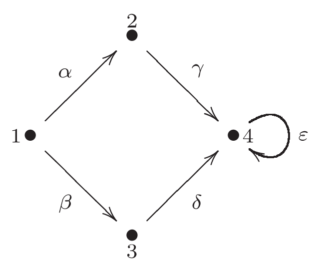
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLII (2006)

Grzegorz Bobiński (Toruń)

# Geometria rozmaitości modułów*

W tym artykule $k$ oznaczać będzie ustalone ciało algebraicznie domknięte. Od czasu wyników Gabriela [21] wiadomo, że badanie (skończenie wymiarowych) modułów nad skończenie wymiarowymi $k$-algebrami jest równoważne badaniu (skończenie wymiarowych) reprezentacji skończonych ograniczonych kołczanów. Przypomnijmy, że kołczan $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ to zorientowany graf, tzn. zbiór $\Delta_0$ wierzchołków wraz ze zbiorem $\Delta_1$ strzałek pomiędzy tymi wierzchołkami. Skończoność kołczanu oznacza, że zbiory $\Delta_0$ i $\Delta_1$ są skończone. Przykładem kołczanu jest




Drogą (zorientowaną) w kołczanie $\Delta$ nazywamy ciąg $\gamma_1 \cdots \gamma_t$ strzałek $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ takich, że koniec strzałki $\gamma_i$ jest początkiem strzałki $\gamma_{i+1}$ dla $i = 1, \ldots, t-1$. Liczbę $t$ nazywamy długością powyższej drogi. Rozważa się też drogi długości 0 związane z poszczególnymi wierzchołkami. Z kołczanem $\Delta$ stowarzysza się algebrę $k\Delta$, zwaną algebrą dróg kołczanu $\Delta$, w następujący sposób. Elementami algebry $k\Delta$ są formalne $k$-liniowe kombinacje dróg w kołczanie $\Delta$, zaś mnożenie w algebrze $k\Delta$ indukowane jest przez składanie dróg.

* Artykuł jest rozszerzoną wersją referatu wygłoszonego podczas XVI Zjazdu Matematyków Polskich odbywającego się w dniach od 5 do 9 września 2005 roku we Wrocławiu. Autor artykułu jest laureatem nagrody im. K. Kuratowskiego w roku 2005 (przypis Redakcji).

Formalną $k$-liniową kombinację dróg długości co najmniej 2 o tym samym początku i końcu nazywamy relacją w kołczanie $\Delta$; wykluczamy drogi długości 1 i 0, aby uniknąć niejednoznaczności kołczanu odpowiadającego danej algebrze. Zbiór $R$ relacji w kołczanie $\Delta$ nazywamy dopuszczalnym, jeśli istnieje liczba całkowita dodatnia $n$ taka, że wszystkie drogi długości $n$ w kołczanie $\Delta$ należą do ideału $\langle R\rangle$ generowanego przez zbiór $R$ — ten warunek jest niezbędny dla zapewnienia jednoznaczności kołczanu i jest on konieczny dla zagwarantowania skończoności wymiaru algebry $k\Delta/\langle R\rangle$. Kołczan $\Delta$ wraz z dopuszczalnym zbiorem $R$ (może być pusty) relacji nazywamy kołczanem ograniczonym. Mówimy też, że algebra $k\Delta/\langle R\rangle$ jest algebrą dróg kołczanu ograniczonego $(\Delta, R)$

Reprezentacja $M$ kołczanu $\Delta$ powstaje przez zastąpienie wierzchołków $x$ kołczanu $\Delta$ (skończenie wymiarowymi) przestrzeniami liniowymi $M_x$ oraz strzałek $\gamma : x \to y$ przekształceniami liniowymi $M_\gamma : M_x \to M_y$. Dla przykładu reprezentacją kołczanu przedstawionego powyżej jest każdy układ

$$\begin{tikzcd}
& M_2 \arrow[dr, "M_\gamma"] & \\
M_1 \arrow[ur, "M_\alpha"] \arrow[dr, "M_\beta"'] & & M_4 \arrow[loop right, "M_\varepsilon"] \\
& M_3 \arrow[ur, "M_\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

