ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVI (2000)

Krzysztof Chełmiński (Darmstadt, Warszawa)

Od metody Minty'ego–Browdera do teorii rozwiązań lepkościowych*

1. Słowo wstępne. Koniec lat osiemdziesiątych tego stulecia przyniósł w teorii równań różniczkowych cząstkowych nową definicję „słabych rozwiązań" skalarnych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Zaletą tego nowego pojęcia jest możliwość traktowania funkcji tylko ciągłych jako rozwiązania w pełni nieliniowych, skalarnych równań różniczkowych. Po raz pierwszy pojęcie to pojawiło się w pracy [5] i dotyczyło równania Hamiltona–Jacobiego. Metoda, jaką zastosowano do konstrukcji rozwiązań (metoda zanikającej lepkości – stosowana powszechnie w prawach zachowania), spowodowała, że tym nowym „słabym rozwiązaniom" nadano nazwę „rozwiązania lepkościowe" („viscosity solutions"). Gdy kilka lat później rozszerzono tę definicję na skalarne równania drugiego rzędu, szybko okazało się, że nazwa „rozwiązania lepkościowe" nie jest już adekwatna do metod stosowanych w konstrukcji takich rozwiązań. Jednakże do dzisiaj nazwa ta nie została zmieniona, a nawet więcej, zadomowiła się na stałe w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Celem tego wykładu nie będzie prezentacja elementów teorii istnienia i jednoznaczności rozwiązań lepkościowych. Do tego potrzebowalibyśmy nieco więcej niż tylko jednego wykładu. Wykład ten będzie poświęcony przedstawieniu drogi jaką matematyka przeszła, aby w końcu dojść do tego nowego pojęcia.

2. Definicja rozwiązań lepkościowych. Aby widzieć przed sobą cel, do którego zmierzamy, zaczniemy od końca, czyli od wprowadzenia pojęcia rozwiązań lepkościowych. Załóżmy, że w obszarze ograniczonym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rozważamy nieliniowe, skalarne równanie różniczkowe drugiego rzędu, tzn. szukamy funkcji $u : \Omega \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega \tag{2.1}$$

gdzie $F : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest daną funkcją ciągłą.

---

*Tekst ten jest oparty na wykładzie habilitacyjnym autora przedstawionym 28 października 1999 roku na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

Definicja 1. **A.** Mówimy, że funkcja ciągła $u \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ jest *podrozwiązaniem lepkościowym* (*nadrozwiązaniem lepkościowym*) równania (2.1) w punkcie $x_0 \in \Omega$, jeżeli dla każdej funkcji $v \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ takiej, że różnica $u - v$ ma w punkcie x_0 lokalne maksimum (minimum) zachodzi nierówność

$$F(D^2 v(x_0), Dv(x_0), u(x_0), x_0) \leqslant 0 \quad (\geqslant 0).$$

B. Funkcja $u \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ jest *rozwiązaniem lepkościowym* równania (2.1) w punkcie $x_0 \in \Omega$, jeżeli u jest jednocześnie podrozwiązaniem lepkościowym i nadrozwiązaniem lepkościowym równania (2.1) w punkcie x_0.

C. Mówimy, że $u \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ jest *rozwiązaniem lepkościowym* równania (2.1) w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jeżeli u jest rozwiązaniem lepkościowym równania (2.1) w każdym punkcie tego obszaru.

Z powyższej definicji daje się od razu zauważyć, że rozwiązania lepkościowe są nowym rodzajem „słabych rozwiązań”. Podobnie jak w teorii słabych rozwiązań, operacje różniczkowania przenosi się na funkcje próbne. Zaletą tego nowego pojęcia jest fakt, że wszystkie różniczkowania występujące w rozważanym równaniu różniczkowym przechodzą na funkcje próbne. Wadą natomiast, że zbiór funkcji próbnych jest związany z konkretnym punktem $x_0 \in \Omega$ oraz z zachowaniem się w pobliżu tego punktu funkcji, która kandyduje do miana rozwiązania lepkościowego. Pomimo, że jak wspomnieliśmy we wstępie, nie będziemy tu przedstawiać teorii istnienia rozwiązań lepkościowch, to wykład ten byłby niepełny, gdybyśmy nie wspomnieli o podstawowych założeniach tej teorii. Tak więc o funkcji F zakłada się, że jest antymonotoniczna względem drugich pochodnych

$$\forall_{X,Y \in \mathbb{R}^{n^2}_{sym}} \; X - Y \geqslant 0 \Rightarrow F(X,p,u,x) \leqslant F(Y,p,u,x) \tag{2.2}$$

i monotoniczna względem u

$$\forall_{u,v \in \mathbb{R}} \; u - v \geqslant 0 \Rightarrow F(X,p,u,x) \geqslant F(X,p,v,x). \tag{2.3}$$

