ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVIII (2002)

Henryk Żołądek (Warszawa)

Maxim Kontsevich i matematyka współczesna

1. Wstęp. Kiedy H. C. Taubes [Ta] przedstawiał na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Berlinie osiągnięcia M. Kontsevicha (1) (z okazji przyznania mu medalu Fieldsa), wymienił cztery jego wyniki jako główne: dowód pewnej hipotezy E. Wittena [Ko3], wprowadzenie nowych niezmienników w nisko-wymiarowej topologii [Ko5], [Ko6], badania nad enumeratywną geometrią krzywych wymiernych [Ko7], [KM1] i znalezienie uniwersalnego wzoru na kwantowanie [Ko12]. Na samym początku zaznaczył także, że wpływ Kontsevicha na dalszy rozwój tych dyscyplin był przeogromny. Podobnie Ju. I. Manin [LLMM] wymienia powyższe wyniki jako główne w jego dorobku.

Należałoby dodać, że Kontsevich nie stronił od zajmowania się różnymi odległymi dziedzinami matematyki: algebrami Liego [KiKo], teorią prawdopodobieństwa [KKR], układami dynamicznymi [Ko10], [KoSu], teorią operatorów eliptycznych [KoVi], geometrią nieprzemienną [KoRo], operadami [KoSo] i funkcjami zeta [KoZa]. Przy tym lista jego publikacji nie jest bynajmniej długa (w spisie literatury umieściłem wszystkie prace, do których udało mi się dotrzeć). Niektórych wyników i idei nie publikował, ale stanowiły one inspirację dla innych. Chodzi tu o takie sprawy jak: teoria motywicznego całkowania (rozwinięta potem przez J. Denefa i F. Loesera, patrz [Lo]) czy użycie pojęcia algebraicznego orbifoldu do dowodu hipotezy Arnolda z geometrii symplektycznej (wykorzystane przez K. Fukayę i K. Ono [FuOn]).

Jest to kolejny artykuł w Wiadomościach Matematycznych omawiający dokonania medalistów Fieldsa. Poprzednie, o pracach R. E. Borcherdsa i C. McMullena, ukazały się w tomie XXXV. Zabiegi Redakcji o znalezienie autora artykułu przedstawiającego wyniki W. T. Gowersa zakończyły się niepowodzeniem. (Przypis Redakcji)

Praca napisana w ramach tematu KBN nr 2 P03A 010 22.

(1) Józef Przytycki opowiadał, że Kontsevich w rozmowie z nim przyznał, że jego dawni przodkowie (początki XIX wieku) byli Polakami. Teoretycznie mógłbym zatem używać polskiej pisowni jego nazwiska, Koncewicz. Nie robię tego z dosyć oczywistych powodów.

Wyniki Kontsevicha można podzielić na klasyczne i nowoczesne. Chciałoby się powiedzieć, że te pierwsze należą do nurtu XX-wiecznego (i są przystępne dla zwykłego matematyka), zaś te drugie wybiegają już w wiek XXI (i wymagają dużego wysiłku, aby je chociaż częściowo przyswoić).

Opowiem o głównych wynikach Kontsevicha z obu grup. Moim celem będzie wprowadzenie czytelnika w możliwie przystępny sposób do zagadnień, którymi się zajmował. Dlatego też więcej będzie o matematyce i fizyce niż o samym Kontsevichu.

2. Układy dynamiczne

2.1. *Wykładniki Lapunowa i teoria Hodge'a.* M. Kontsevich wspólnie z A. Zorichem [Ko10] badali quasi-okresowe układy dynamiczne i odkryli (oraz wyjaśnili) ciekawe asymptotyczne zależności. Rzecz dotyczy portretu fazowego pola wektorowego ξ na powierzchni Σ (rzeczywistej i genusu $g \geqslant 1$) zachowującego formę powierzchni ω, tzn. $Lie_\xi \omega = 0$. Tutaj $i_\xi \omega = \alpha$, gdzie $d\alpha = 0$, czyli można zapisać $\alpha = dH$, gdzie H jest niejednoznaczną „funkcją Hamiltona" dla pola ξ.

W typowej sytuacji powierzchnia Σ rozbija się na składowe wypełnione okresowymi trajektoriami i na minimalne składowe z gęstymi trajektoriami. Przy pomocy cięcia I (tj. odcinka w Σ) transwersalnego do pola ξ i przekształcenia powrotu dostaje się tzw. *przekształcenie przekładania odcinków* $T : I \to I$. To oznacza, że po utożsamieniu I z $[0, a] \subset \mathbb{R}$ istnieje rozbicie $[0, a]$ na pododcinki $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{k-1}, a_k)$ takie, że $T|_{(a_i, a_{i+1})}(x) = x + b_i$ i obrazy $T(a_i, a_{i+1})$ są rozłączne. Te nowe odcinki (i stałe b_i) są zdefiniowane za pomocą pewnej permutacji $\sigma \in S(k)$. Jeśli permutacja jest „nieredukowalna", to przekształcenie T jest ergodyczne względem miary Lebesgue'a dx.

Z ergodyczności wynika, że $\sharp\{i : 1 \leqslant i \leqslant N,\ T^i(x) \in (y_1, y_2)\} = (y_2 - y_1)N + o(N)$ przy $N \to \infty$. Okazuje się, że następny wyraz asymptotyki tego wyrażenia ma postać

$$\sim const \cdot N^\lambda.$$

Obliczenia pokazały, że $\lambda = 0$ dla $k = 2, 3$ (co odpowiada genusowi $g = 1$), $\lambda \approx 0{,}333\ldots$ dla $k = 4$ i $\lambda \approx 0{,}500\ldots$ dla $k = 5$ (tutaj $g = 2$), zaś dla $k = 6$ (czyli $g = 3$), zależnie od permutacji, $\lambda \approx 0{,}6156\ldots$ lub $\lambda \approx 0{,}7137\ldots$ Co więcej, w przestrzeni $H_1(\Sigma, \mathbb{R})$ (1-wymiarowych homologii) istnieje filtracja typu Lapunowa

$$H_1(\Sigma, \mathbb{R}) \supset F^{\lambda_g} \supset \ldots \supset F^{\lambda_1} \supset 0, \qquad \dim F^{\lambda_j} = j,$$

związana z powyższymi wykładnikami. Ta filtracja jest zdefiniowana przez zachowanie się kawałków trajektorii $x(t)$ o długościach $l_j \to \infty$, które są bliskie krzywym zamkniętym. Po domknięciu (krótkim odcinkiem) otrzymuje się cykle $v_j \in H_1(\Sigma, \mathbb{R})$, które mają postać $v_j = l_j^{\lambda_i} \cdot u$, gdzie $u \in F^{\lambda_i} \setminus F^{\lambda_{i-1}}$. W powyższych przykładach $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = \lambda$.

Rachunki komputerowe pokazały także, że

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_g \in \mathbb{Q},$$

np. dla $g = 3$ zachodzi $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{53}{28}$ z dużą dokładnością.

Wyjaśnienie powyższych zjawisk leży w rozważeniu tzw. *potoku renormalizacji* na pewnej przestrzeni moduli $\mathcal{M}_d$ definiowanej następująco. Do formy $\alpha = i_\xi \omega$ na powierzchni dobiera się drugą formę α' taką, że $\alpha \wedge \alpha' > 0$ poza skończoną liczbą punktów $p_1, \ldots, p_n$. W ten sposób dostaje się strukturę zespoloną na $\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ taką, że $dz = \alpha_{\mathbb{C}} = \alpha + i\alpha'$ i płaską metrykę $(\operatorname{Re} \alpha_{\mathbb{C}})^2 + (\operatorname{Im} \alpha_{\mathbb{C}})^2$. Tutaj $\alpha_{\mathbb{C}}$ ma zera rzędu d_i w p_i i $d = (d_1, \ldots, d_n)$. $\mathcal{M}_d$ jest przestrzenią moduli trójek $(C, \{p_1, \ldots, p_n\}, \alpha_{\mathbb{C}})$ (gdzie C jest krzywą zespoloną homeomorficzną z Σ) względem działania grupy dyfeomorfizmów.

Na $\mathcal{M}_d$ jest określona funkcja $A = \frac{i}{2} \int_C \alpha_{\mathbb{C}} \wedge \overline{\alpha}_{\mathbb{C}}$, pewna miara μ i potok $T_t : (\operatorname{Re} \alpha_{\mathbb{C}}, \operatorname{Im} \alpha_{\mathbb{C}}) \to (e^t \operatorname{Re} \alpha_{\mathbb{C}}, e^{-t} \operatorname{Im} \alpha_{\mathbb{C}})$. Ten potok zachowuje funkcję A, miarę μ i jest ergodyczny na powierzchni $A^{-1}(1)$. Wykładniki λ_i (zdefiniowane powyżej) są wykładnikami Lapunowa potoku T_t.

W [Ko10] obliczono $\lambda_1 + \ldots + \lambda_g$ w terminach pewnych klas charakterystycznych (form różniczkowych, których nie chcę bliżej definiować):

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_g = \frac{\int \beta \wedge \gamma_2}{\int \beta \wedge \gamma_1},$$

gdzie całkowanie odbywa się po przestrzeni ilorazowej $A^{-1}(1)/SO(2, \mathbb{R})$ względem działania obrotów w $\mathbb{R}^2 = \{(\operatorname{Re} \alpha_{\mathbb{C}}, \operatorname{Im} \alpha_{\mathbb{C}})\}$. Stąd dostaje się, że $\lambda_1 + \ldots + \lambda_g$ jest liczbą wymierną.

2.2. *Wielowymiarowe ułamki łańcuchowe.* Każdy wie, co to jest ułamek łańcuchowy liczby $y \in (0, 1)$:

$$y = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}},$$

w skrócie $y = [a_0, a_1, \ldots]$. Wiadomo także, że to rozwinięcie jest związane z przekształceniem Gaussa $y \to \left\{\frac{1}{y}\right\}$ $\left(\text{część ułamkowa } \frac{1}{y}\right)$, które posiada niezmienniczą miarę $\frac{dy}{\ln 2(1+y)}$.

W [Ar1] jest opisana geometryczna interpretacja skończonych reduktów $1/(a_0 + 1/(a_1 + \ldots + 1/a_n) \ldots) = p_n/q_n$. Nabijamy gwoździe w punktach

$(\mathbb{Z}_+)^2$, rozciągamy nieskończoną prostą nić o równaniu $Y = yX$, zaczepioną w nieskończoności $(+\infty, y\cdot\infty)$, a następnie pociągamy drugi koniec nici w górę i w dół. Utworzą się dwie łamane o wierzchołkach typu (p_n, q_n).

Zmodyfikujemy tę konstrukcję, z myślą o uogólnieniu jej na przypadek wielowymiarowy. Rozważmy 2-wymiarowe przekształcenie Gaussa $(x_1, x_2) \to (x_1', x_2') = \left(\left\{\frac{1}{x_1}\right\}, \frac{1}{[1/x_1]+x_2}\right)$ z miarą niezmienniczą $dx_1dx_2/(\ln 2(1+x_1x_2)^2)$; tutaj jeśli $x_1 = [a_0, a_1, \ldots]$ i $x_2 = [a_{-1}, a_{-2}, \ldots]$, to $x_1' = [a_1, a_2, \ldots]$ i $x_2' = [a_0, a_{-1}, \ldots]$. Niech $x = [a_0, a_{-1}, a_1, a_{-2}, \ldots]$. Weźmy stożek w $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ (gdzie w punktach $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}$ są ponabijane gwoździe) rozpięty przez półproste $X_2 = \frac{1}{x}X_1$ i $X_2 = -xX_1$, $X_1 \geqslant 0$ (tworzące jedną nieskończoną nić). Naciągając tę nić dostajemy łamaną $\mathcal{V}$, nazywaną *woalką*, której wierzchołki odpowiadają reduktom ułamka łańcuchowego dla x.

Z 2-wymiarowym przekształceniem Gaussa wiąże się pewien *potok zawieszenia.* Przestrzenią fazową potoku jest 3-wymiarowa przestrzeń jednorodna $SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z})$, a potok jest indukowany przez działanie macierzy diagonalnych $\operatorname{diag}(e^t, e^{-t})$. Rzecz w tym, że punkty-wektory wierzchołkowe $f_j = (p_j, q_j) \in \mathcal{V}$ są takie, że $\det(f_j, f_{j+1}) = 1$ dla krawędzi $[f_j, f_{j+1}] \subset \mathcal{V}$. Potok zawieszenia zachowuje miarę Haara ν.

Wielowymiarowe uogólnienie powyższej konstrukcji polega na rozważeniu ogólnej hiperpowierzchni w $\mathbb{R}^n$ (np. wielościennego stożka lub paraboloidy) i skonstruowaniu woalki $\mathcal{V}$, czyli brzegu otoczki wypukłej zbioru punktów kratowych wewnątrz obszaru ograniczonego przez hiperpowierzchnię. Ta otoczka wypukła nazywa się *wielościanem Kleina.* Tutaj przekształcenie Gaussa działa na zbiorze $(n-1)$-wymiarowych ścian woalki $\mathcal{V}$. Dokładniej, nie mamy tu jednego przekształcenia: z każdą $(n-2)$-wymiarową krawędzią danej ściany jest związane przekształcenie polegające na obróceniu ściany wokół tej krawędzi do sąsiedniej ściany. Jest to realizowane za pomocą „przekształcenia powrotu” dla działania grupy macierzy diagonalnych $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1\ldots\lambda_n = 1$ na przestrzeni jednorodnej $SL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{Z})$ z niezmienniczą miarą Haara ν.

Okazuje się, że statystyczne (tj. ergodyczne) własności wielowymiarowych ułamków łańcuchowych są bardzo ciekawe. Na przykład, w [KoSu] M. Kontsevich i Ju. Sukhov pokazali, że dla woalki związanej z wielościennym stożkiem średnia liczba punktów kratowych w ścianie woalki jest równa ∞. Ale dla woalki związanej z paraboloidą ta liczba jest skończona.

3. Kwantowa grawitacja, przestrzenie moduli krzywych i hierarchia KdV

3.1. *Fizycy i matematycy.* Dziwne rzeczy dzieją się ostatnio w państwie zwanym matematyką. Zaczęli się u nas panoszyć fizycy. Wprawdzie zawsze fizycy usiłowali rozwiązywać matematyczne zadania (mniej lub bardziej udolnie). Przy tym nie ośmielali się wychodzić poza ustalone rygory matematycznej ścisłości. Niestety, ostatnio zaczęli stosować metody absolutnie niedopuszczalne. Dodają i odejmują nieskończoności na swój sposób, swobodnie używają tzw. całek Feynmana po trajektoriach (na które szanujący się analityk wzruszyłby ramionami) oraz liczą wyznaczniki operatorów typu $-\varDelta$, które są wyrażeniami typu $0 \cdot \infty$. I, o dziwo, wysuwają się na czoło w takich dziedzinach jak geometria rozmaitości czy teoria prawdopodobieństwa. Chodzi o to, że zastosowali aparat kwantowej teorii pola (przeznaczony w istocie do opisu oddziaływań elektronów lub kwarków) do zagadnień czysto matematycznych i wykonując pewne uproszczone (ale na pewno nie proste) obliczenia doszli do wyników, o których matematykom się nie śniło i które okazują się prawdziwe.