gdzie $M_1$, $M_2$, $M_3$ i $M_4$ są przestrzeniami liniowymi, zaś $M_\alpha$, $M_\beta$, $M_\gamma$, $M_\delta$ i $M_\varepsilon$ przekształceniami liniowymi pomiędzy odpowiednimi przestrzeniami. Przekształcenia liniowe $M_\gamma$, $\gamma \in \Delta_1$, w naturalny sposób indukują odwzorowania liniowe dla dróg i relacji. Reprezentacjami kołczanu ograniczonego $(\Delta, R)$ nazywamy te reprezentacje kołczanu $\Delta$, dla których odwzorowania liniowe odpowiadające relacjom ze zbioru $R$ są zerowe. Zatem, gdyby w rozważanym przykładzie założyć, że $R = \{\gamma\alpha - \delta\beta, \varepsilon^2\}$, to interesowałyby nas te reprezentacje $M$, dla których

$$M_\gamma M_\alpha = M_\delta M_\beta \qquad \text{oraz} \qquad M_\varepsilon^2 = 0.$$

Zdefiniowana w powyższy sposób kategoria równoważna jest kategorii $\operatorname{mod} k\Delta/\langle R\rangle$ (skończenie wymiarowych) modułów nad algebrą $k\Delta/\langle R\rangle$. Będziemy często utożsamiać reprezentacje kołczanu ograniczonego $(\Delta, R)$ oraz $k\Delta/\langle R\rangle$-moduły. Ponadto, dla każdej (skończenie wymiarowej) algebry $\Lambda$ istnieje kołczan ograniczony taki, że kategorie $\operatorname{mod}\Lambda$ i $\operatorname{mod} k\Delta/\langle R\rangle$ są równoważne. Będziemy zatem odtąd zakładać, że wszystkie rozważane algebry są postaci $k\Delta/\langle R\rangle$, dla kołczanów ograniczonych $(\Delta, R)$.

Ustalmy kołczan ograniczony $(\Delta, R)$. Dla reprezentacji $M$ kołczanu $(\Delta, R)$ ciąg

$$\mathbf{dim}\, M = (\dim_k M_x)_{x\in\Delta_0} \in \mathbb{N}^{\Delta_0}$$

nazywamy wektorem wymiaru reprezentacji $M$. Jeśli $M$ jest reprezentacją o wektorze wymiaru $\mathbf{d} = (d_x)_{x\in\Delta_0}$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $M_x = k^{d_x}$, $x \in \Delta_0$, a więc reprezentacja $M$ zadana jest przez przekształcenia $M_\gamma$, $\gamma \in \Delta_1$, które możemy utożsamić z odpowiadającymi im macierzami. Zauważmy, że jeśli mamy ciąg macierzy należący do przestrzeni afinicznej

$$\mathbb{A}(\mathbf{d}) = \prod_{\gamma:x\to y} \mathbb{M}(d_y, d_x),$$

to podobnie jak wcześniej indukuje on w naturalny sposób macierze odpowiadające drogom i relacjom. Zatem reprezentacje kołczanu ograniczonego $(\Delta, R)$ o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$ możemy utożsamiać z tymi ciągami macierzy należącymi do przestrzeni $\mathbb{A}(\mathbf{d})$, dla których macierze odpowiadające relacjom ze zbioru $R$ są zerowe. Zbiór takich macierzy oznaczamy $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$, gdzie $\Lambda$ jest algebrą dróg kołczanu $(\Delta, R)$. Zbiór $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ jest domkniętym (w topologii Zariskiego, patrz [2]) podzbiorem przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(\mathbf{d})$, jest więc rozmaitością afiniczną, którą nazywamy rozmaitością $\Lambda$-modułów o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$. Na rozmaitości $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ działa grupa algebraiczna $\mathrm{GL}(\mathbf{d}) = \prod_x \mathrm{GL}(d_x)$ zgodnie ze wzorem

$$(g\cdot M)_\gamma = g_y M_\gamma g_x^{-1}, \quad \gamma : x \to y.$$

Orbity tego działania odpowiadają klasom izomorfizmu $\Lambda$-modułów o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$.