Założenie (2.2) powoduje, że teoria istnienia rozwiązań lepkościowych ma zastosowanie tylko do równań eliptycznych i parabolicznych drugiego rzędu. Nic w tym jednak dziwnego, gdy przyjrzymy się dokładniej stosowanym w tej teorii metodom (jednym z ważnych elementów w konstrukcji rozwiązań lepkościowych jest zasada maksimum). Nie ulega jednak wątpliwości, że teoria ta znacznie poszerza klasę nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu, dla których można zbudować teorię istnienia rozwiązań. Na przykładzie poniższych dwóch równań łatwo widzimy „przewagę” tego nowego pojęcia nad stosowanymi do tej pory metodami.

1. $-|\Delta u(x)|^p \Delta u(x) = f(x) \Rightarrow F(X,p,u,x) = -|\mathrm{tr}\, X|^p \mathrm{tr}\, X - f(x)$, $p > 0$

2. $\sup\{F(D^2u(x),\, Du(x),\, u(x),\, x),\, G(D^2u(x),\, Du(x),\, u(x),\, x)\} = f(x)$ gdzie F i G spełniają (2.2) i (2.3).

W obu przypadkach podstawowe założenia teorii istnienia rozwiązań lepkościowych są spełnione i możemy próbować ją stosować. Natomiast dotychczasową metodą słabych rozwiązań nie zdziałamy nic. Nie wolno nam także zapomnieć, iż niewątpliwą zaletą teorii rozwiązań lepkościowych jest fakt, że aparat matematyczny stosowany w tej teorii nie wykracza poza wykład kursowy Analizy 2. Główną ideą stosowaną w twierdzeniu o istnieniu rozwiązań lepkościowych jest uogólnienie metody Perrona (doskonale znanej w konstrukcji funkcji harmonicznych) na przypadek równania (2.1) z funkcją F spełniającą (2.2) i (2.3). Wróćmy jednak do głównego nurtu naszego wykładu, czyli do prezentacji źródeł narodzin pojęcia rozwiązań lepkościowych.

3. Metoda Minty'ego–Browdera w przestrzeniach Hilberta. Podstawowym problemem występującym w badaniu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych jest brak słabej, ciągowej ciągłości wyrażeń nieliniowych, występujących w badanym równaniu. Postępowanie każdego matematyka, zajmującego się nieliniowym problemem, jest zazwyczaj takie samo. W zależności od charakteru równania, konstruujemy (mniej lub bardziej sprytnie) ciąg rozwiązań przybliżonych (w jakimś sensie) i staramy się pokazać, że ciąg ten zbiega (w pewnej topologii) do rozwiązania problemu wyjściowego. Niestety najczęściej informacja, jaką posiadamy o ciągu rozwiązań przybliżonych, jest zbyt uboga, aby móc przejść do granicy w wyrażeniach nieliniowych. Na przykład słabo ciągowo ciągłe są tylko wyrażenia liniowe i jeśli o naszym ciągu nie wiemy nic poza słabą zbieżnością, to pozostało nam tylko przejście do rozwiązań miarowych. Jednakże bardzo często się zdarza, że ciąg rozwiązań przybliżonych jest konstruowany w pewien specjalny sposób i dzięki temu może posiadać pewne dodatkowe własności, umożliwiające dalsze postępowanie. Pozostaje więc nam jeszcze nadzieja, że wyrażenia nieliniowe, występujące w równaniu, są słabo, ciągowo ciągłe na tym konkretnym ciągu. Pierwszymi znaczącymi resultatami, dającymi dosyć zaskakującą odpowiedź na powyżej postawiony problem, były prace [12] i [2]. Sformułujmy teraz ściśle matematycznie nasz problem. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą, oraz $\{u_n\} \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$ będzie takim ciągiem, że $u_n \rightharpoonup u$ w $\mathbb{L}^2(\Omega)$ oraz $f(u_n) \rightharpoonup \chi$ w $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (symbol $\rightharpoonup$ oznacza tradycyjnie słabą zbieżność).

Problem: Czy $\chi(x) = f(u(x))$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$?