Na przykład, posługując się formalizmem konforemnej teorii pola B. Duplantier i K.-H. Kwon [DuKw] obliczyli, że wymiar Hausdorffa brzegu otoczki trajektorii ruchu Browna na płaszczyźnie (tj. obszaru wewnątrz trajektorii) wynosi 4/3. Dopiero niedawno G. F. Lawler, O. Schramm i W. Werner podali ścisły dowód tego twierdzenia w trudnej pracy [LSW].

Dalsze części tego rozdziału są poświęcone innemu przykładowi z tej samej działki. Opowiemy o pewnej hipotezie E. Wittena [Wi2] (udowodnionej przez Kontsevicha [Ko2], [Ko3]), która wiąże trzy pozornie nie powiązane zagadnienia: macierzowy model teorii grawitacji, wiązki liniowe nad przestrzenią moduli powierzchni Riemanna i teorię układów całkowalnych ([2]).

3.2. *Macierzowy model 2-wymiarowej teorii grawitacji.* Punktem wyjścia tego modelu jest następująca własność Gaussowskich zmiennych losowych (nazywana czasami *lematem Wicka*): jeśli $\mathbb{E}\xi_i = \langle \xi_i \rangle = 0$, to

$$\langle \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{2n} \rangle = \sum \prod_{k=1}^{n} \langle \xi_{i_k} \xi_{j_k} \rangle,$$

gdzie sumuje się po rozbiciach zbioru $\{1, \ldots, 2n\}$ na rozłączne pary $\{i_1, j_1\}$, $\ldots, \{i_n, j_n\}$. My będziemy stosować tę własność w przypadku, gdy zmienne losowe ξ_i są wyrazami macierzowymi X_{ij} Hermitowskich macierzy losowych X wymiaru $N \times N$ z rozkładem prawdopodobieństwa zadanym przez $d\mu_\varLambda = const \cdot e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} X^2 \varLambda} dX$, gdzie $\varLambda$ jest ustaloną dodatnio określoną macierzą Hermitowską. Załóżmy, że $\varLambda = \operatorname{diag}(\varLambda_1, \ldots, \varLambda_N)$. Wtedy lemat Wicka prowadzi do następujących przykładowych relacji (patrz [BIZ]):

([2]) Jan Wehr był w Princeton w czasie, kiedy Witten postawił tę hipotezę. Opowiadał mi, że następnego dnia z miejscowej biblioteki zniknęły wszystkie książki o układach całkowalnych.

$$\langle X_{ij}\overline{X}_{kl}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}\frac{2}{\Lambda_i+\Lambda_j},$$

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{tr} X^3\cdot\operatorname{tr} X^3\rangle &= \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{N}\langle X_{ij}X_{jk}X_{ki}\cdot X_{lm}X_{mn}X_{nl}\rangle \\ &= \sum_{ijklm}\{\langle X_{ij}\overline{X}_{kj}\rangle\langle X_{ki}\overline{X}_{ml}\rangle\langle X_{mn}\overline{X}_{ln}\rangle \\ &\quad + \langle X_{ij}\overline{X}_{nm}\rangle\langle X_{jk}\overline{X}_{ln}\rangle\langle X_{ki}\overline{X}_{ml}\rangle + \text{inne wyrazy}\}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Wyrazy po prawej stronie ostatniego wzoru można zakodować przy pomocy tzw. *taśmowych grafów* o dwu wierzchołkach. Z każdego wierzchołka wychodzą trzy pogrubione krawędzie (rys. 1(a)),których drugie końce dochodzą do tego samego lub do innego wierzchołka. Taka pogrubiona krawędź odpowiada korelacji $\langle X_{ij}\overline{X}_{ij}\rangle$ i ma zorientowane brzegi (w przeciwnych kierunkach, parz rys. 1(b)). Graf typu (c) z rys. 1 odpowiada pierwszemu członowi w sumie (3.1), a typu (d) – drugiemu. Sumowanie ogranicza się do sumowania po tylu indeksach, ile jest pętli na brzegu powierzchni grafu. Powierzchnie taśmowych grafów można traktować z topologicznego punktu widzenia jako nakłute powierzchnie. W przypadku (c) z rys. 1 mamy sferę z trzema nakłuciami, a w przypadku (d) dostaje się torus z jednym nakłuciem.

Macierzowy model teorii grawitacji polega na wprowadzeniu Gibbsowskiego rozkładu prawdopodobieństwa w przestrzeni macierzy Hermitowskich typu: $const\cdot e^{-\kappa\cdot\operatorname{tr}V(X)}d\mu_\Lambda(X)$, gdzie $V(x)$ jest wielomianem ograniczonym z dołu (np. $V=x^4$). Wtedy rozwinięcia różnych średnich względem potęg κ prowadzą do sumowania po taśmowych grafach. W ten sposób dostaje się rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni możliwych powierzchni oraz metryk na tych powierzchniach (pomijam szczegóły w tym opisie).

Witten zaproponował nierzeczywisty potencjał w postaci $V(x)=\frac{\sqrt{-1}}{6}x^3$ i zdefiniował *energię swobodną*

$$E=\log\int e^{(i/6)\operatorname{tr}X^3}\,d\mu_\Lambda(X); \tag{3.2}$$

dzięki urojonemu potencjałowi całka w (3.2) jest skończona. Energia swobodna zależy od następujących wielkości przy $\Lambda\to\infty$

$$t_j=-(2j-1)!!\cdot\operatorname{tr}\Lambda^{-2j-1},\qquad j=0,1,\ldots,$$

$E=E(t_0,t_1,\ldots)$. Dla ustalonego j zależność E od $t_0,\ldots,t_j$ stabilizuje się dla dużych N.

3.3. *Przestrzeń moduli.* Niech C będzie gładką zorientowaną powierzchnią: zwartą, typu $(g,0)$ (gdzie g jest genusem), lub niezwartą, typu (g,n)

(gdzie n jest liczbą nakłuć, czyli punktów wyróżnionych). Z definicji *przestrzeń Teichmüllera* $\mathcal{T}_{g,n}$ jest to przestrzeń metryk na C z dokładnością do konforemnej równoważności i izotopii. Przypomnijmy, że dwie metryki γ i γ' są konforemnie równoważne, jeśli $\gamma' = f\gamma$ dla pewnej funkcji f (tzn. jeśli kąty mierzone w obu metrykach są takie same). Metryki γ, γ' są izotopijnie równoważne, jeśli istnieje dyfeomorfizm $\varphi : C \to C$ izotopijny z identycznością i przeprowadzający jedną metrykę na drugą, $\gamma = \varphi^*\gamma$. Dzięki badaniom O. Teichmüllera, L. V. Ahlforsa i L. Bersa wiadomo, że $\mathcal{T}_{g,n}$ jest rozmaitością zespoloną wymiaru $3g - 3 + n$ (o ile $3g - 3 + n > 0$); dokładniej, jest kulą w $\mathbb{C}^{3g-3+n}$.

Przestrzenią moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ krzywych typu (g, n) jest przestrzeń konforemnych klas metryk z dokładnością do dyfeomorfizmów (niekoniecznie izotopijnych z identycznością). Ponieważ dla ustalonej metryki jest określony obrót o kąt $\pi/2$ w przestrzeniach stycznych T_xC, to przestrzeń $\mathcal{M}_{g,n}$ można utożsamić z przestrzenią struktur zespolonych na krzywej C. Zatem $\mathcal{M}_{g,n}$ jest przestrzenią ilorazową przestrzeni Teichmüllera względem dyskretnej grupy składowych spójnych grupy dyfeomorfizmów powierzchni, $\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n}/\pi_0(\mathrm{Diff}(C))$. $\mathcal{M}_{g,n}$ nie jest zwarta (podobnie jak $\mathcal{T}_{g,n}$) i nie jest (na ogół) gładką rozmaitością. Jest to tzw. *orbifold*, czyli przestrzeń, której każdy punkt ma otoczenie postaci $\mathbb{C}^N/$(skończona grupa). P. Deligne i D. Mumford zdefiniowali uzwarcenie $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (*uzwarcenie Deligne'a–Mumforda*) przestrzeni moduli takie, że krzywe C z $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \mathcal{M}_{g,n}$ mają osobliwości typu punkt podwójny (lokalnie $xy = 0$ w $\mathbb{C}^2$), oddzielone od nakłuć. Przestrzeń $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ jest tzw. *algebraicznym orbifoldem* i ma dobrze określony cykl fundamentalny $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]$, czyli generator grupy homologii wymiaru $6g - 6 + 2n$. Topologia przestrzeni $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ nie jest do końca zbadana (przynajmniej dla $g > 0$).

Zilustrujemy powyższe pojęcia na przykładzie $g = 1$, $n = 0$, który nie spełnia warunku $3g + n > 3$, ale za to jest łatwy do zilustrowania. Tutaj $\mathcal{T}_{1,0}$ jest utożsamiane z górną półpłaszczyzną zespoloną $\mathbf{H} = \{\mathrm{Im}\,\tau > 0\}$, przestrzeń moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ to $\mathbf{H}/PSL(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ zaś $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \simeq \mathbb{CP}^1$ i jest parametryzowana przez j-niezmiennik krzywej eliptycznej $C \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$.

Witten [Wi2] definiuje następujące wiązki liniowe $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ nad przestrzenią $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$: jeśli $(\overline{C}; x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ jest zwartą krzywą z wyróżnionymi punktami x_i, to włóknem wiązki $\mathcal{L}_i$ nad tym punktem z $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ jest $T^*_{x_i}\overline{C}$ (przestrzeń kostyczna w punkcie x_i). Z każdą wiązką liniową (tzn. z włóknem $\mathbb{C}$) $\mathcal{L}$ nad rozmaitością M jest związana jej (pierwsza) klasa Cherna $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$; (wartość kocyklu $c_1(\mathcal{L})$ na cyklu Σ, reprezentowanym przez powierzchnię w M, jest równa sumie indeksów punktów zerowych ciągłego przekroju ograniczenia wiązki na Σ). Jeśli $d_1 + \ldots + d_n = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n} =$

$3g-3+n$, to można określić liczbę

$$\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle = \int\limits_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \prod c_1(\mathcal{L}_i)^{d_i}.$$

Jeśli z każdą klasą kohomologii związać cykl dualny (za pomocą dualności Poincarégo), to powyższy wzór mówi o liczbach przecięcia cykli dualnych do klas $c_1(\mathcal{L}_i)$.

Połóżmy $\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle = 0$, gdy $g = \frac{1}{3}(\sum d_i - n + 3)$ nie jest liczbą całkowitą nieujemną lub gdy $n = 0$. Witten zaproponował następującą funkcję generującą

$$F(t_0, t_1, \dots) = \Big\langle \exp \sum t_i \tau_i \Big\rangle = \sum_{k_0, k_1, \dots} \langle \tau_0^{k_0} \tau_1^{k_1} \dots \rangle \prod \frac{t_i^{k_i}}{k_i!},$$

gdzie $\langle \tau_0^{k_0} \tau_1^{k_1} \dots \rangle = \langle \tau_0 \dots \tau_0 \tau_1 \dots \tau_1 \dots \rangle$.

3.4. *Hierarchia Kortewega–de Vriesa.* Każdy słyszał o *równaniu Kortewega–de Vriesa* (KdV)

$$u_t = \frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} u_{xxx}$$

i że ma ono rozwiązania w postaci zderzających się solitonów. Ogólne n-solitonowe rozwiązanie wyraża się wzorem

$$u(x,t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det(I + M(x,t)), \tag{3.3}$$

gdzie elementy macierzowe M mają postać $M_{ij} = \frac{\beta_i}{\kappa_i + \kappa_j} e^{-(\kappa_i + \kappa_j)x + 4\kappa_i^3 t/3}$, $\beta_i > 0$, $\kappa_i > 0$, $\kappa_i \neq \kappa_j$ (patrz [ZMNP]). (Szkoda, że ten wzór nie jest rozpowszechniony).

Równanie KdV zawdzięcza swój sukces nie tylko powyższemu rozwiązaniu (bo istnieją inne, wyrażane w funkcjach theta). Okazuje się, że potok (w przestrzeni funkcji $\{u(x)\}$) definiowany przez to równanie jest kompletnie całkowalny. To oznacza, że istnieje nieskończenie wiele równań ewolucyjnych, których potoki komutują z potokiem KdV. Te tzw. *wyższe równania KdV* określa się następująco.

Po pierwsze, równanie KdV jest równoważne następującemu *równaniu L-A pary*

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L],$$

gdzie $L = \partial^2 + u$, $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$ i $A = \partial^3 + \frac{3}{2} u \partial + \frac{3}{4} u_x$. Wyższe KdV są postaci

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A_{2k+1}, L],$$

gdzie A_j są operatorami różniczkowymi uzyskiwanymi przez wzięcie różniczkowej części formalnego pseudo-różniczkowego operatora $L^{j/2} = \partial^j +$

$a_{j-1}\partial^{j-1}+\ldots+a_0+a_{-1}\partial^{-1}+\ldots$, gdzie współczynniki a_j zależą od funkcji u i jej pochodnych po x; mamy $A_j = \partial^j + a_{j-1}\partial^{j-1}+\ldots+a_0$. W szczególności $A = A_3$ i $A_1 = \partial$. Komutatory $[A_{2k+1}, L]$ są operatorami mnożenia przez funkcję zależną od $u, \partial u, \partial^2 u$, etc.

Wygodnie jest wprowadzić zmienne $t_0 = x$, $t_1 = t$ (czas w równaniu KdV) i $t_2, t_3, \ldots$ jako czasy w wyższych KdV. Wtedy potoki KdV zadają działanie grupy $\mathbb{R}^\infty = \{(t_0, t_1, \ldots)\}$ w przestrzeni funkcji na $\mathbb{R}$, przy czym działanie t_0 polega na przesunięciu $u(x) \to u(x+t)$.

Wyższe równania KdV są równaniami zgodności dla następujących zagadnień liniowych

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_j} = A_{2j+1}\varphi, \qquad j = 0, 2, \ldots,$$

gdzie $\varphi = \varphi(t_0, t_1, \ldots)$ jest tzw. *funkcją Bakera*, spełniającą zagadnienie własne

$$L\varphi = k^2\varphi.$$

Dla dużych „pędów” k ma miejsce formalne rozwinięcie $\varphi = \exp(\sum t_j k^{2j+1}) \times (1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \ldots)$. Znalezienie funkcji Bakera jest równoważne znalezieniu funkcji u.

Okazuje się, że z pewnych przyczyn wygodniej jest pracować z tzw. *tau-funkcją* $\tau(t_0, t_1, \ldots)$, która wiąże się z funkcją Bakera za pomocą następującego wzoru (patrz [MDJ])

$$\varphi(t_0, \ldots) = \frac{\tau(t_0 - 1/k, t_1 - 1/3k^3, \ldots)}{\tau(t_0, t_1, \ldots)} e^{\sum t_j k^{2j+1}}. \tag{3.4}$$

Funkcji tau jest wiele, tak jak wiele jest rozwiązań równań hierarchii KdV. W przypadku, gdy τ zależy tylko od $x = t_0$ i $t = t_1$, wyrażenie $u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau$ jest rozwiązaniem równania KdV (porównaj ze wzorem (3.3)). Podobnie jak we wzorze na n-solitonowe rozwiązanie, ogólna tau-funkcja wyraża się w postaci wyznacznika pewnej macierzy, która jest na ogół nieskończenie wymiarowa (patrz [SeWi]). Warto jeszcze zaznaczyć, że tau-funkcja hierarchii KdV jest szczególnym przypadkiem tau-funkcji tzw. hierarchii Kadomtseva–Pietviashvili.