Warto podkreślić, że jeśli $M$ jest $\Lambda$-modułem, to wektor wymiaru $\mathbf{dim}\, M$ modułu $M$ można zdefiniować w terminach algebr i modułów, zliczając krotności wystąpień prostych $\Lambda$-modułów jako ilorazów w ciągu kompozycyjnym (wierzchołki kołczanu $\Delta$ odpowiadają bowiem klasom izomorfizmu prostych $\Lambda$-modułów). Należy też dodać, że istnieje możliwość zdefiniowania rozmaitości modułów bez wykorzystywania języka kołczanów i ich reprezentacji. Jak pokazał Bongartz w pracy [13], oba te podejścia, mimo iż prowadzą do innych obiektów, są jednak równouprawnione z punktu widzenia geometrycznych własności rozważanych obiektów.

Będziemy odtąd swobodnie stosować podstawowe pojęcia geometrii algebraicznej takie jak nieprzywiedlność, normalność bądź wymiar $\dim \mathcal{V}$ rozmaitości $\mathcal{V}$ (patrz [28], także [2]). Wykorzystywać też będziemy elementarne definicje algebry homologicznej, w szczególności wymiar globalny $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda$ algebry $\Lambda$, oraz wymiary projektywny $\mathrm{pd}_\Lambda M$ oraz injektywny $\mathrm{id}_\Lambda M$ $\Lambda$-modułu $M$ (patrz [17], także [1]).

Zdefiniowanie rozmaitości modułów otwiera dwie podstawowe drogi stosowania ich w teorii reprezentacji algebr. Pierwszy kierunek polega na badaniu rozmaitości modułów i próbach zastosowania uzyskanej w ten sposób wiedzy do odpowiedzi na pytania stawiane w teorii reprezentacji algebr. Druga możliwość to wnioskowanie dla algebry $\Lambda$ o własnościach geometrycznych rozmaitości $\operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{\Delta_0}$, na podstawie znajomości kategorii $\operatorname{mod}\Lambda$. Przykładem wyniku wpisującego w pierwszy schemat działania jest obserwacja poczyniona przez Kashiwarę i Saito w pracy [26], zgodnie z którą elementy kanonicznej bazy ujemnej części skwantowanej algebry obejmującej stowarzyszonej z kołczanem Dynkina odpowiadają składowym nieprzywiedlnym rozmaitości modułów nad odpowiednią algebrą preprojektywną. Obserwacja ta była między innymi wykorzystywana przez Geissa i Schröera w pracy [23]. Innym zastosowaniem jest uzyskana przez Geissa w pracy [22] geometryczna charakteryzacja algebr oswojonego typu reprezentacyjnego.

Wydaje się jednak, że bardziej popularny jest kierunek prowadzący od wiedzy o kategorii modułów do własności rozmaitości modułów. Do tego właśnie nurtu należą prowadzone przeze mnie badania. Podstawowymi pytaniami, które można zadać w tym kontekście, są pytania o wymiar i składowe nieprzywiedlne rozmaitości modułów, a także jej normalność, bądź bardziej ogólnie typy osobliwości, które mogą się pojawić. W sytuacji, gdy $\Lambda$ jest algebrą dziedziczną, tzn. $\operatorname{gl.dim}\Lambda \leq 1$, co jest równoważne stwierdzeniu, że zbiór relacji w stowarzyszonym kołczanie ograniczonym jest pusty, rozmaitości $\operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{\Delta_0}$, są przestrzeniami afinicznymi, więc odpowiedzi na powyższe pytania są znane. Dla odmiany w sytuacji, gdy algebra $\Lambda$ nie jest dziedziczna oraz $\mathbf{d}$ jest wiernym wektorem wymiaru (tzn. wszystkie współrzędne wektora $\mathbf{d}$ są dodatnie), to rozmaitość $\operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ nie tylko nie jest przestrzenią afiniczną, ale jest nawet osobliwa, zatem pytania powyższe stają się interesujące.

Aby zaprezentować przykładowy wynik, niezbędne jest wprowadzenie dodatkowych definicji. Algebrę $\Lambda$ nazywamy oswojoną, jeśli dla każdego wektora wymiaru $\mathbf{d}$ istnieją odwzorowania regularne $\Phi_1, \ldots, \Phi_l : k \to \operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ takie, że dla każdego modułu nierozkładalnego $X$ o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$ istnieją indeks $i \in \{1, \ldots, l\}$ oraz element $\lambda \in k$ takie, że $X \simeq \Phi_i(\lambda)$. Nierozkładalny moduł nazywamy kierującym, jeśli nie istnieje ciąg niezerowych nieizomorfizmów pomiędzy nierozkładalnymi modułami zaczynający i kończący się w tym module.