Twierdzenie (Minty '62, Browder '63). *Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest monotonicznym polem wektorowym, to znaczy*

$$\forall_{p,q\in\mathbb{R}^n}\ (f(p) - f(q)) \cdot (p - q) \geqslant 0,$$

oraz posiada co najwyżej liniowy wzrost

$$\exists_{C>0}\forall_{p\in\mathbb{R}^n}\ |f(p)| \leqslant C(1 + |p|).$$

Jeżeli ciąg $\{u_n\} \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$ *zbiega słabo do* u, *ciąg* $f(u_n)$ *zbiega słabo do* χ *oraz dodatkowo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(u_n) \cdot u_n \, dx = \int_\Omega \chi \cdot u \, dx \tag{3.1}$$

to $\chi(x) = f(u(x))$ *dla prawie wszystkich* $x \in \Omega$.

D o w ó d. Weźmy dowolną funkcję $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$. Z monotoniczności f otrzymujemy

$$\int_\Omega (f(u_n) - f(v)) \cdot (u_n - v) \, dx \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Przechodząc do granicy $n \to \infty$ i wykorzystując (3.1) dostajemy

$$\int_\Omega (\chi - f(v)) \cdot (u - v) \, dx \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Tu moglibyśmy już skończyć ten dowód, gdyż pole wektorowe f, przy przyjętych w twierdzeniu założeniach, generuje w przestrzeni $\mathbb{L}^2(\Omega)$ operator maksymalnie monotoniczny i (3.3) natychmiast oznacza, że $\chi = f(u)$. Teoria operatorów maksymalnie monotonicznych rozwinęła się jednak dopiero pod koniec lat sześćdziesiątych i dowód tego twierdzenia zawierał jeszcze następujące „dwie linijki”. Zapiszmy funkcję v w postaci $v = u - \lambda w$, gdzie $\lambda > 0$ i $w \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, wtedy (3.3) przechodzi w

$$\int_\Omega (\chi - f(u - \lambda w)) \cdot w \, dx \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Przechodząc w (3.4) do granicy $\lambda \to 0^+$ otrzymujemy

$$\int_\Omega (\chi - f(u)) \cdot w \, dx \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Zmieniając w na $-w$ uzyskujemy nierówność odwrotną, a stąd $\chi = f(u)$ prawie wszędzie. □

Zaprezentowana w dowodzie powyższego twierdzenia metoda została później nazwana metodą Minty'ego–Browdera. W literaturze spotyka się też określenia „chwyt Minty'ego” lub „trik monotoniczny”. Powstało też kilka uogólnień tej metody (porównaj przykład prezentowany poniżej). Jednakże wszystkie te modyfikacje bazowały nadal na klasycznej definicji monotoniczności w przestrzeniach Hilberta.

Pewien pouczający przykład. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym. Rozważmy następujący problem. Szukamy rozwiązania $u : \Omega \times \mathbb{R}_+$

$\to \mathbb{R}$ następującego zagadnienia początkowo-brzegowego

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u \ + f(u_t) = 0, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = u^0, \qquad u_t(0) = u^1, \end{cases}$$

gdzie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną, ciągłą, spełniającą warunek $f(0) = 0$ oraz posiadającą wzrost co najwyżej wielomianowy, to znaczy

$$\exists_{C,r>0} \forall_{p\in\mathbb{R}} \ |f(p)| \leqslant C(1 + |p|^r),$$

oraz funkcje $u^0, u^1 : \Omega \to \mathbb{R}$ opisują dane początkowe. Załóżmy, że wykazaliśmy istnienie ciągu przybliżeń Galerkina $\{u^k\}$ rozwiązującego w słabym sensie problem (P) we wstępującym ciągu H^k skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych, rozpiętych przez funkcje własne operatora Laplace'a związanego z jednorodnym warunkiem brzegowym typu Dirichleta. Tak więc funkcja u^k jest rozwiązaniem następującego problemu

$$(\mathrm{P}_k) \qquad \begin{cases} \forall_{\phi\in H^k} \displaystyle\int_\Omega u^k_{tt} \cdot \phi \, dx + \int_\Omega \nabla u^k \cdot \nabla\phi \, dx + \int_\Omega f(u^k_t) \cdot \phi \, dx = 0, \\ u^k_{|\partial\Omega} = 0, \\ u^k(0) = u^{0,k}, \qquad u^k_t(0) = u^{1,k} \end{cases}$$

gdzie ciągi $\{u^{0,k}\}$ i $\{u^{1,k}\}$ są tak wybrane, że $u^{0,k} \to u^0$ w $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ oraz $u^{1,k} \to u^1$ w $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Stosując metodę energetyczną do problemu (P_k) otrzymujemy

