tym przypadku $J(R)$ jest dwustronnym ideałem w pierścieniu R równym przekrojowi wszystkich prawych (bądź lewych) maksymalnych ideałów w R. Stąd wynika, że $J(R) \neq R$, o ile R jest pierścieniem z jedynką.

Przypomnijmy, że pierścień R nazywamy *prostym*, jeśli jedynymi jego dwustronnymi ideałami są ideał zerowy oraz R. Pierścień R nazywamy *radykalnym*, jeśli $J(R) = R$.

Z poniższego lematu wynika, że pierścień $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ wszystkich $n \times n$ macierzy kwadratowych jest prosty, oraz że jego radykał Jacobsona jest zerowy, gdyż na podstawie warunku $(**)$ jedynka dowolnego pierścienia R nie należy do $J(R)$. Zatem pierścień $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ nie jest pierścieniem radykalym.

LEMAT. *Jeśli I jest dwustronnym ideałem w algebrze macierzy $\mathbb{M}_n(K)$ nad ciałem K, to $I = (0)$ lub $I = \mathbb{M}_n(K)$.*

D o w ó d. Niech $e_{ij} \in \mathbb{M}_n(K)$ będzie macierzą posiadającą współczynnik 1 na miejscu (i, j) oraz pozostałe współczynniki równe zero. Zauważmy, że zachodzą równości:

- $e_{ij}e_{st} = 0$, gdy $j \neq s$;
- $e_{ij}e_{jt} = e_{it}$, dla dowolnych i, t;
- $e_{jj}^2 = e_{jj}$ dla $j = 1, \ldots, n$;
- $E = e_{11} + \ldots + e_{nn}$, gdzie E jest macierzą jednostkową.

Załóżmy teraz, że $I \subseteq \mathbb{M}_n(K)$ jest niezerowym ideałem dwustronnym oraz niech $A = [a_{ij}]$ będzie niezerową macierzą w I. Pokażemy, że $I = \mathbb{M}_n(K)$. W tym celu załóżmy, że współczynnik a_{st} jest różny od zera. Ponieważ $A \in I$ oraz I jest dwustronnym idałem, więc macierz $a_{st}^{-1}e_{ss}Ae_{tt} = e_{st}$ należy do I. Stąd też wynika, że macierze

$$e_{11} = e_{1s}e_{st}e_{t1},\ e_{22} = e_{2s}e_{st}e_{t2},\ \ldots,\ e_{nn} = e_{ns}e_{st}e_{tn}$$

należą do I. A zatem jedynka $E = e_{11} + \ldots + e_{nn}$ pierścienia $\mathbb{M}_n(K)$ należy do I, co implikuje żądaną równość $I = \mathbb{M}_n(K)$. □

E. Sąsiada skonstruował łączny pierścień prosty R bez jedynki, z niezerowym mnożeniem i taki, że $J(R) = R$ (tzn. prosty pierścień radykalny), rozwiązując ważny i trudny problem w teorii pierścieni czekający na rozwiązanie ponad dziesięć lat. Niestety szczegóły tej konstrukcji nie zostały przez E. Sąsiadę opublikowane, poza krótką notatką [18] pt. „Solution of the Problem of Existence of Simple Radical Ring" o objętości jednej strony, opublikowaną w Biuletynie PAN, gdzie jedynie anonsuje się uzyskany wynik, przedstawia się ideę konstrukcji i zapowiada opublikowanie szczegółowych dowodów w Fundamenta Mathematicae. Zapowiedź ta niestety nie została zrealizowana. Dopiero w 1967 roku E. Sąsiada wraz z matematykiem angielskim P. M. Cohn'em (pochodzącym z Hamburga), opublikowali w Journal of Algebra pracę [19] pt. „An Example of a Simple Radical Ring", zawierającą konstrukcję radykalnego pierścienia prostego.

W roku 1985 w Durham (Anglia) w czasie rozmowy z P. M. Cohn'em dowiedziałem się, że praca ta została zredagowana przez niego na podstawie fragmentów notatek przekazanych mu przez E. Sąsiadę, który jednocześnie sugerował, iż nie warto już tej pracy publikować. E. Sąsiada pozwolił jednak Cohn'owi (wykorzystując swoje notatki) opublikować konstrukcję pierścienia radykalnego prostego pod warunkiem, że P. M. Cohn zgodzi się zostać jej współautorem. Konstrukcja opublikowana w [19] różni się w znacznym stopniu od oryginalnej konstrukcji podanej przez E. Sąsiadę w Moskwie w roku 1960.