Następujące twierdzenie zostało udowodnione wspólnie ze Skowrońskim w pracy [8].

Twierdzenie 1. *Niech* $\mathbf{d}$ *będzie wektorem wymiaru modułu kierującego nad oswojoną algebrą* $\Lambda$. *Wtedy*:

(*1*) *rozmaitość* $\operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ *jest zupełnym przekrojem i* $\dim \operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d}) = \dim \operatorname{GL}(\mathbf{d}) - 1$, (*2*) *rozmaitość* $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ *ma co najwyżej dwie składowe nieprzywiedlne*,

(*3*) *rozmaitość* $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ *jest normalna wtedy i tylko wtedy*, *gdy jest nieprzywiedlna.*

Przypuśćmy, że $\Lambda = k\Delta/\langle R\rangle$ oraz załóżmy, że zbiór $R$ jest minimalny. Wtedy w sytuacji opisanej w powyższym twierdzeniu liczba $\dim \mathrm{GL}(\mathbf{d}) - 1$ jest równa wymiarowi przestrzeni $\mathbb{A}(\mathbf{d})$ pomniejszonemu o liczbę równań opisujących rozmaitość $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ pochodzących od zbioru $R$. W ogólnym przypadku różnicę tę oznacza się symbolem $a(\mathbf{d})$. W badaniach geometrycznych można często założyć, że rozważany wektor wymiaru jest wierny. Przy tym dodatkowym założeniu wiadomo, że w sytuacji rozważanej w Twierdzeniu 1 algebra $\Lambda$ jest kwaziodwrócona, tzn. $\mathrm{gl.\,dim}\,\Lambda \le 2$ oraz dla każdego nierozkładalnego modułu $Y$, $\mathrm{pd}_\Lambda Y \le 1$ lub $\mathrm{id}_\Lambda Y \le 1$. Zatem poniższe twierdzenie pochodzące z pracy [7] stanowi naturalne uogólnienie Twierdzenia 1.

Twierdzenie 2. *Niech* $\mathbf{d}$ *będzie wektorem wymiaru nierozkładalnego modułu nad oswojoną algebrą kwaziodwróconą* $\Lambda$. *Wtedy*:

(*1*) *rozmaitość* $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ *jest zupełnym przekrojem wymiaru* $a(\mathbf{d})$,

(*2*) *rozmaitość* $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ *ma co najwyżej dwie składowe nieprzywiedlne*,

(*3*) *rozmaitość* $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ *jest normalna wtedy i tylko wtedy*, *gdy jest nieprzywiedlna.*

Faktem przyciągającym uwagę w powyższych twierdzeniach jest równoważność normalności i nieprzywiedlności rozmaitości modułów. Również inne, uzyskane w pracach [5, 9], rezultaty sugerowały istnienie związku między tymi własnościami w rozważanych sytuacjach. Obserwacja ta została potwierdzona przez uzyskane niedawno w pracy [6] następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Załóżmy*, *że* $\Lambda$ *jest algebrą kwaziodwróconą taką*, *że istnieją pełne podkategorie* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{Y}$ *kategorii modułów o następujących własnościach*:

(*1*) *podkategorie* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{Y}$ *są zamknięte ze względu na sumy proste i składniki proste*,

(*2*) *każdy* $\Lambda$*-moduł jest sumą prostą modułów z podkategorii* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{Y}$,

(*3*) $\mathrm{pd}_\Lambda M \le 1$, *dla wszystkich modułów* $M \in \mathcal{X}$, *oraz* $\mathrm{id}_\Lambda N \le 1$, *dla wszystkich modułów* $N \in \mathcal{Y}$,

(*4*) $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, M) = 0$ *oraz* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N) = 0$ *dla wszystkich modułów* $M \in \mathcal{X}$ *i* $N \in \mathcal{Y}$,

(*5*) *dla każdego wektora wymiaru* $\mathbf{d}$, *zbiory* $\{M \in \mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d}) \mid M \in \mathcal{X}\}$ *oraz* $\{N \in \mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d}) \mid N \in \mathcal{Y}\}$ *są otwarte w rozmaitości* $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$.