$$\mathcal{E}^k(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega |u^k_t|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u^k|^2 \, dx + \int_0^t \int_\Omega f(u^k_t) \cdot u^k_t \, dx \, dt = \mathcal{E}^k(0) \tag{3.6}$$

oraz ponadto

$$\sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega f(u^k_t) \cdot u^k_t \, dx \leqslant C(T) \tag{3.7}$$

gdzie stała $C(T)$ może rosnąć wraz z $T \to \infty$. Informacje (3.6) i (3.7) implikują, że przechodząc ewentualnie do podciągu, otrzymujemy $u^k \stackrel{*}{\rightharpoonup} u$ w $\mathbb{L}^\infty((0,T); \mathbb{H}^1_0(\Omega))$, $u^k_t \stackrel{*}{\rightharpoonup} u_t$ w $\mathbb{L}^\infty((0,T); \mathbb{L}^{r+1}(\Omega))$ i $f(u^k_t) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \chi$ w $\mathbb{L}^\infty((0,T); \mathbb{L}^{(r+1)/r}(\Omega))$. Stąd u jest słabym rozwiązaniem problemu

$$(\mathrm{P}_\infty) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u \ + \chi = 0, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = u^0, \qquad u_t(0) = u^1. \end{cases}$$

Pozostaje więc tylko pokazać, że $\chi = f(u)$. Stosując ponownie metodę energetyczną, tym razem do problemu (P_∞), dostajemy

$$\mathcal{E}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_0^t \int_\Omega \chi \cdot u_t \, dx \, dt = \mathcal{E}(0). \tag{3.8}$$

Porównując (3.6) z (3.8) i korzystając ze słabej, ciągowej półciągłości dolnej wyrażeń kwadratowych występujących w definicji $\mathcal{E}^k(t)$ otrzymujemy

$$\liminf_{k\to\infty} \int_0^t \int_\Omega f(u_t^k)\cdot u_t^k \,dx\,dt \leqslant \int_0^t \int_\Omega \chi\cdot u \ \,dx\,dt. \tag{3.9}$$

Uzyskana nierówność jest słabszą wersją założenia (3.1). Jednakże łatwo zauważyć, że (3.9) wystarcza do pokazania nierówności (3.3). Należy tylko w (3.2) przejść do granicy dolnej i wykorzystać (3.9). Dalej rozumowanie biegnie tak jak w dowodzie twierdzenia.

Powyższy przykład pokazuje że założenie (3.1) lub jego słabsza wersja (3.9) nie jest „puste". Rzeczywiście konstruowane ciągi przybliżeń posiadają czasami własność żądaną w twierdzeniu.

4. Rozszerzenie metody Minty'ego–Browdera na przestrzenie Banacha. Tę zaskakującą własność pól monotonicznych spróbowano natychmiast przenieść na przypadek przestrzeni Banacha. Podstawową trudnością, jaka się tu pojawiła, jest definicja monotoniczności w przestrzeniach Banacha. Już w 1967 roku praca T. Kato [11] przynosi rozszerzenie pojęcia monotoniczności.

Definicja 2. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest rzeczywistą przestrzenią Banacha. Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ nazywamy *akretywnym*, jeżeli

$$\forall_{\lambda>0}\forall_{x,x'\in D(\mathcal{A})}\ \|x-x'\| \leqslant \|x-x'+\lambda(\mathcal{A}x-\mathcal{A}x')\|. \tag{4.1}$$

Po pierwszym przeczytaniu definicji 2 nie widać od razu, że „akretywność" jest rozszerzeniem pojęcia monotoniczności. Jednakże nasze wątpliwości rozwiewa następujące

Stwierdzenie. *Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle$, to operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ jest akretywny $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ jest monotoniczny.*

Dowód. $\Rightarrow$ Niech $x, x' \in D(\mathcal{A})$ oraz $\lambda > 0$.

$$\|x-x'+\lambda(\mathcal{A}x-\mathcal{A}x')\|^2 = \|x-x'\|^2 + \lambda^2\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}x'\|^2 + 2\lambda\langle x-x', \mathcal{A}x-\mathcal{A}x'\rangle \geqslant \|x-x'\|^2.$$

Skracając przez 2λ otrzymujemy

$$\frac{\lambda}{2}\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}x'\|^2 + \langle x-x', \mathcal{A}x-\mathcal{A}x'\rangle \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Przechodząc do granicy $\lambda \to 0^+$ dostajemy, że $\mathcal{A}$ jest operatorem monotonicznym.