Witten zapostulował, a Kontsevich udowodnił, że funkcje $E(t_0, t_1, \ldots)$ (energia swobodna) i $F(t_0, t_1, \ldots)$ (funkcja tworząca dla przecięć) pokrywają się i tworzą tau-funkcję dla hierarchii KdV.

4. Niezmienniki węzłów i diagramy Feynmana

4.1. *Niezmienniki Vassilieva.* Węzły i ich niezmienniki są bardzo wdzięcznym obiektem, zwłaszcza dla popularyzacji matematyki. Jednakże kompletne opisanie ich struktury matematycznej wydaje się być odległą przyszłością.

Głośno było w swoim czasie o odkryciu przez V. F. R. Jonesa nowego niezmiennika $V(L)$ splotu L (czyli sumy zamkniętych krzywych w S^3). Jest to wielomian, nazywany *wielomianem Jonesa*, od $q^{1/2}$ i $q^{-1/2}$, który przyjmuje wartość 1 na niezawęźlonym okręgu i spełnia tożsamość $qV(L_+) - q^{-1}V(L_-) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(L_0)$. L_+, L_- i L_0 są splotami, które różnią się tylko we wnętrzu małej kuli, przez którą dwie lokalne linie splotów $L_\pm, L_0$ przechodzą na trzy różne sposoby.

Ostatnio znaczną wagę zaczęto przywiązywać do tzw. niezmienników Vassilieva. Jest to umowne określenia na pewną podgrupę grupy

$$H^0(\mathcal{F} - \varSigma),$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest przestrzenią (gładkich) odwzorowań $S^1 \to \mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \text{punkt}$, a $\varSigma$ jest *hiperpowierzchnią wyróżnikową* i składa się z osobliwych odwzorowań (np. z samoprzecięciami). $H^0(\mathcal{F} - \varSigma)$ jest przestrzenią funkcji lokalnie stałych na przestrzeni węzłów $\mathcal{F} - \varSigma$, czyli przestrzenią wszystkich niezmienników. V. Vassiliev stwierdził, że hiperpowierzchnia $\varSigma$ ma dwie strony, dodatnią i ujemną. Zatem dla każdego niezmiennika $I \in H^0(\mathcal{F} - \varSigma)$, czyli funkcji od węzła, można określić jego skok na $\varSigma$, $\triangledown I$. Skok $\triangledown I$ jest także niezmiennikiem i mówi, co się stanie z $I(K)$, gdy dwie linie węzła K skrzyżują się i ponownie rozejdą. (Dokładniej, $\triangledown I$ jest niezmiennikiem w klasie węzłów z jednym skrzyżowaniem). Niezmienniki I, dla których $\triangledown I = 0$, nazywają się *niezmiennikami Vassilieva rzędu* 0 (są to w istocie funkcje stałe na $\mathcal{F}$). Analogicznie mówimy, że I jest *niezmiennikiem Vassilieva rzędu* n, jeśli $\triangledown^{n+1} I = 0$. Niezmienniki Vassilieva rzędu n tworzą przestrzeń liniową V_n. $\bigcup V_n$ to przestrzeń niezmienników Vassilieva. Z nich można tworzyć pewne specjalne niezmienniki, np. wielomian Jonesa.

W [Ko5] pokazano, że przestrzeń ilorazową V_n/V_{n-1} nad ciałem $\mathbb{Q}$ można utożsamić z przestrzenią dualną do przestrzeni $\mathcal{A}_n$, formalnie generowaną przez tzw. *diagramy cięciwowe*, modulo pewne relacje dwóch typów (z których jedne są proste, a drugie, tzw. 4-*członowe relacje*, są dosyć złożone).

Diagram cięciwowy $\Gamma \in \mathcal{A}_n$ to okrąg z układem n cięciw o rozłącznych końcach (patrz rys. 2(a)). Problem obliczenia wymiarów przestrzeni $\mathcal{A}_n$ jest nierozwiązany.

Istotnym nowatorskim wkładem Kontsevicha do tej teorii jest wyrażenie pewnych niezmienników Vassilieva przy pomocy wyrażeń całkowych. Przedstawmy $\mathbb{R}^3$ jako $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(z,t)\}$ i wybierzmy węzeł K tak, aby funkcja $t|_K$ miała Morse'owskie punkty krytyczne z różnymi wartościami krytycznymi. Definiujemy następujący element przestrzeni $\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}$

$$Z_n(K) = \int_{t_1 < \ldots < t_n} \ldots \int \sum_{\{z_j, z_j'\}} \Gamma \times \prod_{j=1}^{n} \frac{d\ln(z_j - dz_j')}{2\pi i} \times (-1)^{\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Tutaj całkowanie odbywa się po układach $t_1, \ldots, t_n$ niekrytycznych wartości $t|_K$. Lokalnie węzeł zadaje się zespoloną funkcją $z_j(t)$ (lub $z_j'(t)$); powyższe sumowanie odbywa się po wyborach par punktów $(z_j(t_k), z_j'(t_k))$ z przekrojów $K \cap \{t = t_k\}$. $\Gamma \in \mathcal{A}_n$ jest odpowiednim diagramem cięciwowym, gdzie K utożsamiamy z okręgiem, a cięciwy łączą punkty z_j i z_j'. ε jest liczbą tych punktów spośród $\{z_1, \ldots, z_n'\}$, w których K schodzi w dół (patrz rys. 2(b)).

Całka w (4.1) okazuje się bezwzględnie zbieżna, lokalnie nie zależy od deformacji K w klasie węzłów Morse'owskich i jest niezmiennikiem rzędu n. Całka w (4.1) jest uogólnieniem całki Gaussa na współczynnik zaczepienia.

Wyrażenie (4.1) zależy od przedstawienia K w postaci Morse'owskiej. Dlatego też wprowadza się nową definicję (wolną od tej niedogodności)

$$\widetilde{Z}(K) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(K) \times Z(K_0)^{-\frac{1}{2}\delta},$$

gdzie δ jest liczbą punktów krytycznych K, K_0 jest wyróżnionym węzłem zadanym przez $z = s$, $t = s^3 - s$, a $Z(K_0) = 1 + Z_1(K) + Z_2(K) + \ldots$ jest formalnym szeregiem (patrz [Ar2], [Ko5], [Ba]).

4.2. *Okresy.* Okazuje się, że powyższe niezmienniki są blisko związane z wartościami zeta funkcji wielu zmiennych, wprowadzonymi przez D. Zagiera [Za],

$$\zeta(a_1,\dots,a_n)=\sum_{0<k_1<\dots<k_n} k_1^{-a_1}\dots k_n^{-a_n}. \tag{4.2}$$

Na przykład, obliczenia (przedstawione w artykule V. I. Arnolda [Ar2]) pokazują, że

$$Z_2(K_0)=\iint\limits_{0\leqslant v\leqslant u\leqslant 1}\frac{du dv}{u(1-v)}=\sum\int\frac{u^k}{k}\,\frac{du}{u}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

W jednej z ostatnich prac [KoZa] Kontsevich z Zagierem rozwijają teorię tzw. *okresów*, czyli całek z form wielomianowych o wymiernych współczynnikach po cyklach zadanych algebraicznymi równaniami o wymiernych współczynnikach. Liczby (4.2) są przykładami okresów.

Prace [Za] i [KoZa] są napisane w sposób emocjonalny. Czyta się je z zapartym tchem.

4.3. *Model Cherna–Simonsa.* M. Atiyah namówił E. Wittena do znalezienia istotnie 3-wymiarowego wyrażenia dla wielomianu Jonesa (patrz [Wi1]). Witten zrealizował to na bazie *funkcjonału Cherna–Simonsa*

$$CS(A)=\frac{i}{4\pi}\int_M \operatorname{tr}(A\wedge dA+A\wedge A\wedge A), \tag{4.3}$$

gdzie A jest koneksją trywialnej wiązki $G\times M$ (G – zwarta klasyczna grupa Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$) nad 3-wymiarową rozmaitością M, $A\in \Gamma(M,\Omega^1_M\otimes\mathfrak{g})$. Witten rozważał wyrażenia (sumy statystyczne i nieznormalizowane średnie)

$$Z_k=\int e^{k\cdot CS(A)}\mathcal{D}A,\qquad \int e^{k\cdot CS(A)}\operatorname{tr}(e^{\int_K A})\mathcal{D}A,$$

gdzie wyrażenie $\mathcal{D}A$ oznacza funkcjonalną całkę Feynmana po wszystkich koneksjach (z której określeniem są zwykle kłopoty), a $e^{\int_K A}$ oznacza tzw. *krzywą Wilsona*, czyli operator monodromii koneksji wzdłuż węzła K (chronologiczną eksponentę). Odsyłamy czytelnika do książki [At] po więcej szczegółów.

Kontsevich [Ko6] rozważał rozwinięcie asymptotyczne Z_k dla dużych k. To rozwinięcie jest skończoną sumą wyrażeń typu

$$\alpha k^\beta e^{k\gamma}\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{k^n}\right),$$

gdzie współczynniki α,β,γ są pewnymi stałymi (zidentyfikowanymi przez Wittena), a współczynniki a_n są niezmiennikami rozmaitości. Udowodnił następujący wzór

$$a_n = \frac{\delta^n}{(2n)!(3n)!} \sum_{\Gamma} \int \dots \int \operatorname{tr} \prod_{\text{krawędzie}} \omega(x_{l_i}, x_{r_i}). \tag{4.4}$$

Tutaj sumowanie odbywa się po spójnych grafach Γ z $2n$ wierzchołkami $\{1, \dots, 2n\}$ (z których wychodzą po trzy krawędzie) i $3n$ krawędziami (l_i, r_i), $l_i, r_i \in \{1, \dots, 2n\}$, $l_i \neq r_i$. δ jest stałą, a $\omega(x, y)$ jest pewną 2-formą (*formą Greena*) na $M \times M$ o wartościach w $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ z osobliwością na diagonali. tr jest iloczynem pewnych „śladów” (każdy na $\mathfrak{g}^{\otimes 3}$) po $2n$ wierzchołkach Γ. Całki w (4.3) biegną po $(x_1, \dots, x_{2n}) \in M^n$, $x_i \neq x_j$ (w skrócie, po $M^{2n} \setminus \operatorname{diag}$).

Wyrażenie dla a_n jest typowym przykładem rozwinięcia całek funkcjonalnych za pomocą diagramów Feynmana (porównaj go ze wzorem (3.1)). Okazuje się, że całki w (4.3) są zbieżne, a samo wyrażenie dosyć słabo zależy od wyboru formy Greena ω.

Do dowodu tych (bardzo ważnych) własności Kontsevich używa wzoru Stokesa i konstruuje specjalny kompleks łańcuchowy generowany przez grafy, w którym różniczka jest indukowana przez ściągnięcie krawędzi do punktu (tzw. *kohomologie grafowe*).

5. Krzywe wymierne i teoria strun

5.1. *Krzywe wymierne w* $\mathbb{CP}^2$. Przypomnijmy, że algebraiczną krzywą C nazywamy *wymierną*, jeśli jest ona obrazem prostej rzutowej $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$. Krzywe wymierne są ważne przy całkowaniu. Na przykład, całka $\int x^{10} \times \sqrt{1 - x + x^2}/(x + 1)$ jest do obliczenia, ale całka $\int x\sqrt{x^4 + x + 1}$ już nie. Przyczyna leży w tym, że krzywa $y^2 = 1 - x + x^2$ jest wymierna, a krzywa $y^3 = x^4 + x + 1$ już nie.

Krzywe wymierne stopnia 1 w $\mathbb{CP}^2$ są prostymi, krzywe wymierne stopnia 2 to stożkowe. Aby krzywa stopnia 3 była wymierna, musi mieć punkt samoprzecięcia (tj. podwójny) lub cusp. Ogólna sytuacja jest taka: gładka krzywa stopnia d ma genus $g = \frac{1}{2}(d^2 - 3d + 2)$ i zależy od $(1 + 2 + \ldots + (d + 1)) - 1 = \frac{1}{2}(d^2 + 3d)$ parametrów. Każdy punkt podwójny zmniejsza ten genus o 1. Ponieważ warunek na punkt podwójny oznacza zerowanie się którejś wartości krytycznej wielomianu zadającego C, to ogólna krzywa wymierna stopnia d zależy od $3d - 1$ parametrów. Zatem jeśli zażądamy dodatkowo, aby C przechodziła przez $3d - 1$ punktów w położeniu ogólnym, to takich krzywych będzie skończenie wiele, $N(d)$.

Istotnie, przez $3 \cdot 1 - 1 = 2$ punkty przechodzi $N(1) = 1$ prosta, a przez $3 \cdot 2 - 1$ punktów przechodzi $N(2) = 1$ stożkowa. Ciekawe jak czytelnik by dowodził, że przez 8 typowych punktów przechodzi $N(3) = 12$ wymiernych kubik. Przed Kontsevichem wiadomo było jeszcze, że przez 11 punktów przechodzi 620 wymiernych kwartyk.

Kontsevich udowodnił następujący wzór rekurencyjny

$$N(d)=\sum_{k+l=d}N(k)N(l)k^2l\left[l\binom{3d-4}{3k-2}-k\binom{3d-4}{3k-1}\right]. \tag{5.1}$$

Zdefiniujmy następującą funkcję tworzącą (tzw. *ucięty potencjał Gromova–Wittena*)

$$\varphi(y,z)=\sum_{d=1}^{\infty}N(d)\frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!}e^{dy}. \tag{5.2}$$

Wtedy (5.2) spełnia następujące równanie różniczkowe cząstkowe, nazywane *równaniem WDVV* (E. Witten, R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde),

$$\varphi_{zzz}=\varphi_{yyz}^2-\varphi_{yyy}\varphi_{yzz}. \tag{5.3}$$

Następne punkty tego rozdziału będą poświęcone fascynującej historii odkrycia wzorów (5.1)–(5.3) i ich uogólnień, a ten punkt zakończymy geometrycznym dowodem wzoru (5.1). Powtarzamy go za pracą P. DiFrancesco i C. Itzyksona [DiIt] (patrz także [CoKa]).

Wybieramy $3d-1$ punktów, które oznaczymy $p_0,p_1,p_2,q_1,\dots,q_{3d-4}$. Wybierzmy jeszcze dwie proste L_1 i L_2, obie przechodzące przez p_0 i omijające pozostałe punkty. Rozważmy rodzinę krzywych wymiernych C stopnia d, przechodzących przez $3d-2$ punkty $p_1,p_2,q_1,\dots,q_{3d-4}$. Jest to 1-parametrowa rodzina. Wybierzmy jeszcze punkty p_3 i p_4 odpowiednio z przecięć $C\cap L_1$ i $C\cap L_2$. Trójki (C,p_3,p_4) tworzą 1-parametrową rodzinę, którą utożsamiamy z pewną powierzchnią Riemanna S, $S\simeq\{(C_s,p_3(s),p_4(s)):s\in S\}$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\psi:S\to\mathbb{CP}^1$ następująco

$$\psi(s)=\frac{p_1-p_3}{p_2-p_3}\frac{p_2-p_4}{p_1-p_4}, \tag{5.4}$$

tzn. *dwustosunek* czwórki punktów p_1,p_2,p_3,p_4 na krzywej wymiernej C_s.

Krzywe wymierne z pęku $\{C_s\}_{s\in S}$ mogą się degenerować. Może się zdarzyć tak, że krzywa C_{s_0} uzyska dodatkowy punkt osobliwy (oprócz $\frac{1}{2}(d-1)\times(d-2)$ już istniejących punktów podwójnych). Wtedy musi być przywiedlna, $C_{s_0}=C'+C''$, i każda ze składowych będzie krzywą wymierną.