*Jeśli* $\mathbf{d}$ *jest wektorem wymiaru takim*, *że spełniony jest jeden z poniższych warunków*:

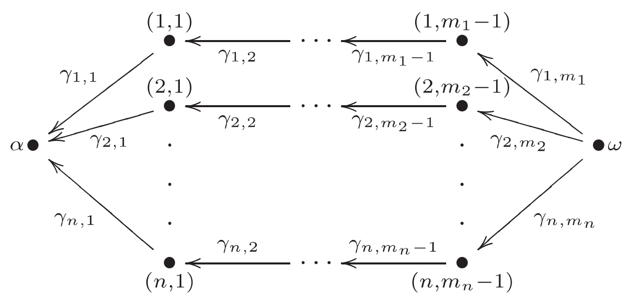
(*1*) *istnieje moduł* $M$ *o wektorze wymiaru* $\mathbf{d}$ *taki*, *że* $M \in \mathcal{X}$,

(*2*) *istnieje moduł* $N$ *o wektorze wymiaru* $\mathbf{d}$ *taki*, *że* $N \in \mathcal{Y}$, (*3*) *istnieją moduły* $X$ *i* $Y$ *o wektorze wymiaru* $\mathbf{d}$ *takie*, *że* $\mathrm{pd}_\Lambda X \leq 1$ *oraz* $\mathrm{id}_\Lambda Y \leq 1$,

*to rozmaitość* $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ *jest normalna wtedy i tylko wtedy*, *gdy jest nieprzywiedlna.*

Warto podkreślić, że dla dowolnej algebry kwaziodwróconej istnienie podkategorii $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ spełniających warunki (1)–(4) wypisane powyżej jest znane ([25]). Nie jest jednak jasne, czy można je skonstruować w ten sposób, aby spełniony był warunek (5). Wydaje się, że wykorzystując informacje o strukturze kategorii modułów nad algebrami kwaziodwróconymi uzyskane dzięki pracy [24] (patrz także [27, 30]), powinno być możliwe zweryfikowanie takiej hipotezy.

Twierdzenia 1 oraz 2 w istotnym stopniu bazowały na znajomości kategorii modułów nad oswojonymi algebrami kwaziodwróconymi (opisanych w pracach [27, 31, 33, 34]). Powyższe twierdzenie było jednym z narzędzi umożliwiających badanie rozmaitości modułów nad dzikimi (tzn. nie oswojonymi) algebrami. Obiektem zainteresowania w pracy [6] są algebry kanoniczne (w sensie Ringela [33]). Warto wspomnieć, że rozmaitości modułów nad tymi algebrami były też badane wcześniej przy pomocy innych metod przez Barota i Schröera w pracy [3]. Dla każdego ciągu $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, $n \geq 3^*$, liczb całkowitych większych od $2^{**}$ oraz ciągu $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ parami różnych niezerowych elementów ciała $k$ rozważamy kołczan




ograniczony przez relacje

$$\gamma_{1,1}\cdots\gamma_{1,m_1} + \lambda_i\gamma_{2,1}\cdots\gamma_{2,m_2} - \gamma_{i,1}\cdots\gamma_{i,m_i},\ i \in \{3, \ldots, n\}.$$

Algebrę dróg opisanego powyżej kołczanu ograniczonego nazywamy algebrą kanoniczną typu $\mathbf{m}$. Wiadomo, że algebra kanoniczna typu $\mathbf{m}$ jest oswojona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\tfrac{1}{m_1} + \cdots + \tfrac{1}{m_n} \geq n - 2.$$

* Oryginalna definicja dopuszcza także możliwość $n = 2$, jednak w tej sytuacji otrzymujemy algebry dziedziczne, więc dla prostoty rozważań pomijamy ten przypadek.