$\Leftarrow$ Jeżeli $\mathcal{A}$ jest operatorem monotonicznym, to dla dowolnych $x, x' \in D(\mathcal{A})$ zachodzi

$$\langle x-x', \mathcal{A}x-\mathcal{A}x'\rangle \geqslant 0.$$

Dodając do lewej strony wyrażenie $(\lambda/2)\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}x'\|^2$ otrzymujemy (4.2) i dowód biegnie dalej tak jak w przypadku „⇒" tylko do tyłu. □

Następnym problemem pojawiającym się przy próbie przeniesienia metody Minty'ego–Browdera do przestrzeni Banacha jest „brak iloczynu skalarnego". Zauważmy, że metoda ta korzystała w istotny sposób ze specyficznej definicji monotoniczności w przestrzeniach Hilberta. Pomimo, że niemożliwym jest znalezienie iloczynu skalarnego w przestrzeniach Banacha, to matematyka poradziła sobie i z tym problemem. Rolę iloczynu skalarnego zajęło następujące wyrażenie

$$[x,y]_+ \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \inf_{\lambda>0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}. \tag{4.3}$$

$[x,y]_+$ jest pochodną prowostronną normy w punkcie x w kierunku wektora y. Istnienie granicy występującej w powyższej definicji wynika natychmiast z wypukłości normy. Jeżeli przyjrzymy się dokładniej definicji akretywności i porównamy ją z (4.3), to z łatwością stwierdzamy, że

Uwaga.

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \text{ jest operatorem akretywnym} \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow \forall_{x,x\in D(\mathcal{A})}\ [x-x', \mathcal{A}x - \mathcal{A}x']_+ \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Teraz na drodze do zastosowania metody Minty'ego–Browdera w przestrzeniach Banacha stała już tylko charakteryzacja formy $[\cdot,\cdot]_+$ w najczęściej stosowanych w teorii równań różniczkowych cząstkowych przestrzeniach Banacha. Problemem tym zajęła się praca [13]. My przytoczymy tu tylko charakteryzację formy $[\cdot,\cdot]_+$ w przestrzeni $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ rzeczywistych funkcji ciągłych na zbiorze zwartym $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ z topologią zbieżności jednostajnej.

Fakt 1 (Sato '68). *Załóżmy, że funkcje f, g należą do $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ oraz $f \not\equiv 0$. Wówczas zachodzi wzór*

$$\begin{aligned} &[f,g]_+ = \sup_{x\in E(f)} \operatorname{sgn}(f(x))\cdot g(x) \\ &\qquad\qquad \textit{gdzie}\quad E(f) = \{x \in \overline{\Omega} : |f(x)| = \sup_{y\in\overline{\Omega}} |f(y)|\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

D o w ó d. Niech $f \not\equiv 0$ oraz $x \in E(f)$. Z definicji zbioru $E(f)$ dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{\|f+\lambda g\| - \|f\|}{\lambda} &\geqslant \frac{\operatorname{sgn}(f(x))\cdot(f(x)+\lambda g(x)) - |f(x)|}{\lambda} \\ &= \operatorname{sgn}(f(x))\cdot g(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Wybierzmy pewien ciąg liczbowy $\lambda_n \to 0^+$ oraz ciąg punktów $x_n \in E(f + \lambda_n g)$. Przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy założyć, że $f(x_n) +$

$\lambda_n g(x_n) \geqslant 0$ dla wszystkich n lub $f(x_n) + \lambda_n g(x_n) \leqslant 0$ dla wszystkich n. Załóżmy, że zachodzi pierwsza możliwość. Wówczas mamy

$$\frac{\|f + \lambda_n g\| - \|f\|}{\lambda_n} \leqslant \frac{(f(x_n) + \lambda_n g(x_n)) - f(x_n)}{\lambda_n} = g(x_n). \tag{4.7}$$

Ze zwartości zbioru $\overline{\Omega}$ wynika istnienie punktu skupienia x_∞ ciągu $\{x_n\}$. Przechodząc ewentualnie ponownie do podciągu, możemy założyć, że $x_n \to x_\infty$. Zauważmy ponadto, że

$$\|f\| \leftarrow \|f + \lambda_n g\| = (f + \lambda_n g)(x_n) \to f(x_\infty)$$

co oznacza, że $x_\infty \in E(f)$. Założenie $f \not\equiv 0$ powoduje dodatkowo, że $f(x_\infty) > 0$. Stąd dostajemy

$$[f, g]_+ \leqslant g(x_\infty) = \operatorname{sgn}(f(x_\infty)) \cdot g(x_\infty). \tag{4.8}$$

Nierówności (4.6) oraz (4.8) kończą dowód w przypadku $f(x_n)+\lambda_n g(x_n) \geqslant 0$ dla wszystkich n. W sytuacji odwrotnej rozumowanie przebiega podobnie. □

Udowodnimy teraz półciągłość górną formy $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_+$. Własność ta będzie odgrywała bardzo istotną rolę w następnym rozdziale.