(Degeneracja krzywej oznacza przewężenie odpowiadającej jej powierzchni Riemanna, na której pewna pętla jest ściskana do punktu. Z innego punktu widzenia oznacza to pojawienie „bąbla” C'' na powierzchni C'. Ma to związek z uzwarceniem Deligne'a–Mumforda przestrzeni moduli $\mathcal{M}_{0,n}$ i z teorią M. Gromova [Gr] krzywych pseudo-holomorficznych.)

Degeneracja może wpływać w następujący sposób na dwustosunek (5.4):

(i) Trzy lub cztery punkty p_i leżą na jednej ze składowych, np. C', i wtedy przejście graniczne w (5.4) jest ciągłe $\psi(s)\to\psi(s_0)$ (bo ewentualny czwarty punkt p_j z bąbla C'' można traktować jako leżący w nieskończoności w C').

(ii) Dwa punkty leżą w C' i dwa punkty leżą w C''; tutaj mamy $p_i - p_j = \infty$ w (5.4), gdy $p_i \in C'$ i $p_j \in C''$.

Obliczmy stopień odwzorowania ψ dla wartości $x = \psi(s)$ bliskiej 0 i 1. Gdy $\psi(s) \to 0$, musi zajść $p_2 - p_3 \to \infty$ i $p_1 - p_4 \to \infty$ (bo $p_1 - p_3$ i $p_2 - p_4$ są oddzielone od zera z założenia o $L_{1,2}$). Zatem zachodzi degeneracja typu (ii): $p_1, p_3 \in C'$ i $p_2, p_4 \in C''$, gdzie C' i C'' są stopni k i l, $k + l = d$. Liczbę sposobów degeneracji (czyli stopień $\deg\psi = \sharp\psi^{-1}(x)$) liczy się następująco. Na $\binom{3d-4}{3k-2}$ sposobów wybieramy układ $p_1, q_{i_1}, \ldots, q_{i_{3k-2}}$ punktów, przez które przechodzi C', wybierana na $N(k)$ sposobów. Krzywa C'' przechodząca przez p_2 i pozostałe q_i jest wybierana na $N(l)$ sposobów. Punkty $p_3 \in C' \cap L_1$ i $p_4 \in C'' \cap L_2$ można wybrać na k i l sposobów odpowiednio. Ponieważ C' i C'' przecinają się w kl punktach, to mamy kl wyborów punktu degeneracji. Stąd

$$\deg\psi|_{x=0} = \sum_{k,l>0,\, k+l=d} \binom{3d-4}{3k-2} N(k)N(l)kl(kl).$$

Gdy $x = \psi(s) \to 1$, to musi mieć miejsce pokrywanie się punktów p_3 i p_4 (z punktem $p_0 = L_1 \cap L_2$, patrz (5.4)). W granicy albo nie ma degeneracji typu (ii), to daje wkład $N(d)$ do $\deg\psi|_{x=1}$, albo taka degeneracja ma miejsce, przy tym $p_{1,2} \in C'$ i $p_3 = p_4 \in C''$. Tutaj krzywą C' wyznaczają punkty p_1 i p_2 i $3k-3$ spośród q_i, a C'' – pozostałe $3l-1$ punkty q_i. Punkty p_3 i p_4 są wybierane na l sposobów każdy. Jak poprzednio mamy kl wyborów punktu degeneracji w $C' \cap C''$. Stąd dostajemy

$$\deg\psi|_{x=1} = N(d) + \sum_{k,l>0,\, k+l=d} \binom{3d-4}{3k-3} N(k)N(l)ll(kl).$$

Z równości prawych stron ostatnich tożsamości wynika wzór Kontsevicha (5.1). (Uważny czytelnik teraz rozumie, dlaczego ten wzór nie był bardziej uproszczony).

5.2. *Supersymetryczne struny i symetria lustrzana.*

A. Całki po trajektoriach. Opis operatorowy (Schrödingera–Heisenberga) *mechaniki kwantowej* polega na wprowadzeniu przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ funkcji falowych (zwykle $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$) i przypisaniu wielkościom fizycznym (*obserwablom*) operatorów samosprzężonych. Ewolucja opisuje się operatorem e^{iHt}, gdzie H jest Hamiltonianem (zwykle równym $-\frac{1}{2}\Delta + V(x)$). R. Feynman zaproponował przedstawienie podstawowych wielkości pojawiających się w tej teorii z pomocą całek po trajektoriach. Sprowadza się to do przedstawienia jądra $K_t(x,y)$ operatora e^{itH} w postaci

$$K_t(x,y) = \int e^{iS(\phi)}\mathcal{D}\phi \tag{5.5}$$

(jest to wersja twierdzenia Trottera $e^{A+B} = \lim(e^{A/n}e^{B/n})^n$). Tutaj przestrzeń, po której odbywa się całkowanie, składa się z dróg $\phi : [0,t] \to \mathbb{R}^d$ łączących x z y, funkcjonał $S(\phi) = \int_0^t \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - V(\phi)\right] d\tau = \int L(\phi(\tau), \dot{\phi}(\tau))\, d\tau$ jest *działaniem* zadanym przez *lagranżjan* $L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$, natomiast $\mathcal{D}\phi \sim \prod_{\tau\in(0,t)} d\phi(\tau)$ jest pewną „miarą" na przestrzeni dróg.

Wzorowi (5.5) trzeba nadać pewien sens. Zwykle zaczyna się od definicji jądra K_t dla urojonych czasów, $t = is$, $s \geqslant 0$. Wtedy $K_{is}(x,y) = \int e^{\int_0^s V(\phi)d\tau} d\mu_W(\phi)$, gdzie $d\mu_W(\phi)$ jest miarą Wienera. Następnie stosuje się przedłużenie analityczne.

W *przypadku kwantowej teorii pola* (która stanowi uogólnienie mechaniki kwantowej na przypadek relatywistyczny) przestrzenią Hilberta jest zwykle *przestrzeń Focka*: symetryczna $\mathcal{F} = S(\mathcal{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H}^{\otimes 2})_s \oplus (\mathcal{H}^{\otimes 3})_s \oplus \ldots$ lub antysymetryczna. Jej elementy reprezentują funkcje falowe wielu cząstek. Wzór (5.5) uogólnia się w ten sposób, że działanie $S(\phi)$ jest definiowane jako całka po obszarze w czasoprzestrzeni z (pewnego) lagranżjanu.

B. Struny bozonowe. Teoria strun (patrz [D'H]) stanowi coś pośredniego pomiędzy powyższymi teoriami. W teorii strun całkuje się nie po „liniach świata" (tj. drogach cząstek $\phi : [0,t] \to \mathbb{R}^d$), tylko po „powierzchniach świata", czyli liniach świata wędrujących strun. To znaczy, że działanie ma postać

$$S(\phi) = \int_\Sigma L(\phi(z))\, d^2 z, \tag{5.6}$$

gdzie $\phi : \Sigma \to X$ jest odwzorowaniem z powierzchni Σ do rozmaitości X. Jak zobaczymy później, X jest wybierane w postaci $\mathbb{R}^4 \times M$, gdzie $\mathbb{R}^4$ ma metrykę Minkowskiego a M jest zwartą rozmaitością o małym promieniu.

Naturalną przestrzenią Hilberta w teorii strun jest $\mathcal{H} = L_2(\Omega X)$, funkcji na przestrzeni pętli w X, czyli na ΩX. Odpowiednikiem *amplitudy przejścia* $(e^{itH}\xi, \eta) = \int\int K_t(x,y)\xi(x)\overline{\eta}(y)\, dx\, dy$ (ze stanu ξ do stanu η) jest wyrażenie

$$\langle \xi\overline{\eta}\rangle = \sum_\Sigma \int \xi\overline{\eta} e^{-S(\phi)}\, \mathcal{D}\phi, \tag{5.7}$$

gdzie sumowanie odbywa się po powierzchniach Σ (po typach topologicznych), których brzeg składa się z dwu okręgów, „wchodzącego" Γ_{in} i „wychodzącego" Γ_{out}, a miara $\mathcal{D}\phi \sim \prod_{z\in\Sigma} d\phi(z)$ jest miarą funkcjonalną na odzorowaniach $\Sigma \to X$. Tutaj $\xi = \xi(\phi|_{\Gamma_{in}})$, $\eta = \eta(\phi|_{\Gamma_{out}})$ są wartościami funkcji z przestrzeni Hilberta na ograniczeniach ϕ do odpowiednich składowych brzegu.

Wzór (5.7) uogólnia się na przypadek, gdy „wchodząca" przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{in}$ i „wychodząca" przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{out}$ są iloczynami tensorowymi $L_2(\Omega X)$, odpowiadającymi kilku składowym (wchodzącym i wychodzącym) brzegu $\partial\Sigma$ dla ogólnej powierzchni Σ.

W przypadku, gdy $X = \mathbb{R}^D$ i działanie jest najprostsze możliwe, tj.

$$S(\phi) = S(\phi, \gamma) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} |d\phi|^2\, dv = \frac{1}{2}(\phi, -\Delta\phi)_{L_2} \tag{5.8}$$

(gdzie $|d\phi|^2$ i miara Riemanna dv są indukowane za pomocą metryki Riemanna γ na Σ), miara funkcjonalna $e^{-S(\phi)}\mathcal{D}\phi$ jest miarą Gaussa. Zatem można wyliczyć wyrażenie typu (5.7) przy pomocy metod analizy funkcjonalnej. Na przykład, dla $\xi = \eta = 1$ dostaje się $\int e^{-S(\phi)}\mathcal{D}\phi = [\det(-\Delta)]^{-1/2}$. To wyrażenie formalnie równa się $\prod \lambda_i^{-1/2}$ (iloczyn po wartościach własnych laplasjanu) i nie ma sensu; dlatego też fizycy stosują jego *regularyzację* w postaci $\det(-\Delta) = e^{-\zeta'(0)}$, gdzie $\zeta(s) = \sum_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i^{-s}$ jest *zeta-funkcją operatora* $-\Delta$.

Po takiej regularyzacji wyrażenia typu $\int \xi\overline{\eta}e^{-S(\phi)}\,\mathcal{D}\phi$ przestają być niezmiennicze względem zmian metryki w tej samej konforemnej klasie, tzn. względem *transformacji Weyla* $\gamma \to e^{\sigma(z)}\gamma$ ($S(\phi, \gamma)$ jest niezmiennicze). Dlatego też fizycy wykonują w (5.8) dodatkowe całkowanie po metrykach

$$\sum_{\Sigma} \int \mathcal{D}\gamma \int \xi\overline{\eta}e^{-S(\phi,\gamma)}\,\mathcal{D}\phi. \tag{5.9}$$

Tutaj całkowanie po metrykach można rozłożyć na całkowanie wzdłuż przestrzeni moduli $\mathcal{M}_\Sigma = Metryki/Weyl \times \mathrm{Diff}(\Sigma)$ (patrz rozdział 3.2 powyżej) i na całkowania po orbitach grup $Weyl$ (transformacji Weyla) i $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ (dyfeomorfizmów powierzchni). Przy tym pojawiają się pewne wyznaczniki nieskończenie wymiarowe, które także należy regularyzować i które zachowują się anomalnie względem transformacji Weyla.

Po tych zabiegach anomalie względem transformacji Weyla, zwane *konforemnymi anomaliami*, kompensują się dokładnie wtedy, gdy $D = \dim X = 26$. Wtedy całka po metrykach sprowadza się do skończenie wymiarowej całki po przestrzeni moduli $\mathcal{M}_\Sigma$.

C. Supersymetryczne struny. W tym momencie na pomoc przychodzi supersymetria. Z definicji dana teoria pola jest supersymetryczna, jeśli opisuje układ bozonów i fermionów i jest niezmiennicza względem pewnych ciągłych transformacji, które zamieniają bozony na fermiony i odwrotnie. Jak dotąd nie zaobserwowano supersymetrii w przyrodzie, ale fizycy nie mają wątpliwości, że będzie ona istotnym składnikiem przyszłej zunifikowanej teorii oddziaływań.

Przypomnijmy jeszcze, że przykładami fermionów są elektrony, dla których rolę operatora Laplace'a Δ pełni operator Diraca $\not{D}$. Chodzi o to, aby rozwiązać równanie $\not{D}^2 = \Delta$ i do tego trzeba zastąpić skalary lub wektory ϕ (z poprzednich punktów) przekrojami ψ pewnej wiązki, zwanej *wiązką spinorową*. W przypadku teorii strun tą wiązką spinorową jest $K^{1/2}$, tzn. „pierwiastek" z wiązki kanonicznej $K = \Omega^{1,0}(\Sigma)$ (czyli holomorficznej wiązki kostycznej). Teraz już zakładamy strukturę zespoloną na Σ z lokalną zespoloną współrzędną z. Struktura spinorowa istnieje, gdy genus $g(\Sigma) \geqslant 1$.

Pola fermionowe to przekroje ψ_+ i ψ_- wiązek $K^{1/2} \otimes \phi^*TX$ i $\overline{K}^{1/2} \otimes \phi^*TX$ (gdzie ϕ^*TX jest cofnięciem wiązki stycznej do X za pomocą *pola bozonowego* $\phi : \Sigma \to X$). Wszystkie składowe $\psi^i_\pm$ (w lokalnym układzie wpółrzędnych w X) są antyprzemienne między sobą.

Działanie w supersymetrycznej teorii strun ma postać

$$S(\phi, \psi_\pm, \ldots) = S_1(\phi) + S_2(\psi) + \ldots \tag{5.10}$$

Tutaj $S_1(\phi)$ ma postać (5.8) oraz

$$S_2(\psi_\pm) = i \int_\Sigma \left(\left\langle \psi_-, \frac{\partial \psi_-}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \psi_+, \frac{\partial \psi_+}{\partial \bar{z}} \right\rangle \right) dv, \tag{5.11}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym w ϕ^*TX. (Faktycznie wzór (5.11) jest prawdziwy tylko w przypadku płaskiej rozmaitości X; w ogólnym przypadku należy zastąpić pochodne $\frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ koneksjami $\bigtriangledown_z$ i $\bigtriangledown_{\bar{z}}$ otrzymanymi z cofnięcia koneksji Levi-Civity na X. Poza tym dochodzi jeszcze człon $\frac{1}{2} \int \langle R(\psi_+, \psi_-)\psi_+, \psi_- \rangle \, dv$ „krzywizny sekcyjnej”.) Kropki w (5.10) oznaczają dodatkowe pola (aksjony, dilatony, tachiony, grawitina itp.) i składniki działania związane z nimi.

Przydomek supersymetryczna dla tej teorii pochodzi od działania *grupy przekształceń supersymetrii*, które w infinitezymalnej wersji i w przypadku płaskiej X przyjmują następującą postać

$$(\phi, \psi_+, \psi_-) \to (\phi, \psi_+, \psi_-) + \epsilon_-(i\psi_+, -\phi_z, 0) + \epsilon_+(i\psi_-, 0, \phi_{\bar{z}}). \tag{5.12}$$

Tutaj ϵ_- (odp. ϵ_+) jest infinitezymalnie małym holomorficznym (odp. antyholomorficznym) przekrojem wiązki $K^{-1/2}$ (odp. $\overline{K}^{-1/2}$), antyprzemiennym z polami $\psi_\pm$. (W przypadku zakrzywionym wzory (5.12) są bardziej złożone, bo dochodzą człony związane z koneksją). Zauważmy, że te przekształcenia mieszają bozony z fermionami przy pomocy małych fermionów $\epsilon_\pm$. Lagranżjan jest niezmienniczy względem tych przekształceń.