** Dla $n = 2$ dopuszcza się także przypadki, gdy $m_1 = 1$ lub $m_2 = 1$.

Szczególnym zainteresowaniem, także z geometrycznego punktu widzenia, cieszą się moduły regularne nad algebrami kanonicznymi (patrz na przykład [18, 19, 35]). Wiadomo, że wektor $\mathbf{d}$ jest wektorem wymiaru modułu regularnego nad algebrą kanoniczną typu $\mathbf{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki

$$d_\alpha = d_\omega,$$
$$(l-1)d_\alpha \leq d_{i_1,j_1} + \cdots + d_{i_l,j_l},$$

gdzie $1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n$ oraz $j_p \in \{1, \ldots, m_{i_p} - 1\}$ dla $p = 1, \ldots, l$, $l \in \{1, \ldots, n\}$.

Następujące twierdzenie zostało udowodnione w pracy [6]:

TWIERDZENIE 4. *Niech $\Lambda$ będzie algebrą kanoniczną typu $\mathbf{m}$. Wtedy rozmaitość $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ jest normalna dla każdego wektora wymiaru $\mathbf{d}$ $\Lambda$-modułu regularnego wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\tfrac{1}{m_1-1} + \cdots + \tfrac{1}{m_n-1} > 2n - 5.$$

Powróćmy teraz do rozważanej wcześniej sytuacji modułu kierującego $X$ nad algebrą oswojoną $\Lambda$. Wiadomo, że w tym przypadku jedną ze składowych nieprzywiedlnych rozmaitości $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{dim}\, X)$ jest domknięcie $\overline{\mathcal{O}}_X$ $\mathrm{GL}(\mathbf{dim}\, X)$-orbity $\mathcal{O}_X$ modułu $X$. Zgodnie ze wspólnym wynikiem autora i Zwary uzyskanym w pracy [12] składowa ta jest normalna także w sytuacji, gdy cała rozmaitość nie jest nieprzywiedlna. Jeśli założymy (co nie powoduje utraty ogólności rozważań), że wektor wymiaru modułu $X$ jest wierny, to wiadomo, że $\mathrm{pd}_\Lambda X \leq 1$ oraz $\mathrm{id}_\Lambda X \leq 1$ (patrz [33]). Zatem składowa $\overline{\mathcal{O}}_X$ jest szczególnym przypadkiem składowych opisanych przez Barota i Schröera w pracy [3]. Dokładniej, pokazali oni, że jeśli $\mathbf{d}$ jest wektorem wymiaru nad algebrą kwaziodwróconą $\Lambda$, to domknięcie $\mathcal{P}(\mathbf{d})$ zbioru modułów projektywnego wymiaru co najwyżej 1 jest (o ile jest niepuste) składową nieprzywiedlną rozmaitości $\mathrm{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$. Podobnie rzecz ma się z domknięciem $\mathcal{I}(\mathbf{d})$ zbioru składającego się z modułów injektywnego wymiaru co najwyżej 1. Zatem udowodnienie następującej hipotezy stanowiłoby uogólnienie wspomnianego wyżej wyniku, a zarazem dawałoby bardziej dokładne zrozumienie Twierdzenia 3.

HIPOTEZA. *Niech $\Lambda$ będzie algebrą kwaziodwróconą. Wtedy dla dowolnego wektora wymiaru $\mathbf{d}$ składowe $\mathcal{P}(\mathbf{d})$ i $\mathcal{I}(\mathbf{d})$ są normalne.*

W poprzednim akapicie widać było, że w szczególnych sytuacjach pytania o własności rozmaitości modułów (ogólniej, składowych nieprzywiedlnych rozmaitości modułów) sprowadzają się do badania domknięć orbit modułów. Ten kierunek badań był i jest rozwijany niezależnie od badań rozmaitości modułów (patrz na przykład [4, 14, 32, 39]). Przez długi czas uwagę matematyków zajmujących się tą problematyką zaprzątał problem scharakteryzowania w terminach algebraicznych, kiedy $M \in \overline{\mathcal{O}}_N$ dla $\Lambda$-modułów $M$

i $N$ o tym samym wektorze wymiaru. Bongartz udowodnił w pracy [15], że jeśli istnieje ciąg dokładny postaci

$$0 \to U \to N \to V \to 0$$

taki, że $M \simeq U \oplus V$, to $M \in \overline{\mathcal{O}}_N$. Z drugiej strony Riedtmann pokazała w pracy [32], że jeśli $M \in \overline{\mathcal{O}}_N$, to

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(M, U) \geq \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(N, U)$$

dla dowolnego $\Lambda$-modułu $U$. Uogólniła ona także powyższą obserwację Bongartza dowodząc, że jeśli istnieje ciąg dokładny postaci

$$0 \to Z \to Z \oplus N \to M \to 0$$

dla pewnego $\Lambda$-modułu modułu $Z$, to $M \in \overline{\mathcal{O}}_N$. Zwara pokazał w pracy [37], że ostatni z powyższych warunków jest równoważny przynależności modułu $M$ do domknięcia orbity modułu $N$.