FAKT 2. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha. Załóżmy, że $f_n \to f$ i $g_n \to g$ w przestrzeni X. Wówczas zachodzi następująca nierówność*

$$\limsup_{n\to\infty}\, [f_n,\, g_n]_+ \leqslant [f, g]_+.$$

D o w ó d. Dowód przeprowadzimy tylko w przypadku $X = \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. W przypadku dowolnej przestrzeni Banacha odsyłamy czytelnika do [1]. Zaczniemy od wykazania następującej interesującej własności formy $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_+$. Niech $f, g \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ oraz $f \not\equiv 0$, wtedy zachodzi

$$\exists_{x^* \in E(f)}\ [f, g]_+ = \operatorname{sgn}(f(x^*)) \cdot g(x^*), \tag{4.9}$$

co oznacza, że supremum po zbiorze $E(f)$ jest zawsze przyjmowane. Wybierzmy ciąg $\{x_n\} \subset E(f)$ tak, że

$$\operatorname{sgn}(f(x_n)) \cdot g(x_n) \geqslant [f, g]_+ - \frac{1}{n}. \tag{4.10}$$

Oznaczmy przez x_∞ pewien punkt skupienia ciągu $\{x_n\}$ i załóżmy, że $x_n \to x_\infty$. Łatwo widzimy, że

$$\|f\| = |f(x_n)| \to |f(x_\infty)| \Rightarrow x_\infty \in E(f).$$

Tak więc z (4.10) otrzymujemy $[f, g]_+ = \operatorname{sgn}(f(x_\infty)) \cdot g(x_\infty)$ i (4.9) jest udowodnione. Niech teraz $f_n \to f$ i $g_n \to g$ w przestrzeni $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Możemy założyć, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} [f_n,\, g_n]_+$. Z własności (4.9) wnioskujemy istnienie ciągu $x_n \in E(f_n)$ takiego, że

$$[f_n, g_n]_+ = \operatorname{sgn}(f(x_n)) \cdot g(x_n). \tag{4.11}$$

Niech x_∞ będzie pewnym punktem skupienia ciągu $\{x_n\}$. Możemy założyć, że $x_n \to x_\infty$. Z jednostajnej zbieżności $f_n \to f$ i $g_n \to g$ dostajemy

$$\|f\| \leftarrow \|f_n\| = |f_n(x_n)| \to |f(x_\infty)| \Rightarrow x_\infty \in E(f)$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} [f_n, g_n]_+ = \operatorname{sgn}(f(x_\infty)) \cdot g(x_\infty) \leqslant [f, g]_+. \qquad \square$$

Wniosek. *Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ jest akretywny, jeżeli dla dowolnych funkcji $f, g \in D(\mathcal{A})$ takich, że $f(x) \geqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in \overline{\Omega}$, zachodzi*

$$\exists_{x^* \in E(f-g)}\ \mathcal{A}f(x^*) - \mathcal{A}g(x^*) \geqslant 0.$$

Dowód. Niech $f, g \in D(\mathcal{A})$ oraz $f \not\equiv g$. Z faktu 1 oraz z dowodu faktu 2 wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}[f-g, \mathcal{A}f - \mathcal{A}g]_+ &= \sup_{x\in E(f-g)} \operatorname{sgn}(f-g)(x) \cdot (\mathcal{A}f - \mathcal{A}g)(x) \\ &= \operatorname{sgn}(f-g)(x^*) \cdot (\mathcal{A}f - \mathcal{A}g)(x^*)\end{aligned}$$

dla pewnego $x^* \in E(f-g)$. Tak więc możemy założyć, że $f(x) \geqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in \overline{\Omega}$ (w przeciwnym przypadku zamieniamy f i g rolami). To spostrzeżenie oraz założona w treści wniosku własność kończą dowód. $\square$

5. Pewien bardzo pożyteczny przykład. W rozdziale tym zaprezentujemy zastosowanie metody Minty'ego-Browdera w przestrzeni $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Przykład ten pochodzi z pracy [7]. Zajmijmy się następującym problemem. Szukamy funkcji $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ spełniającej równanie

$$\text{(Q)} \qquad \begin{cases} F(D^2 u(x)) = f(x) & \text{dla } x \in \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

gdzie $f \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ jest daną funkcją oraz $F : \mathbb{R}^{n^2}_{sym} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i antymonotoniczną, to znaczy, że dla dowolnych $X, Y \in \mathbb{R}^{n^2}_{sym}$, $X - Y \geqslant 0 \Rightarrow F(X) - F(Y) \leqslant 0$. Zdefiniujmy operator $\mathcal{A}$ w przestrzeni $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ związany z problemem (Q):

$$\mathcal{A}u = F(D^2 u) \quad \text{dla } u \in D(\mathcal{A}) = \{v \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega}) : v_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