Całkowanie po polach $\phi, \psi_\pm$ i po metrykach z użyciem zregularyzowanych wyznaczników (analogiczne jak w poprzednim punkcie) prowadzi do teorii wolnej od konforemnej anomalii, gdy $D = \dim X = 10$ (patrz [D'H]).

D. Rozmaitości Calabi–Yau. W publikacjach, które studiowałem przygotowując ten artykuł, występuje kilka definicji tych rozmaitości. Dlatego też postaram się trzymać fizycznej drogi dochodzenia do nich w teorii strun.

Analogicznie do teorii Kaluzy–Kleina elektromagnetyzmu (w której rozważa się metrykę na przestrzeni $\mathbb{R}^4 \times S^1$), docelową przestrzenią X powinna być 10-wymiarowa przestrzeń $\mathbb{R}^4 \times M$ z diagonalną metryką $g_{Mink.} \oplus g_M$. Przy tym średnica 6-wymiarowej zwartej rozmaitości M powinna być mała, ale też znacznie większa od średnic strun średniej wielkości w M.

Subtelna analiza spektrum cząstek, pojawiających się przy tego typu redukcji, prowadzi do określonych warunków na rozmaitość M i metrykę g_M. Niestety, nie potrafię w zwięzły sposób powtórzyć fizycznej argumentacji tych warunków. Dlatego też po prostu je przytoczę, a zainteresowanego czytelnika odsyłam do artykułu A. Stromingera [St]. Oto one:

(1) Tensor Ricciego metryki g_M musi się zerować.

(2) Grupa holonomii musi redukować się z $SO(6)$ do $SU(3)$ (*grupa holonomii* jest podgrupą w grupie izometrii $T_{x_0}M$, generowaną przez przesunięcia równoległe wektorów z $T_{x_0}M$ wzdłuż pętli w M wychodzących z x_0).

(3) M musi posiadać strukturę prawie zespoloną, która jest całkowalna, czyli M jest 3-wymiarową rozmaitością zespoloną.

W ten sposób zdefiniowane *rozmaitości Calabi–Yau M* posiadają dodatkowe własności (służące także za definicję):

(4) posiadają *metrykę Kählera* (tj. metrykę Hermitowską zapisywaną lokalnie w postaci $\sum dx^i \otimes d\overline{x}^i$, gdzie x^i są lokalnymi holomorficznymi współrzędnymi, i taką że *forma Kählera* $\omega = \frac{i}{2} \sum dx^i \wedge d\overline{x}^i$ jest symplektyczna) z zerowym tensorem Ricciego (hipoteza E. Calabi udowodniona przez S.-T. Yau);

(5) mają zerową pierwszą klasą Cherna (bo $c_1(M)$ to forma Ricciego);

(6) mają trywialną wiązkę kanoniczną $K_M = \Omega^{3,0}(M)$, tzn. istnieje globalna nigdzie nie zerująca się holomorficza 3-forma.

Dalej będziemy rozpatrywać tylko tzw. *właściwe rozmaitości Calabi–Yau*, które oprócz powyższych własności spełniają:

(7) $H^{k,0}(M) = 0$, $k = 1, 2$, tzn. nie istnieją globalne holomorficzne 1- i 2-formy (ale oczywiście $H^{3,0}(M) = \mathbb{C}$).

Będziemy też zakładać, że metryka na M pochodzi od formy Kählera.

E. Modele A i B. Redukcja opisana w poprzednim punkcie prowadzi do teorii strun z przestrzenią docelową będącą rozmaitością zespoloną (Calabi–Yau). Jako taka, dopuszcza rozkład $T^{1,0} \oplus T^{0,1}$ kompleksyfikacji przestrzeni stycznej $TM^{\mathbb{C}}$. Wobec tego pola fermionowe $\psi_+ \in K^{1/2} \otimes \phi^*TM$ i $\psi_- \in \overline{K}^{1/2} \otimes \phi^*TM$ ulegają dalszemu rozkładowi

$$\psi_+ = \psi'_+ + \psi''_+, \qquad \psi_- = \psi'_- + \psi''_-, \tag{5.13}$$

gdzie $\psi'_+ \in K^{1/2} \otimes \phi^*T^{1,0}$, itd. Podobnie pola bozonowe nożna przedstawić w postaci $\phi = \phi' + \phi''$, gdzie $\phi' = (x^1, x^2, x^3) \circ \phi$ i $\phi^{''} = (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3) \circ \phi$ w lokalnych zespolonych współrzędnych x^i na M. Również w infinitezymalnym przekształceniu supersymetrii mamy $\epsilon_+ = \epsilon'_+ + \epsilon''_+$, $\epsilon_- = \epsilon'_- + \epsilon''_-$, $\epsilon'_-, \epsilon''_- \in K^{-1/2}$, $\epsilon'_+, \epsilon''_+ \in \overline{K}^{-1/2}$.

W tym momencie fizycy podkręcają pola fermionowe (patrz [Wi3]). Przy tym to podkręcenie można przeprowadzać na dwa sposoby (inne podkręcenia nie dają nic nowego), prowadzące do dwu możliwych teorii: A lub B.

W *teorii A* przyjmuje się, że pola ψ'_+ i ψ''_+ są przekrojami wiązek $\phi^*T^{1,0}$ i $K\otimes\phi^*T^{1,0}$ odpowiednio, zaś pola ψ'_- i ψ''_- są przekrojami wiązek $\overline{K}\otimes\phi^*T^{1,0}$ i $\phi^*T^{0,1}$ odpowiednio.

Pierwsze podkręcenie nazywa się to tzw. (+)-*podkręceniem* a drugie – (−)-*podkręceniem.*

Ponieważ w lagranżjanie pola spinorowe występują tylko w wyrażeniach $\langle\psi'_+,\nabla_{\overline{z}}\psi''_+\rangle$, $\langle\psi'_-,\nabla_z\psi''_-\rangle$ i $\langle R(\psi'_+,\psi''_+)\psi'_-,\psi''_-\rangle$, więc nie powinno to mieć istotnego znaczenia dla fizyki.

Analogicznie w przekształceniach supersymetrii ϵ'_+ i ϵ''_- stają się po prostu funkcjami, zaś $\epsilon''_+\in K^{-1}$ i $\epsilon'_-\in\overline{K}^{-1}$.

W *teorii B* przyjmuje się $\psi'_+\in K\otimes\phi^*T^{1,0}$, $\psi''_+\in\phi^*T^{0,1}$ ((+)-podkręcenie) i $\psi'_-\in\overline{K}\otimes\phi^*T^{1,0}$, $\psi''_+\in\phi^*T^{0,1}$ ((−)-podkręcenie).

F. Kohomologie BRST. Jak już wspomnieliśmy, powyższe podkręcenia nie są szczególnie istotne z punktu widzenia fizyki. Za to okazują się mieć istotne znaczenie z punktu widzenia geometrii. Związek z geometrią realizuje się za pomocą tzw. kohomologii BRST (B. Becchi, A. Rouet, R. Stora, I. V. Tiutin) obserwabli modelu kwantowego oraz kohomologii de Rhama i Dolbeault rozmaitości M.

Kohomologie BRST są definiowane jako $\ker Q/\operatorname{Im} Q$, gdzie Q jest tzw. *operatorem symetrii BRST* związanym z działąniem grupy przekształceń supersymetrii (5.12). Symetria BRST jest tym, co pozostaje z supersymetrii po kwantyzacji, czyli po wykonaniu całki funkcjonalnej $\int\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\psi e^{-S}$. To całkowanie rozkłada się na całkowanie wzdłuż orbity działania grupy supersymetrii i wzdłuż pewnego cięcia $g=0$ transwersalnego do orbit supersymetrii. Przy tym „deltę Diraca” $\delta_{\{g=0\}}$ zastępuje się całką funkcjonalną $\int\mathcal{D}fe^{i(g,f)}$ po tzw. *polach duchów* f. Operator Q „miesza” bozony z fermionami przy pomocy duchów f (które pełnią rolę analogiczną do pól $\epsilon_\pm$ w (5.12)). Operator Q jest nilpotentny, $Q^2=0$ (stąd jego kohomologie). Działanie Q na obserwabli $\mathcal{O}$ oznacza się $\{Q,\mathcal{O}\}$.

Okazuje się, że $\{Q,L\}=0$ (L – lagranżjan) i że teoria nie zmieni się, gdy zastąpić L nowym lagranżjanem $L+\{Q,V\}$ z dowolną obserwablą V. W wyrażeniach $\int\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\psi e^{-S}\,\mathcal{O}_1\ldots\mathcal{O}_k$ można obserwable $\mathcal{O}_i$ zastępować BRST-kohomologicznie równoważnymi obserwablami, wynik będzie taki sam. Po więcej szczegółów odsyłam czytelnika do artykułu E. D'Hokera [D'H] i do drugiego tomu monografii S. Weinberga [We].

Obliczenia pokazują (patrz [Wi3]), że w modelu A algebra kohomologii BRST pokrywa się z algebrą kohomologii de Rhama $H^*_{dR}(M,\mathbb{C})$. Przy tym 1-formom dx^i odpowiadają obserwable $(\psi'_++\psi''_-)^i\in T^{1,0}\oplus T^{0,1}=TM$ zaś operator Q odpowiada różniczce zewnętrznej d.

W modelu B grupy kohomologii BRST pokrywają się z grupami kohomologii Dolbeault $\bigoplus_{p,q}H^p(M,\bigwedge^q T^{1,0})$: 1-formom $d\overline{x}_i$ odpowiadają obserwable $(\psi''_+ + \psi''_-)^i$, polom wektorowym ∂_{x_j} odpowiadają obserwable $(\psi'_+ + \psi'_-)^j$, zaś Q odpowiada różniczce $\overline{\partial}$.

Zauważmy, że dzięki temu, iż snopy $\bigwedge^3 T^{1,0}$ i $K_M = \Omega^{3,0}(M) = \bigwedge^3 (T^*)^{1,0}$ są trywialne (dla rozmaitości Calabi–Yau), mamy $H^p(M, \bigwedge^q T^{1,0}) \simeq H^p(M, \Omega^{3-q,0}) = H^{3-q,p}(M)$.

G. Instantony w modelu A. Okazuje się (patrz [Wi3]), że w modelu A całkę funkcjonalną $\int \mathcal{D}\gamma \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\psi e^{-S}$ można znacznie uprościć. Można zastąpić ją całką po przestrzeni *krzywych holomorficznych* $\phi : \Sigma \to M$, tzn. spełniających równania Cauchy–Riemanna $\partial x^i \circ \phi / \partial \bar{z} = \partial \overline{x}^i \circ \phi / \partial z = 0$ (w lokalnych holomorficznych współrzędnych z na Σ i x^i na M).

Rzecz w tym, że lagranżjan jest BRST-kohomologicznie równoważny $L' = t \cdot \phi^* \omega$, gdzie ω jest $(1,1)$-formą Kählera, a stałą t można zmieniać. W szczególności t można przyjąć duże, a dla dużych t w „gęstości" rozkładu prawdopodobieństwa $e^{-S'(\phi)}$, $S' = \int L'(\phi)\, dv$, dominują pola, dla których jest spełnione równanie Eulera–Lagrange'a $\frac{\delta L'}{\delta \phi} = 0$. Rozwiązaniem tego ostatniego równania są krzywe holomorficzne (jak w geometrii symplektycznej [Gr], [FuOn]).

Innym argumentem przytaczanym przez Wittena [Wi3] jest fakt, że w modelu A równania Cauchy–Riemanna są warunkami na punkty stałe symetrii BRST, zaś całkowanie funkcjonalne można zredukować do całkowania po zbiorze punktów stałych.

Krzywe holomorficzne ϕ, zwane *instantonami*, można podzielić względem ich *liczby instantonowej*, tzn. klasy homologii obrazu cyklu fundamentalnego $\beta = \phi_*[\Sigma] \in H_2(M, \mathbb{Z})$.

(Jeśli Σ jest powierzchnią z brzegiem $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$, to wygodniej jest traktować Σ jako $\overline{\Sigma} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$, czyli zamkniętą powierzchnię z nakłuciami; wtedy po cichu zakłada się, że pętle $\phi(\Gamma_i)$ są punktami w M i $\beta = \phi_*[\overline{\Sigma}]$. W nowszej wersji teorii strun, czyli *teorii D-bran* (od membran), zakłada się, że $\phi(\partial\Sigma)$ leży w ustalonej podrozmaitości $N \subset M$).

Całka funkcjonalna sprowadza się do wyrażenia

$$\sum_{\beta} e^{-(\beta,\omega)} \int_{\mathcal{M}_{g,n,\beta}} (\cdot), \tag{5.14}$$

gdzie $\mathcal{M}_{g,n,\beta}$ jest przestrzenią moduli krzywych holomorficznych $\phi : \Sigma \to M$ genusu g z n wyróżnionymi punktami i lądujących w klasie homologii β. Tutaj $(\beta, \omega) = \int_\beta \omega = \int_\Sigma L'$ pełni rolę stopnia krzywej (przyjęliśmy $t = 1$ w definicji L').

W miejsce $(\cdot)$ w (5.14) wstawia się obserwable, które w modelu A można przyjąć w postaci $\eta_1(\Gamma_1) \wedge \ldots \wedge \eta_n(\Gamma_n)$, gdzie $\eta_i(\Gamma_i) = \eta_i$ to formy różniczkowe na M (aby uniknąć kłopotów ze znakami, przyjmijmy, że stopnie η_i są parzyste i że same formy są rzeczywiste). Składowe brzegu są podzielone na wchodzące $\partial\Sigma_{in} = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_k$ i wychodzące $\partial\Sigma_{out} = \Gamma_{k+1} \cup \ldots \cup \Gamma_n$. Mamy więc przestrzeń Hilberta wchodzącą $\mathcal{H}_{in} = \bigotimes_{i=1}^{k} H^*_{dR}(M)$ i wychodzącą $\mathcal{H}_{out} = \bigotimes_{i=k+1}^{n} H^*_{dR}(M)$. Stany („funkcje falowe") w tych przestrzeniach są to wektory $v_{in} = \eta_1(\Gamma_1)\ldots\eta_k(\Gamma_k)\Omega$ i $v_{out} = \eta_{k+1}(\Gamma_{k+1})\ldots\eta_n(\Gamma_n)\Omega$, gdzie Ω jest „wektorem próżni". Wyrażenie

$$\langle \eta_1 \ldots \eta_n \rangle = \sum_{\beta} e^{-(\beta,\omega)} \int_{\mathcal{M}_{g,n,\beta}} \eta_1 \ldots \eta_n \tag{5.15}$$

pełni rolę amplitudy przejścia $(e^{itH} v_{in}, v_{out})_{L^2}$ ze stanu v_{in} do stanu v_{out} ewoluując wzdłuż linii świata Σ struny. W (5.15) powinniśmy także mieć $\sum \deg \eta_i = \dim \dot{M}$ (chociaż są tu wyjątki). Wyrażenia $\int_{\mathcal{M}_{g,n,\beta}} \eta_1 \ldots \eta_n$ są tzw. *niezmiennikami Gromova–Wittena.*

Mają miejsce następujące *reguły zszywania* (stanowiące część aksjomatów topologicznej teorii pola, patrz [CoKa]):

$$\langle \eta_1(\Gamma_1)\eta_2(\Gamma_2) \rangle = \int_M \eta_1\eta_2 = (\eta_1, \eta_2) \tag{5.16}$$

(dualność Poincaré) i

$$\begin{aligned} &\langle \eta_1 \ldots \eta_{k-1}\eta_{k+2} \ldots \eta_n \rangle \\ &\quad = \sum_{i,j} \langle \eta_1 \ldots \eta_{k-1} \Delta_i(\Gamma_k) \rangle (\Delta_i, \Delta_j) \langle \Delta_j(\Gamma_{k+1}) \eta_{k+2} \ldots \eta_n \rangle, \end{aligned} \tag{5.17}$$

gdzie $\eta_j = \eta_j(\Gamma_j)$ i sumowanie odbywa się po elementach $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ bazy $H^*_{dR}(M)$. Te aksjomaty są objaśnione na rys. 3(a) i 3(b).