Po powrocie z Moskwy na początku lat sześćdziesiątych E. Sąsiada prowadził w Toruniu cykl wykładów z teorii pierścieni i ideałów. W zakresie algebry wypromował jednego doktora – Romana Kiełpińskiego[4] w roku 1968. W połowie lat sześćdziesiątych przestał zajmować się problemami algebraicznymi i skierował swoje zainteresowania naukowe głównie w stronę procesów stochastycznych, teorii ergodycznej i układów dynamicznych. Obecnie teorie te rozwijane są w Toruniu przez jego uczniów, a w szczególności przez zespół pracujący pod kierunkiem prof. Jana Kwiatkowskiego oraz zespół kierowany przez prof. Adama Jakubowskiego.

Przypomnijmy, że Walne Zgromadzenie Polskiego Towarzystwa Matematycznego nadało w roku 1995 Profesorowi Edwardowi Sąsiadzie tytuł Honorowego Członka PTM za wybitne zasługi dla matematyki polskiej. Ponadto Senat Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu przyznał Profesorowi Edwardowi Sąsiadzie „Medal za zasługi położone dla rozwoju uczelni" w roku 1995 z okazji pięćdziesięciolecia UMK.

Profesor Edward Sąsiada zmarł w Toruniu 23 lutego 1999 roku w wieku 75 lat.

---

[4] Roman Kiełpiński urodził się w roku 1939. Zajmował się głównie serwantnością w modułach nad pierścieniami, relatywną algebrą homologiczną oraz teorią algebr Hopfa. Zmarł w Toruniu 17 września 1987 roku.

Cytowana literatura

[1] S. Balcerzyk, *On algebraically compact groups of I. Kaplansky*, Fund. Math. 44 (1957), 91–93.
[2] S. Balcerzyk, *On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 7 (1959), 141–143.
[3] S. Balcerzyk, *On classes of abelian groups*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 9 (1961), 327–329.
[4] S. Balcerzyk, „*Wstęp do algebry homologicznej*”, PWN Warszawa, 1970.
[5] A. Białynicki-Birula, „*Zarys algebry*”, PWN, Warszawa 1987.
[6] C. Faith, „*Algebra II. Ring Theory*”, Springer-Verlag, 1976.
[7] L. Fuchs, „*Infinite Abelian Groups*”, Academic Press, 1970 (istnieje przekład rosyjski).
[8] N. Jacobson, „*Structure of Rings*”, Amer. Math. Soc., Providence 1956 (istnieje też przekład rosyjski „Strojenije kolec”, Moskva 1961).
[9] C. U. Jensen, H. Lenzing, „*Model Theoretic Algebra With Particular Emphasis on Fields*, *Rings*, *Modules*”, Algebra, Logic and Applications, Vol. 2, Gordon & Breach Science Publishers, 1989.
[10] J. Łoś, *Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups*, Fund. Math. 44 (1957), 84–90.
[11] J. Łoś, *Linear equations and pure subgroups*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), 13–18.
[12] J. Łoś, *Generalized limits in algebraically compact groups*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), 19–21.
[13] J. Łoś, E. Sąsiada, Z. Słomiński, *On abelian groups with hereditarily generating systems*, Publ. Math. Debrecen 4 (1956), 351–356.
[14] H. Rasiowa, „*Wstęp do matematyki współczesnej*”, PWN, Warszawa 1971.
[15] E. Sąsiada, *Construction of a directly indecomposable abelian group of a power higher than that of the continuum*, Bull. Acad. Polon. Sci. 5 (1957), 701–703, oraz 7(1959), 23–26.
[16] E. Sąsiada, *On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete direct sum of groups of rank one*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), 145–149.
[17] E. Sąsiada, *Negative solution of I. Kaplansky's First Test Problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning the homology groups*, Bull. Acad. Polon. Sci. 9 (1961), 331–334.
[18] E. Sąsiada, *Solution of the problem of existence of simple radical ring*, Bull. Acad. Polon. Sci. 9 (1961), 257.
[19] E. Sąsiada, P. M. Cohn, *An example of a simple radical ring*, J. Algebra 5 (1967), 373–377.
[20] D. Simson, *On pure global dimension of locally finitely presented Grothendieck categories*, Fund. Math. 96 (1977), 91–116.
[21] D. Simson, *O hipotezie continuum i syzygiach*, Wiadom. Mat. 34 (1998), 1–8.
[22] J. Słomiński, *The theory of abstract algebras with infinitary operations*, Rozprawy Matematyczne 18 (1959), 1–67.
[23] J. Słomiński, *On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable constant elements*, Fund. Math. 48 (1960), 325–345.
[24] A. Wieczorek, *Krótki opis badań i osiągnięć Profesora Jerzego Łosia w dziedzinie matematycznej ekonomii i zastosowań matematyki*, Przegląd Statystyczny (w druku).