Lemat. *Operator $\mathcal{A}$ jest operatorem akretywnym w przestrzeni $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$.*

Dowód. Niech $u, v \in D(\mathcal{A})$ będą różnymi funkcjami i $u(x) \geqslant v(x)$ dla każdego $x \in \overline{\Omega}$. Ponadto niech $x_0 \in \Omega$ będzie takim punktem, że $u(x_0) - v(x_0) = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x) - v(x)|$. Wówczas zachodzi $D^2(u-v)(x_0) \leqslant 0$, co oznacza, że $F(D^2 u(x_0)) - F(D^2 v(x_0)) \geqslant 0$. Wniosek z rozdziału poprzedniego kończy dowód lematu. $\square$

Załóżmy teraz, że ciąg $\{u^k\} \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ jest ciągiem rozwiązań przybliżonych problemu (Q) w następującym sensie: u^k jest rozwiązaniem problemu

$$(\mathrm{Q}_k) \qquad \begin{cases} F(D^2u^k(x)) = f^k(x) & \text{dla } x \in \Omega, \\ u^k_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

i ponadto zachodzi, że $u^k \to u$ w przestrzeni $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, $f^k \to f$ w $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ oraz $D^2u^k \overset{*}{\rightarrow} D^2u$ w przestrzeni $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$. Aby wykazać, że funkcja graniczna u jest rozwiązaniem problemu (Q) udowodnimy, że

$$F(D^2u(x)) = f(x) \quad \text{dla prawie wszystkich } x \in \Omega. \tag{5.1}$$

Z akretywności operatora $\mathcal{A}$ i z definicji ciągu $\{u^k\}$ otrzymujemy

$$\forall_{v\in D(\mathcal{A})}\ [u^k - v, f^k - \mathcal{A}v]_+ \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Przechodząc w nierówności (5.2) do granicy górnej i korzystając z faktu 2 dostajemy

$$[u - v, f - \mathcal{A}v]_+ \geqslant 0. \tag{5.3}$$

Z nałożonych na ciąg $\{u^k\}$ założeń wynika, że $u \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$. Stąd, stosując Twierdzenie Rademachera, otrzymujemy istnienie w sensie klasycznym $D^2u(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$. Niech x_0 będzie takim punktem. Pokażemy, że (5.1) zachodzi w punkcie x_0. Wybierzmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ oraz funkcję $v \in D(\mathcal{A})$ spełniającą następujące warunki

$$v(x) = v(x_0)+Du(x_0)(x-x_0)+\tfrac{1}{2}D^2u(x_0)(x-x_0)(x-x_0)+\varepsilon|x-x_0|^2 \tag{5.4}$$

w otoczeniu punktu x_0, oraz

$$u(x_0) - v(x_0) = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x) - v(x)|. \tag{5.5}$$

(Istnienie funkcji $v \in D(\mathcal{A})$ posiadającej powyższe własności jest udowodnione w dodatku). Z (5.5) wynika, że

$$[u - v, f - \mathcal{A}v]_+ = f(x_0) - \mathcal{A}v(x_0). \tag{5.6}$$

Wstawiając (5.6) do (5.3) otrzymujemy

$$f(x_0) \geqslant \mathcal{A}v(x_0) = F(D^2v(x_0)) = F(D^2u(x_0) + 2\varepsilon I) \to F(D^2u(x_0)) \tag{5.7}$$

przy $\varepsilon \to 0^+$. Nierówność odwrotną dostajemy podobnie wybierając v tak, aby

$$u(x_0) - v(x_0) = -\sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x) - v(x)|.$$

6. Podsumowanie. Przykład L. C. Evansa, zaprezentowany w poprzednim rozdziale, posłużył M. G. Crandallowi i P. L. Lionsowi do wprowadzenia pojęcia rozwiązań lepkościowych. Mianowicie, jeżeli w przykładzie tym zrezygnujemy z założenia istnienia drugiej pochodnej D^2u i zadowolimy się tylko wykazaniem nierówności

$$f(x) \geqslant F(D^2v(x))$$

dla specjalnie wybranych funkcji próbnych v, to otrzymujemy dowód istnienia rozwiązań lepkościowych problemu (Q).