Na rys. 3(c) na dwa sposoby są zszyte dwie pary „majtek" dające ten sam rezultat. To prowadzi do następującej równości, nazywanej *tożsamością WDVV*,

$$\sum_{i,j}\langle\eta_1\eta_2\mathit{\Delta}_i(\Gamma')\rangle(\mathit{\Delta}_i,\mathit{\Delta}_j)\langle\mathit{\Delta}_j(\Gamma')\eta_3\eta_4\rangle = \sum_{i,j}\langle\eta_1\eta_3\mathit{\Delta}_i(\Gamma'')\rangle(\mathit{\Delta}_i,\mathit{\Delta}_j)\langle\mathit{\Delta}_j(\Gamma'')\eta_1\eta_4\rangle, \tag{5.18}$$

gdzie $\eta_k = \eta_k(\Gamma_k)$. Proces odwrotny do zszywania, po zastąpieniu pętli Γ_i wyróżnionymi punktami (nakłuciami) p_i w zwartych powierzchniach Riemanna $\overline{\Sigma}$, polega na przewężeniu, tj. degereneracji powierzchni $\overline{\Sigma}$. Wtedy $\overline{\Sigma} \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \mathcal{M}_{g,n}$.

Fizycy twierdzą ponadto, że we wzorach (5.14) i (5.15) należy całkować po przestrzeniach $\mathcal{M}_{0,n,\beta}$, to znaczy, że powierzchnie Σ są genusu 0 z wyróżnionymi punktami. Witten [Wi3] podaje pewne fizyczne argumenty za tym: wiązka kanoniczna K na Σ powinna być trywialna, aby można było dokonywać podkręceń. Matematycy nie podejmują tej dyskusji (chociaż rozważają niezmienniki Gromova–Wittena dla $g \geqslant 1$).

Jeśli formy różniczkowe $\eta_j = \eta_j(p_j) = \eta_j(\Gamma_j)$ w (5.15) zastąpić równoważnymi kohomologicznie prądami (tj. formami dystrybucyjnymi) o nośnikach w cyklach $\alpha_j \subset M$ Poincaré dualnych do η_j (przy założeniu $\eta_j \in H^*(M,\mathbb{Z})$), to w znacznej części przypadków wzór (5.15) upraszcza się do następującego

$$\langle\eta_1\dots\eta_n\rangle = \sum_\beta e^{-(\beta,\omega)}\cdot N(\alpha_1,\dots,\alpha_n;\beta). \tag{5.19}$$

Tutaj $N(\alpha_1,\dots,\alpha_n;\beta)$ jest liczbą krzywych wymiernych $\phi(\Sigma)$ w M, incydentnych z cyklami α_j (tj. $\phi(p_j) \in \alpha_j$) i dających klasę homologii $\beta \in H_2(M,\mathbb{Z})$.

Wyrażenie (5.15) dla $n = 3$ i $\eta_j \in H^2_{dR}(M)$ opisuje tzw. *potencjał Yukawy*, czyli funkcję na $(H^2_{dR}(M))^{\otimes 3}$. Ten potencjał ściśle wiąże się z hipotezą symetrii lustrzanej odkrytej przez fizyków.

Jej źródłem była praca P. Candelasa, X. de la Ossy, P. Greena i L. Parkes [COGP], w której rozważano rozmaitość Calabi–Yau w postaci ogólnej kwintyki

$$M = \{P_5(x_1,\dots,x_5) = 0\} \subset \mathbb{CP}^4, \tag{5.20}$$

gdzie P_5 jest typowym wielomianem stopnia 5. Ta rozmaitość charakteryzuje się następującym rozkładem Hodge'a: $H^{1,0}(M) = H^{2,0}(M) = 0$, $H^{1,1}(M) = \mathbb{C}$, $H^{3,0}(M) = \mathbb{C}$, $H^{2,1}(M) = \mathbb{C}^{101}$.

Wybierzmy generator β_0 grupy $H_2(M,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Przestrzeń $H^2_{dR}(M)$ jest 1-wymiarowa i generowana przez klasę η_0 dualną do cyklu β_0. Podobnie cykle $\beta \in H_2(M,\mathbb{Z})$ są postaci $d\cdot\beta_0$. Zatem potencjał Yukawy dla modelu A na rozmaitości (5.20) przyjmuje postać

$$\langle\eta_0\eta_0\eta_0\rangle = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} e^{-d(\omega,\beta_0)}\Big(\sum_{k|d} k^3 N(k)\Big), \tag{5.21}$$

gdzie $N(k)$ jest liczbą krzywych wymiernych stopnia k w M. Pierwszy składnik 5 odpowiada stałym krzywym w M, a dziwna forma niezmiennika Gromova–Wittena $\sum_{k|d} k^3 N(k)$ wynika z konieczności właściwego liczenia tzw. krzywych wielokrotnych i została umotywowana przez P. Aspinwalla i D. Morrisona [AsMo].

Warto tu dodać, że wyrażenie (5.21) zależy od formy Kählera $\omega \in H^{1,1}(M) \simeq \mathbb{C}$, czyli od struktury symplektycznej na M. W istocie ω może poruszać się w pewnym stożku w $H^{1,1}(M)$ definiującym przestrzeń moduli struktur Kählerowskich na M.

H. Potencjał Yukawy w modelu B. Przypomnijmy, że w modelu B kohomologie BRST obserwabli pokrywają się z kohomologiami Dolbeault $\bigoplus H^p(M, \bigwedge^q T^{1,0})$.

Ponadto, analogiczne jak w modelu A, wyliczenia działania operatora symetrii BRST dla lagranżjanu pokazują, że ten lagranżjan można przyjąć w postaci $L' = t \cdot W$, gdzie t jest (dużym) parametrem, a z postaci obserwabli W wynika, że odpowiednie równania Eulera–Lagrange'a dają stałe rozwiązania. To oznacza, że pole bozonowe ϕ można przyjąć stałe, $\phi|_\Sigma \equiv const$, i analogicznie stałe są pola fermionowe $\psi'_\pm, \psi''_\pm$. Odpowiednikami średnich $\int \mathcal{D}\gamma \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\psi e^{-S}(\cdot)$ są następujące wyrażenia

$$\langle \xi_1 \dots \xi_n \rangle = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n, \tag{5.22}$$

gdzie $\xi_i \in H^{p_i}(M, \bigwedge^{q_i} T^{1,0})$ są formami postaci $\sum a_{IJ} d\overline{x}^I \big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^J$, $d\overline{x}^I = d\overline{x}^{i_1} \wedge d\overline{x}^{i_2} \dots$, $\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^J = \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_2}} \dots$, $|I| = p_i$, $|J| = q_i$. Przy tym forma $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$ powinna być typu (3,3) i reprezentować element $H^3(M, \bigwedge^3 T^{1,0}) = \mathbb{C}$, czyli powinna być konkretną liczbą. W tym sensie należy rozumieć wzór (5.22). W szczególności *potencjał Yukawy dla modelu B* jest definiowany jako funkcja na $(H^1(M, T^{1,0}))^{\otimes 3}$ za pomocą wzoru (5.22) dla $n = 3$.

Okazuje się, że potencjał Yukawy można wyrazić z pomocą wariacji struktury Hodge'a w kohomologiach rozmaitości M. Rozmaitość $M = M_\zeta$ zależy od pewnych parametrów ζ. Na przykład, M zadana w (5.20) zależy od 101 parametrów: 126 (współczynników w $P_5(x)$) $-$ 25 (współczynników w $GL(5, \mathbb{C})$). Są to parametry struktury zespolonej M, zaś teoria Kodairy–Spencera mówi, że za infinitezymalne deformacje struktury zespolonej odpowiadają elementy $H^1(M, T^{1,0})$ (patrz [Vo]). Niech Ω będzie globalną 3-formą holomorficzną na M (w przypadku kwintyki (5.20) $\Omega = x_5 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 / (\partial P_5 / \partial x_4)$). Otóż potencjał Yukawy jako funkcja na $(H^1(M, T^{1,0}))^{\otimes 3}$ przybiera następującą postać

$$\langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle = \int_M \Omega \wedge \bigtriangledown_{\xi_1} \bigtriangledown_{\xi_2} \bigtriangledown_{\xi_3} \Omega, \tag{5.23}$$

gdzie $\bigtriangledown_\xi$ jest tzw. *koneksją Gaussa–Manina* w kohomologicznej wiązce H^* nad przestrzenią moduli struktur zepolonych $\mathcal{M}_M$ z włóknem nad ζ równym

$H^*(M_\zeta, \mathbb{C})$. Kocykle całkowite z $H^*(M_\zeta, \mathbb{Z})$ są niezmiennicze (równoległe) względem koneksji ∇, ale ∇ nie zachowuje rozkładu Hodge'a $H^* = \bigoplus H^{p,q}$. Dokładniej, dla $\xi \in \Gamma(\Omega^{0,1} \oplus T^{1,0})$ działanie ∇_ξ na fomie harmonicznej κ typu (p,q) prowadzi do formy typu $(p-1, q+1)$ (różniczki holomorficzne w κ są sparowane z wektorami holomorficznymi w ξ). Zatem po trzykrotnym zadziałaniu koneksji Gaussa–Manina na Ω dostaje się formę typu $(0,3)$ i całka w (5.23) jest całką z $(3,3)$-formy. Jeśli chodzi o szczegóły, to odsyłam czytelnika do książek [CoKa] i [Vo].

I. Symetria lustrzana. Ponieważ z pewnych (fizycznych) względów modele A i B supersymetrycznych strun są równoważne, fizykom przyszło na myśl, że modele geometryczne opisane w poprzednich punktach powinny występować parami.

Jeśli model A jest opisywany instantonami na rozmaitości Calabi–Yau M i zależy tylko od struktury Kählera, to powinna istnieć inna rozmaitość Calabi–Yau M' taka, że model B na niej oparty jest opisywany korelacjami (5.22) i zależy od struktury zespolonej na M'. W szczególności, powinno zachodzić $H^{1,1}(M) \simeq H^{2,1}(M')$. Zamieniając rolami modele A i B powinniśmy także dostać $H^{2,1}(M) \simeq H^{1,1}(M')$. Mówi się, że rozmaitość M' jest *lustrzanie dualna* do M.

Co więcej, ponieważ potencjał Yukawy w modelu B na M' ma stosunkowo prostą postać (jest wyliczalny), to w ten sposób można byłoby określić liczbę $N(d)$ krzywych wymiernych stopnia d na M.

Pierwsze takie obliczenie zostało wykonane w słynnej pracy [COGP] i rezultaty okazały się fantastyczne. Na przykład dla kwintyki (5.20) autorzy dostali $N(1) = 2875$, $N(2) = 609250$, $N(3) = 317206375$. Te liczby zostały potwierdzone żmudnymi obliczeniami geometrów algebraicznych [ElSt] przy użyciu klasycznych metod.

Jako parę lustrzanie dualnych rozmaitości wybrano M w (5.20) i

$$M' = \{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + a x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0\}/(\mathbb{Z}_5)^3, \tag{5.24}$$

gdzie grupa $(\mathbb{Z}_5)^3$ działa następującymi mnożeniami jednorodnych współrzędnych przez $\zeta^j = e^{2\pi i j/5}$, $j = 1, \ldots, 5$: $(\zeta^j x_1, x_2, x_3, x_4, \zeta^{4j} x_5)$, $(x_1, \zeta^j x_2, x_3, x_4, \zeta^{4j} x_5)$, $(x_1, x_2, \zeta^j x_3, x_4, \zeta^{4j} x_5)$.

Jawnie wyrażona równość potencjałów Yukawy prowadzi do następującej tożsamości (w której lewa strona to szereg (5.21) z $e^{-(\omega,\beta_0)} = q$)

$$5 + \sum_{d=1}^{\infty} N(d) d^3 \frac{q^d}{1-q^d} = \frac{5}{(1+5^5 z) f_0^2} \left(\frac{q}{z}\frac{dz}{dq}\right)^3. \tag{5.25}$$

Tutaj mamy $z = a^{-5}$, $q = q(z) = e^{f_1(z)/f_0(z)}$, $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5}(-z)^n$, $f_1(z) = f_0(z)\ln(-z) + 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5}\big(\sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}\big)(-z)^n$. Funkcje $f_0(z)$ i $f_1(z)$

są całkami z 3-formy holomorficznej Ω po pewnych 3-cyklach w M'. Powyższe wielkości zależą od parametru $z = a^{-5}$ (patrz (5.24)), który kontroluje strukturę zespoloną na M'.

Odwzorowanie $z \to q(z)$, pomiędzy przestrzenią moduli struktur zespolonych na M' i przestrzenią moduli struktur Kählera na M, nazywa się *przekształceniem symetrii lustrzanej.*

Więcej szczegółów czytelnik znajdzie w [CoKa], [Vo] i [Ko9].

5.3. *Matematyka symetrii lustrzanej.* Historia odkrycia symetrii lustrzanej jest niewątpliwie niezwykła. Jednaże czytelnik musiał zauważyć jak wiele punktów na tej drodze jest śliskich i nie do zaakceptowania przez matematyka. Pojawiło się zatem wyzwanie ścisłego udowodnienia przynajmniej części twierdzeń przewidywanych przez symetrię lustrzaną. (Ja opisałem w sumie dosyć ograniczony, chociaż jednolity fragment teorii, ale fizycy nie wyczerpali jeszcze swoich pomysłów i tworzą nowe modele, np. D-brany, heterotyczne struny czy M-teoria).

Matematycy, w tym Kontsevich, podjęli to wyzwanie. Chyba najistotniejszy jego wkład stanowi praca [Ko7]. W niej została podana definicja *stabilnej krzywej w rozmaitości* V (przyjęta potem za standardową): składa się na nią zredukowana krzywa zespolona C (być może osobliwa), wyróżnione punkty $p_1, \ldots, p_n \in C$ nie będące punktami osobliwymi i odwzorowanie $\phi : C \to V$ takie, że trójka $(C, \{p_1, \ldots, p_n\}, \phi)$ nie dopuszcza nietrywialnych deformacji stałych na V i w punktach $p_1, \ldots, p_n$.

Kontsevich podał także konstrukcję zwartej przestrzeni moduli $\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\beta}$ stabilnych krzywych przy ograniczeniu $\phi_*[C] = \beta \in H_2(V, \mathbb{Z})$ (patrz wzór (5.14) powyżej). Pokazał, że ta przestrzeń jest algebraicznym orbifoldem (podobnie jak uzwarcenie Deligne'a–Mumforda $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$) i ma dobrze określony cykl fundamentalny.