Teoria rozwiązań lepkościowych dla równania Hamiltona–Jacobiego, zainicjowana pracą [5], została uzupełniona artykułem [6]. Jednakże definicję rozwiązań lepkościowych, podobną do zaprezentowanej w tym wykładzie, znajdujemy po raz pierwszy w pracy [3]. Czytelników zainteresowanych teorią rozwiązań lepkościowych odsyłamy do prac [9], [4], [10] oraz zainteresowanych metodami słabej zbieżności do książki [8], która zainspirowała autora do napisania tego wykładu.

Dodatek.

PEWIEN TECHNICZNY LEMAT. *Załóżmy, że funkcja* $u \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *jest funkcją zdefiniowaną w rozdziale poprzednim oraz punkt* $x_0 \in \Omega$ *jest tak wybrany, że* $D^2u(x_0)$ *istnieje w sensie klasycznym. Wówczas istnieje funkcja* $v \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *posiadająca własności* (5.4) *i* (5.5) *i znikająca na brzegu obszaru* Ω.

D o w ó d. Weźmy najpierw funkcję

$$\overline{v}(x) = u(x_0) + Du(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}D^2u(x_0)(x - x_0)(x - x_0) + \varepsilon|x - x_0|^2$$

i będziemy ją modyfikować, tak aby spełniony był warunek (5.5) oraz aby v znikała na $\partial\Omega$. Oczywiście punkt x_0 jest lokalnym, ścisłym maximum różnicy $u - \overline{v}$. Wybierzmy $R > 0$ tak aby dla wszystkich $x \in B(x_0, R) \subset \Omega$ zachodziło $u(x) - \overline{v}(x) < u(x_0) - \overline{v}(x_0)$. Ponadto oznaczmy przez $l = \sup_{x \in B(x_0,R)} |u(x) - \overline{v}(x)|$. Niech $z \in \mathbb{C}_0^\infty(B(x_0, R/2))$ będzie funkcją posiadającą następujące własności: $0 \leqslant z \leqslant 2l$, $z(x_0) = 2l$ oraz $D^2z(x_0) = 0$. Oznaczmy przez v^* różnicę $\overline{v} - z$. Wówczas funkcja $u - v^*$ posiada w punkcie x_0 lokalne, ścisłe maximum oraz $u(x_0) - v^*(x_0) = 2l > 0$. Niech teraz $\phi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją posiadającą nośnik zawarty w zbiorze $\overline{\Omega}$ i przybliżającą u w następujący sposób $\|u - \phi\| < l$. W końcu definiujemy funkcję v wzorem

$$v(x) = v^*(x)\chi(x) + (1 - \chi(x))\phi(x),$$

gdzie $\chi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz spełnia $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi_{|B(x_0,R/2)} \equiv 1$ i $\chi_{|\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,R)} \equiv 0$. Łatwo sprawdzić, że

$$u(x_0) - v(x_0) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x) - v(x)| = 2l \quad \text{oraz, że} \quad v_{|\partial\Omega} = 0. \qquad \square$$

Cytowana literatura

[1] V. B a r b u, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Editura Academiei, Bucharest – Noordhoff, Leyden, 1976.

[2] F. B r o w d e r, *Non-linear elliptic boundary value problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 862–874.

[3] M. Crandal, L. Evans, P. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 487–502.

[4] M. Crandal, H. Ishii, P. Lions, *Users guide to viscosity solutions of second order PDE*, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 1–67.

[5] M. Crandal, P. Lions, *Condition d'unicité pour les solutions generalisées des équations de Hamilton–Jacobi du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. 292 (1981), 183–186.

[6] M. Crandal, P. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations* Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 1–42.

[7] L. C. Evans, *On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods*, Israel J. Math. 36 (1980), 225–247.

[8] L. C. Evans, *Weak convergence methods for partial differential equations*, volume 74 of *Conference Board of the Math. Sci.*, AMS, Providence, Rhode Island, 1990.

[9] R. Jensen, *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial diffrential equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 101 (1988), 1–27.

[10] R. Jensen, *Viscosity solutions of elliptic partial diffrential equations*, Doc. Math. J. DMV, ICM 1998 – III (1998), 1–27.

[11] T. Kato, *Nonlinear semigroups and evolutions equations*, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 508–520.

[12] G. Minty, *Monotone* (*non-linear*) *operators in Hilbert space*, Duke Math. J. 29 (1962), 341–346.

[13] K. Sato, *On the generators of non-negative contraction semigroups in Banach lattices*, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 423–436.