Następnie zabrał się za wzór (2.25). Wyraził liczbę krzywych wymiernych stopnia d na kwintyce w postaci następującej całki

$$N(d) = d^3 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,0,d[\alpha]}} c_{5d+1}(\mathcal{E}_d), \tag{5.26}$$

gdzie $c_{5d+1}(\mathcal{E}_d)$ jest $(5d+1)$-ą klasą Cherna pewnej wiązki wektorowej $\mathcal{E}_d$ na przestrzeni moduli $\overline{\mathcal{M}}_{0,0,d[\alpha]}$ (związanej z wiązką $\mathcal{O}(5)$ na $\mathbb{CP}^4$, której przekrojami są wielomiany stopnia 5). Tutaj $V = \mathbb{CP}^4$ zaś $[\alpha] = [\mathbb{CP}^1]$ jest generatorem grupy 2-wymiarowych cykli w V indukowanym przez włożenie prostej rzutowej $\mathbb{CP}^1$.

Do obliczenia całki (5.26) Kontsevich wykorzystał działanie torusa $(\mathbb{C}^*)^4$ na V i na $\overline{\mathcal{M}}_{0,0,d[\alpha]}$. Używając pewnego wzoru Botta (uogólnienie wzoru Poincarégo–Hopfa) sprowadził całkowanie po $\overline{\mathcal{M}}_{0,0,d[\alpha]}$ do całkowania po zbiorze punktów stałych działania torusa. Wynik tego całkowania (które używa diagramów Feynmana) jest dosyć skomplikowany, ale potwierdza wartości $N(d)$ z tymi w (5.25) dla małych stopni d.

Ostatecznie równość (5.25) została jednak udowodniona ściśle matematycznie. Dokonał tego A. Givental w eleganckiej pracy [Gi]. W dowodzie Givental użył w istotny sposób idei Kontsevicha zawartych w [Ko7] oraz ekwiwariantnych kohomologii. Swój wynik określił jako zaliczenie egzaminu dojrzałości.

5.4. *Kohomologie kwantowe.* Na początku tego rozdziału podaliśmy wzór (5.1) do rekurencyjnego wyliczania liczby $N(d)$ krzywych wymiernych stopnia d przechodzących przez $3d-1$ typowych punktów w $\mathbb{CP}^2$. Teraz objaśnimy ten wzór przy pomocy niezmienników Gromova–Wittena, których aksjomatyczną teorię opracowali Kontsevich z Maninem w [KM1]. Ta praca jest bardzo techniczna, więc skoncentruję się na faktach bezpośrednio prowadzących do wyliczenia $N(d)$.

Niech V będzie zespoloną rozmaitością rzutową z wiązką kanoniczną K_V zaś $\beta \in H_2(V,\mathbb{Z})$ będzie „dodatnim” cyklem (np. $V = \mathbb{CP}^2$ i $\beta = d\beta_0 = d[\mathbb{CP}^1]$).

Niezmienniki Gromova–Wittena $I_{g,n,\beta}$ przyporządkowują elementom $\xi = \eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n \in H^*(V)^{\otimes n}$ elementy $I_{g,n,\beta}(\xi) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. Te niezmienniki spełniają szereg aksjomatów.

Nas będą interesować przypadki, gdy $\deg I_{g,n,\beta}(\xi) = \dim_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = 6g - 6 + 2n$ oraz $g = 0, n \geqslant 3$. Wtedy zachodzi warunek

$$\sum_{i=1}^{n} \deg \eta_i + 2(\beta, c_1(K_V)) - \dim_{\mathbb{R}} V = -6 + 2n.$$

W przypadku $V = \mathbb{CP}^2$ (wtedy $(\beta_0, c_1(K_V)) = -3$) ten warunek przyjmuje postać

$$\sum (\deg \eta_i - 2) = 6d - 2. \tag{5.27}$$

Liczby

$$\langle I_{0,n,\beta}\rangle(\xi) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} I_{0,n,\beta}(\xi), \qquad \xi = \eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n, \tag{5.28}$$

$\eta_j \in H^*(V,\mathbb{Z})$, mają interpretację liczby krzywych wymiernych w klasie β, których wyróżnione punkty leżą w cyklach Poincarégo dualnych do kocykli η_j.

Wyróżnijmy jeszcze dwie własności liczb (5.28):

(i) Jeśli klasa $\eta_n = \Delta_0 \in H^0(V)$ jest dualna do cyklu podstawowego i $n > 3$, to $\langle I_{0,n,\beta}\rangle(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n) = \langle I_{0,n-1,\beta}\rangle(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_{n-1})$, zaś dla $n = 3$ mamy $\langle I_{0,n,\beta}\rangle(\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \Delta_0) = 0$ gdy $\beta \neq 0$ i $\langle I_{0,n,0}\rangle(\eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \Delta_0) = \int_V \eta_1 \wedge \eta_2$.

(ii) Jeśli $\deg \eta_n = 2$, to

$$\langle I_{0,n,\beta}\rangle(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n) = (\beta, \eta_n) \cdot \langle I_{0,n-1,\beta}\rangle(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_{n-1}).$$

Zdefiniujmy potencjał Gromova–Wittena (porównaj z (5.19) i (5.21))

$$\Phi(\eta) = \sum_{n\geqslant 3}\sum_{\beta} e^{-(\beta,\omega)}\frac{1}{n!}\langle I_{0,n,\beta}\rangle(\eta^{\otimes n}), \qquad \eta \in H^*(V),$$

gdzie ω jest pewną $(1,1)$-formą, którą w dalszym ciągu będziemy przyjmować równą zeru. Dla $V = \mathbb{CP}^2$, $\omega = 0$ i $\eta = x\Delta_0 + y\Delta_1 + z\Delta_2$, gdzie $\Delta_{0,1,2}$ są generatorami $H^{0,2,4}(V)$, mamy

$$\Phi = \frac{1}{6}\int_V \eta^3 + \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{k,m}\frac{y^k}{k!}\frac{z^m}{m!}\langle I_{0,k+m,d\beta_0}\rangle(\Delta_1^{\otimes k}\otimes \Delta_2^{\otimes m}).$$

Dalej, $\frac{1}{6}\int (x\Delta_0 + y\Delta_1 + z\Delta_2)^3 = \frac{1}{2}(x^2 z + xy^2)$, zaś z (5.27) wynika, że $m = 3d - 1$. Zatem

$$\Phi = \frac{1}{2}(x^2 z + xy^2) + \varphi(y, z),$$

gdzie $\varphi(y,z) = \sum N(d)\frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!}e^{dy}$ jest funkcją (5.2).

Przy pomocy potencjału Φ można zadać nowe mnożenia w przestrzeniach stycznych $T_\eta H^*(V) = T_\eta H^*$ do przestrzeni kohomologii H^*. Jest to deformacja cup-produktu. Wybierzmy generatory ∂_a, $a = 0, \ldots, N$ (odpowiadające bazie $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$) w przestrzeni $T_\eta H^*$ i metrykę $g_{ab} = (\partial_a, \partial_b)$ zadaną wzorem

$$g_{ab} = \int_V \Delta_a \wedge \Delta_b.$$

Przez $g^{ab} = (g^{-1})_{ab}$ oznaczmy metrykę w przestrzeni dualnej. Nowe mnożenie $\circ$ określa się następująco

$$(\partial_a \circ \partial_b, \partial_c) = \partial_a\partial_b\partial_c\Phi.$$

Jeśli ∂_0 odpowiada Δ_0 z (i), to mamy $g_{ab} = \partial_0\partial_a\partial_b\Phi$.

Następna tożsamość nazywa się *równaniami WDVV* i jest równoważna jednemu z aksjomatów niezmienników Gromova–Wittena. Przy uproszczeniu, że $\deg \Delta_i$ są parzyste, przyjmuje ona następującą postać

$$\sum_{e,f}\partial_a\partial_b\partial_e\Phi \cdot g^{ef}\cdot \partial_f\partial_c\partial_d\Phi = \sum_{e,f}\partial_b\partial_c\partial_e\Phi \cdot g^{ef}\cdot \partial_f\partial_a\partial_d\Phi. \tag{5.29}$$

Równania WDVV (nazywane też równaniami łączności) oznaczają, że mnożenie $\circ$ jest łączne. Inspiracja do tych równań pochodzi od tożsamości (5.18) związanej z zszywaniem majtek. Mają one też interpretację jako pewne relacje definiujące algebry kohomologii $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$.

Dla $V = \mathbb{CP}^2$ mamy $g_{02} = g^{02} = g_{11} = g^{11} = 0$ i zerowe inne składowe metryk. Przy $a = 2, b = 1, c = 1, d = 2$ równanie (5.29) przyjmuje postać

$$\Phi_{zyx}\Phi_{zyz} + \Phi_{zyz}\Phi_{xyz} + \Phi_{zyy}\Phi_{yyz} = \Phi_{yyx}\Phi_{zzz} + \Phi_{yyz}\Phi_{xzz} + \Phi_{yyy}\Phi_{yzz}.$$

Ponieważ $\Phi_{zyx} = 0$, $\Phi_{yyx} = 1$, $\Phi_{xzz} = 0$, a inne pochodne są pochodnymi dla $\varphi(y, z)$, to dostaje się równanie na φ. Pokrywa się ono z (5.3).

B. Dubrovin [Du] rozwinął piękną teorię związaną z układem WDVV. Okazuje się ona związana z równaniami dla izomonodromicznych deformacji równań różniczkowych. W szczególności rozwiązanie (5.3) wyraża się za pomocą funkcji Painlevé.

6. Deformacyjne kwantowanie i operady

6.1. *Uniwersalny wzór dla star-produktu.* F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz i D. Sternheimer [BFFLS] zaproponowali alternatywne podejście do mechaniki kwantowej, tzw. *deformacyjne kwantowanie.* Idea polega na tym, że algebry obserwabli w mechanice kwantowej są bliskie algebrom funkcji na przestrzeni fazowej X; tworzą deformację algebry funkcji $C^\infty(X)$. Parametrem deformacji jest stała Plancka $\hbar$ i nowym iloczynem, nazywanym *gwiazdka-produktem*, na $C^\infty(X)$ jest wyrażenie

$$f \bigstar g = fg + \hbar\{f, g\} + \sum_{n\geqslant 2} \hbar^n B_n(f, g), \tag{6.1}$$

gdzie $\{f, g\}$ jest nawiasem Poissona, a $B_n : C^\infty(X) \times C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ są biliniowymi operatorami różniczkowymi. Takich „iloczynów” jest dużo, ale jeśli uwzględnić działanie nieskończenie wymiarowej *grupy cechowania* złożonej z liniowych transformacji $f \to f + \sum \hbar^n D_n f$ (gdzie D_n są operatorami różniczkowymi), to można spodziewać się jednoznaczności $\bigstar$-produktu modulo cechowanie.

Ponadto nie trzeba zakładać, że X jest rozmaitością symplektyczną. Wystarczy, aby była *rozmaitością Poissonowską*, tzn. wyposażoną w nawias Poissona $\{f, g\}$ na $C^\infty(X)$ spełniający tożsamość Jacobiego; ten nawias może być zdegenerowany. Przykładem rozmaitości Poissonowskiej jest przestrzeń dualna $\mathfrak{g}^*$ do algebry Liego $\mathfrak{g}$ z nawiasem Poissona indukowanym przez nawias Liego na elementach $\mathfrak{g}$, traktowanych jako funkcje na $\mathfrak{g}^*$.

Kontsevich w nieopublikowanym preprincie [Ko12] pokazał, że jest tylko jeden gwiazdka-produkt dla zadanej struktury Poissona α na X (modulo działanie grupy cechowania) oraz podał wzór dla operatorów B_n w (6.1). Przytoczymy ten wzór w lokalnych współrzędnych $x_1, \ldots, x_d$, w których struktura Poissonowska zapisuje się jako $\alpha = \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x)\partial_j \wedge \partial_j$.

Rozważmy zbiór G_n grafów Γ z $n+2$ wierzchołkami $V_\Gamma = \{1, \ldots, n, L, R\}$ i $2n$ krawędziami $E_\Gamma = \{e_1^1, e_1^2, e_2^1, e_2^2, \ldots, e_n^1, e_n^2\}$ takimi, że z każdego wierzchołka $k \in V_\Gamma$, $k \neq L, R$ wychodzą dwie krawędzie e_k^1 i e_k^2 i wchodzą do innego wierzchołka $m \in V_\Gamma$ (takie krawędzie oznacza się też jako $e = (k, m)$).

Z każdym grafem jest związany biliniowy operator różniczkowy

$$B_\Gamma(f,g) = \sum_{I:E_\Gamma\to\{1,\dots,d\}} \Big[\prod_{k=1}^{n}\Big(\prod_{e=(*,k)} \partial_{I(e)}\Big)\alpha^{I(e_k^1)I(e_k^2)}\Big] \times \Big(\prod_{e=(*,L)} \partial_{I(e)}\Big) f \times \Big(\prod_{e=(*,R)} \partial_{I(e)}\Big) g. \tag{6.2}$$

Tutaj sumowanie biegnie po możliwych przypisaniach indeksów krawędziom, $e \to I(e) \in \{1,\dots,d\}$, zaś $e=(*,k)$ oznacza krawędź o końcu w k.

Z każdym grafem wiąże się jego *wagę* w_Γ określoną następująco. Jeśli $p_1,\dots,p_n$ jest układem różnych punktów górnej półpłaszczyzny zespolonej $\mathbf{H} = \{\operatorname{Im} p > 0\}$, to można narysować kopię grafu Γ na $\mathbb{C}$ przez przypisanie wierzchołkom $k \in \{1,\dots,n\}$ punktów p_i; wierzchołkowi L (lewy) przypisuje się 0, a wierzchołkowi R (prawy) przypisuje się $1 \in \mathbb{C}$. Następnie każdej krawędzi $e \in E_\Gamma$, odpowiadającej uporządkowanej parze (p,q) w $\mathbf{H} \sqcup \mathbb{R}$, przypisuje się „kąt hiperboliczny” $\varphi_e = \varphi(p,q) = \frac{1}{2i}\arg\frac{q-p}{q-\bar{p}}$. Z definicji mamy

$$w_\Gamma = \frac{1}{n!(2\pi)^n}\int\dots\int_{\mathbf{H}^n\setminus\mathrm{diag}} \bigwedge_{k=1}^{n}(d\varphi_{e_k^1}\wedge d\varphi_{e_k^2}). \tag{6.3}$$

Końcowy wzór na $\bigstar$-iloczyn jest następujący

$$f\bigstar g = \sum_{n=0}^{\infty}\hbar^n\sum_{\Gamma\in B_n} w_\Gamma B_\Gamma(f,g). \tag{6.4}$$

Wypada powiedzieć kilka słów, skąd taki zdumiewający wzór powstał; w szczególności, skąd takie wagi, przypominające rozwinięcie po diagramach Feynmana w teorii Cherna–Simonsa (patrz (4.3)).

Otóż istnieją dwie różniczkowe algebry Liego z gradacją: algebra $T_{poly} = \bigoplus_{n\geqslant -1} T^n_{poly}(X) = \bigoplus \Gamma(X, \bigwedge^{n+1} TX)$ pól poly-wektorowych oraz *kompleks Hochschilda* $\mathcal{D}_{poly} = \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathcal{D}^n_{poly}(X) = \bigoplus \operatorname{Hom}(A^{\otimes(n+1)}, A)$ algebry $A = C^\infty(X)$, zadany za pomocą operatorów multi-różniczkowych. Różniczka w algebrze różniczkowej T_{poly} wynosi $d=0$, zaś różniczka w $\mathcal{D}_{poly}$ jest zadana różniczką w kompleksie Hochschilda. (Nie przytaczam wzoru na tę różniczkę, podobnie jak na dalsze algebraiczne operacje). Ponadto obie algebry (jako algebry Liego) są wyposażone w komutator $[\cdot,\cdot]$, tzn. *nawias Schoutena–Nijenhuisa* w T_{poly} i *nawias Gerstenhabera* w $\mathcal{D}_{poly}$.

Mając różniczkę d i komutator określa się *równanie Maurera–Cartana*

$$d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma,\gamma] = 0 \tag{6.5}$$

oraz działanie grupy Γ^0 potoków $\gamma \to g_\alpha^t \gamma$ zadanych równaniami $\dot{\gamma} = d\alpha + [\alpha, \gamma]$ dla $\alpha \in T_{poly}$ (lub $\alpha \in \mathcal{D}_{poly}$). Przestrzeń ilorazowa

$$\mathcal{MC} = \left\{\gamma : d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma, \gamma] = 0\right\}/\Gamma^0$$

utożsamia się z przestrzenią deformacji struktur odpowiednich różniczkowych algebr Liego z gradacją. W przypadku T_{poly} zbiór rozwiązań równania (6.4) pokrywa się ze zbiorem struktur Poissona.

Podstawowym problemem rozważanym w [Ko12] jest skonstruowanie morfizmu z T_{poly} do $\mathcal{D}_{poly}$, który byłby *quasi-izomorfizmem*, tzn. indukował izomorfizm w (odpowiednio zdefiniowanych) kohomologiach. Kontsevich zadaje ten morfizm przy pomocy wzorów (nieco bardziej złożonych niż te powyżej), w których wstępuje sumowanie po grafach Γ z pewnymi wagami w_Γ i pewnymi operatorami różniczkowymi E_Γ. Zgodność morfizmu z komutatorami prowadzi do pewnych tożsamości na współczynniki w_Γ. Okazuje się, że przy wyborze wag analogicznych jak w (6.3) te tożsamości są konsekwencją wzoru Stokesa (zastosowanego do uzwarcenia przestrzeni konfiguracji $\mathbf{H}^n \setminus \mathrm{diag}$) oraz następującego „lematu Kontsevicha":

Jeśli z n-wymiarowej zespolonej algebraicznej rozmaitości V usunąć $2n$ algebraicznych hiperpowierzchni $f_1 = \ldots = f_{2n} = 0$, to całka $\int d\arg f_1 \wedge \ldots \wedge d\arg f_n$ po tym obszarze jest zbieżna bezwzględnie i równa zeru.

6.2. *Operady.* Istnieje inne podejście do twierdzeń z poprzedniego punktu, używające pojęcia operady. Istnieją operady algebraiczne i topologiczne.

Przykładem algebraicznej operady P związanej z przestrzenią wektorową V jest układ przestrzeni wektorowych

$$P(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V), \qquad n \geqslant 0$$

z (naturalnym) działaniem grup symetrycznych $S(n)$ na $P(n)$, z elementem identycznościowym $\mathrm{id}_P \in P(1)$ i złożeniami $m_{n_1,\ldots,n_k} : P(k) \otimes [P(n_1) \otimes \ldots \ldots \otimes P(n_k)] \to P(n_1 + \ldots + n_k)$ zadanymi przez

$$(\phi, (\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_k)) \to \phi \circ (\psi_1, \ldots, \psi_k) \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes n_1} \otimes \ldots \otimes V^{\otimes n_k}, V).$$

Właśnie układ przestrzeni wektorowych $\{P(n)\}$ z działaniami $S(n)$, elementem id_P oraz złożeniami $m_{n_1,\ldots,n_k}$, spełniający przy tym pewien naturalny zespół warunków, jest *operadą.*

Przykładem topologicznej operady jest *operada małych dysków* C_d taka, że $C_d(0) = \emptyset$, $C_d(1) = \{\text{punkt}\} = \{\mathrm{id}_{C_d}\}$, zaś $C_d(n)$, $n > 1$, jest to przestrzeń konfiguracji n rozłącznych dysków $D_1, \ldots, D_n$ w jednostkowym dysku $D_0 = \{|x| \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^d$. Złożenie $C_d(k) \otimes [C_d(n_1) \otimes \ldots \otimes C_d(n_k)] \to C_d(n_1 + \ldots + n_k)$ jest uzyskane przez umieszczenie dysków z $C_d(n_i)$ w i-tym dysku z $C_d(k)$ po zastosowaniu odpowiedniego afinicznego przekształcenia (przesunięcia i jednokładności). Operada C_d jest związana z *operadą Fultona–MacPhersona*

FM_d konfiguracji punktów w $\mathbb{R}^d$. W istocie C_d i FM_d są homotopijnie równoważne.

Pewien analog operady FM_2 ma zastosowanie w deformacyjnej kwantyzacji z poprzedniego punktu, wagi w_Γ warażają się poprzez całki na przestrzeniach $FM_2(n)$. Na tym z grubsza polega operadyczne podejście do gwiazdka-produktu rozwijane w [Ko14].

P. Deligne wysunął hipotezę, że operada C_2 działa w pewien kanoniczny sposób na kompleksie Hochschilda $C^*(A, A)$ dla dowolnej łącznej algebry A. Niedawno M. Kontsevich z Y. Soibelmanem [KoSo] podali jej dowód.

Wszystko to wiąże się z teorią okresów (tj. całek po cyklach nad $\mathbb{Q}$) i teorią liczb. Chodzi o tzw. *grupę Grothendiecka–Teichmüllera*, która jest pewnym rozszerzeniem grupy Galois $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ i której nie będę definiował. Przypuszcza się, że grupa Grothendiecka–Teichmüllera jest grupą symetrii przestrzeni możliwych $\bigstar$-produktów.

Bibliografia

[Ar1] V. I. Arnold, *Teoria równań różniczkowych*, PWN, Warszawa, 1982.

[Ar2] V. I. Arnold, *The Vassiliev theory of discriminants and knots*, w: „First European Congress of Mathematics", tom I, Progress in Math. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, 3–29.

[AsMo] P. A. Aspinwall, D. R. Morrison, *Topological field theory and rational curves*, Comm. Math. Phys. 151 (1993), 245–262.

[At] M. Atiyah, *The geometry and physics of knots*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[BaKo] S. Barannikov, M. Kontsevich, *Frobenius manifolds and formality of Lie algebra of polyvector fields*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 1, 201–215.

[Ba] D. Bar-Nathan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology 34 (1995), 423–472.

[BFFLS] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization I. Deformation of symplectic structures*, Ann. Phys. 111 (1978), no. 1, 61–110.

[BIZ] D. Bessis, C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum field theory techniques in graphical enumeration*, Adv. Appl. Mat. 1 (1980), 109–157.

[COGP] P. Candelas, X. de la Ossa, P. S. Green, L. Parkes, *A pair of Calabi–Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl. Phys. B 359 (1991), 21–74; oraz w: „Essays on mirror symmetry" (S.-T. Yau, ed.), International Press, Hong Kong, 1992, 31–95; oraz w: AMS/IP Studies in Adv. Math. *9* (1998), 31–95.

[CoKa] D. A. Cox, S. Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Math. Surveys Monogr. 68, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.

[D'H] E. D'Hoker, *String theory*, w: „Quantum fields and strings. A course for mathematicians", tom II (P. Deligne and others, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, 1999, 807–1011.

[DiIt] P. DiFrancesco, C. Itzykson, *Quantum intersection rings*, w: „Moduli of algebraic curves (Texel Island, 1994)" (H. Dijkgraaf and G. van der Geer, eds.), Birkhäuser, Boston, 1995, 81–148.

[Du] B. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*, w: „Integrable systems and quantun groups" (M. Francaviglia and S. Greco, eds.), Lecture Notes in Math. 1620, Springer, 1996, 20–348.

[DuKw] B. Duplantier, K.-H. Kwon, *Conformal invariance and intersection of random walks*, Phys. Rev. Lett. 61 (1988), 2514–2517.

[ElSt] G. Ellingsgrund, S. Strømme, *The number of twisted cubics on the general quintic threefold*, Math. Scand. 76 (1995), 5–34.

[FuOn] K. Fukaya, K. Ono, *Arnold Conjecture and Gromov–Witten invariants*, Topology 38 (1999), no. 5, 933–1048.

[Gi] A. B. Givental, *Equivariant Gromov–Witten invariants*, Internat. Math. Res. Notices 13 (1996), 613–663.

[Gr] M. Gromov, *Pseudo-holomorpic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307–347.

[KKR] M. Ya. Kel'bert, M. L. Kontsevich, A. N. Ryabko, *Jackson networks on countable graphs*, Theory Probab. Appl. 33 (1988) no. 2, 358–361 (1989); po rosyjsku: Teor. Veroyatnost. i Primenen. 33 (1988) no. 2, 379–382.

[KiKo] A. A. Kirillov, M. L. Kontsevich, *The growth of the Lie algebra generated by two generic vector fields on the line*, Vestnik Moscov Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1983), no. 4, 15–20 (po rosyjsku).

[Ko1] M. L. Kontsevich, *The Virasoro algebra and Teichmüller spaces*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 21 (1987), no. 2, 78–79 (po rosyjsku).

[Ko2] M. L. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves*, Funct. Anal. Appl. 25 (1991), no. 2, 123–129; po rosyjsku: Funktsional. Anal. i Prilozhen. 25 (1991) no. 2, 50–57.

[Ko3] M. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. 147 (1992), no. 1, 1–23.

[Ko4] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, w: „The Gelfand Mathematical Seminars 1990–1992", Birkhäuser, Boston, 1993, 173–187.

[Ko5] M. Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants*, w: „I. M. Gelfand Seminar", Adv. Soviet Math. 16, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, 1993, 137–150.

[Ko6] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, w: „First European Congress of Mathematics (Paris 1992)", tom II, Progress in Math. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, 97–121.

[Ko7] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus action*, w: „Moduli of algebraic curves (Texel Island, 1994)" (H. Dijkgraaf and G. van der Geer, eds.), Birkhäuser, Boston, 1995, 335–368.

[Ko8] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, w: „Proceedings of the ICM (Zurich, 1994)", Birkhäuser, Basel, 1995, 120–139.

[Ko9] M. Kontsevich, *Mirror symmetry in dimension* 3, Séminaire Bourbaki 1994/95, Astérisque 237 (1996), Exp. No. 801, 275–293.

[Ko10] M. Kontsevich, *Lyapunov exponents and Hodge theory*, w: „The mathematical beauty of physics (Saclay 1996)", Adv. Ser. Math. Phys., 24, World Sci. Publ., River Edge, 1997, 318–332.

[Ko11] M. Kontsevich, *Product formulas for modular forms on* $O(2,n)$ (*after R. Borcherds*), Séminaire Bourbaki 1996/97, Astérisque 245 (1997), Exp. No. 821, 41–56.

[Ko12] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds. I*, preprint, 1997, http://xxx.lanl.gov/abs/q-alg/9709040.
[Ko13] M. Kontsevich, *Rozansky–Witten invariants via formal geometry*, Compositio Math. 115 (1999), no. 1, 115–127.
[Ko14] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization. Moshé Flato (1937–1998)*, Lett. Math. Phys. 48 (1999), no. 1, 35–72.
[Ko15] M. Kontsevich, *The* $1\frac{1}{2}$*-logarithm*, Appendix w: P. Ebaz-Vincent and H. Gangl, „On poly(ana)logs I", preprint, 2001.
[KM1] M. Kontsevich, Yu. Manin, *Gromov–Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. 164 (1994), no. 3, 525–562.
[KM2] M. Kontsevich, Yu. Manin, *Quantum cohomology of a product*, Invent. Math. 124 (1996), no. 1-3, 313–339.
[KM3] M. Kontsevich, Yu. Manin, *Relations between the correlators of the topological sigma-model coupled to gravity*, Comm. Math. Phys. 196 (1998), no. 2, 385–398.
[KoRo] M. Kontsevich, A. L. Rosenberg, *Noncommutative smooth spaces*, w: „The Gelfand Mathematical Seminars, 1996–1999", Birkhäuser, Boston, 2000, 85–108.
[KoSo] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, w: „Conférence Moshé Flato (Dijon 1999)", tom I, Math. Phys. Stud. 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 255–307.
[KoSu] M. L. Kontsevich, Yu. M. Suhov, *Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions*, w: „Pseudoperiodic topology", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 197, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, 9–27.
[KoVi] M. Kontsevich, S. Vishik, *Geometry of determinants of elliptic operators*, w: „Functional Analysis on the eve of the 21st century (New Brunswick, 1993)", Progr. Math. 131, Birkhäuser, Boston, 1995, 173–197.
[KoZa] M. Kontsevich, D. Zagier, *Periods*, w: „Mathematics unlimited—2001 and beyond", Springer, Berlin, 2001, 771–808.
[LSW] G. F. Lawler, O. Schramm, W. Werner, *Values of Brownian intersection exponents, II. Plane exponents*, Acta Math. 187 (2001), 275–308.
[LLMM] J. Lepovsky, J. Lindenstrauss, Yu. I. Manin, J. Milnor, *The mathematical work of the 1998 Fields medalists*, Notices Amer. Math. Soc. 46 (1999), no. 1, 17–26.
[Lo] E. Loijenga, *Motivic measures*, Séminaire Bourbaki 1999–2000 (2000), Exp. No. 874, 1–28.
[MJD] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons*: *Differential Equations*, *Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
[SeWi] G. Segal, G. Wilson, *Loop groups and equations of KdV type*, Publ. Math. IHES 61 (1985), 5–65; także po rosyjsku w: E. Presli, G. Sigal, „Grupy petel", Mir, Moskwa, 1990, 379–442.
[St] A. Strominger, *Kaluza–Klein compactifications*, *supersymmetry and Calabi –Yau spaces*, w: „Quantum fields and strings. A course for mathematicians", v. II (P. Deligne and others, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, 1999, 1091–1115.
[Ta] C. H. Taubes, *The work of Maxim Kontsevich*, w: „Proceedings of the International Congress of Mathematicians, tom I (Berlin, 1998)", Doc. Math. 1998, 119–126.
[Vo] C. Voisin, *Symmétrie mirroir*, Panoramas et synthèses 2, Soc. Math. France, Paris, 1996; po angielsku: *Mirror symmetry*, SMF/AMS Texts and Monographs 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[We] S. W e i n b e r g, *Teoria pól kwantowych. Nowoczesne zastosowania*, PWN, Warszawa, 1999.

[Wi1] E. W i t t e n, *Some applications of quantum field theory*, w: „IXth International Congress on Mathematical Physics (Swansea 1988)", IOP Publishing Ltd, 1989, 77–116.

[Wi2] E. W i t t e n, *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in Diff. Geom. 1 (1991), 243–310.

[Wi3] E. W i t t e n, *Mirror manifolds and topological field theory*, w: „Essays on mirror symmetry" (S.-T. Yau, ed.), International Press, Hong Kong, 1992, 121–159; oraz w: AMS/IP Studies in Adv. Math. 9 (1998), 121–159.

[Za] D. Z a g i e r, *Values of zeta functions and their applications*, w: „First European Congress of Mathematics (Paris 1992)", tom II, Progr. Math. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, 497–512.

[ZMNP] V.E. Z a k h a r o v, S.V. M a n a k o v, S.P. N o v i k o v, L.P. P i t a e v s k i j, *Teoria solitonov. Metod obratnoj zadači*, Nauka, Moskwa, 1980 (po rosyjsku); po angielsku: *Theory of solitons. The inverse scattering method*, Contemporary Sov. Math., Consultants Bureau, New York, 1984.