Badaniami dotykającymi głębiej struktury geometrycznej domknięć orbit są pytania o typy osobliwości, które mogą się pojawić w tym kontekście. Tego rodzaju pytania są ważne i nietrywialne także w przypadku algebr dziedzicznych, a więc algebr dróg kołczanów bez relacji. Następujące twierdzenie podsumowuje wyniki uzyskane przez autora wspólnie ze Zwarą w pracach [10, 11].

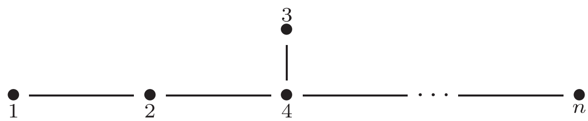
TWIERDZENIE 5. *Niech $\Delta$ będzie kołczanem Dynkina typu $\mathbb{A}_n$, $n \geq 1$, lub typu $\mathbb{D}_n$, $n \geq 4$. Wtedy dla każdej reprezentacji $X$ kołczanu $\Delta$ domknięcie jej orbity w rozmaitości* $\operatorname{mod}_{k\Delta}(\mathbf{dim}\, X)$ *jest normalną rozmaitością Cohena–Macaulaya.*

Przypomnijmy, że kołczan $\Delta$ nazywamy kołczanem Dynkina typu $\mathbb{A}_n$, $n \geq 1$, jeśli stowarzyszony z nim (niezorientowany) graf $\overline{\Delta}$ (tzn. graf posiadający te same wierzchołki co kołczan $\Delta$ i w którym strzałki kołczanu $\Delta$ zostały zastąpione krawędziami) jest postaci


Podobnie, kołczan $\Delta$ nazywamy kołczanem Dynkina typu $\mathbb{D}_n$, $n \geq 4$, gdy graf $\overline{\Delta}$ jest postaci


Wspólną cechą kołczanów powyższych dwóch typów jest to, iż są to kołczany skończonego typu reprezentacyjnego, tzn. jeśli $\Delta$ jest kołczanem jednego z powyższych dwóch typów, to istnieje tylko skończenie wiele parami nieizomorficznych nierozkładalnych reprezentacji kołczanu $\Delta$.

Przykład przedstawiony przez Zwarę w [38] pokazuje, że wynik analogiczny do Twierdzenia 5 nie może zachodzić dla kołczanów, które nie są skończonego typu reprezentacyjnego. Otwarte pozostaje pytanie, czy twierdzenie to jest prawdziwe dla pozostałych kołczanów skończonego typu reprezentacyjnego, a więc kołczanów typu $\mathbb{E}_n$, $n = 6, 7, 8$, gdzie $\mathbb{E}_n$, $n \geq 6$, jest grafem postaci




Na koniec zaznaczmy, że istotnym elementem w dowodzie powyższego twierdzenia była możliwość porównania osobliwości pojawiających się w domknięciach orbit modułów z osobliwościami występującymi w rozmaitościach Schuberta w rozmaitościach flag ([29, 36]) oraz odpowiednich produktach grassmanianów ([16, 20]).

### Literatura


[1] S. Balcerzyk, *Wstęp do algebry homologicznej*, Biblioteka Matematyczna **34**, PWN, Warszawa, 1970.

[2] S. Balcerzyk, T. Józefiak, *Pierścienie przemienne*, Biblioteka Matematyczna **58**, PWN, Warszawa, 1985.

[3] M. Barot, J. Schröer, *Module varieties over canonical algebras*, J. Algebra **246** (2001), 175–192.

[4] J. Bender, , K. Bongartz, *Minimal singularities in orbit closures of matrix pencils*, Linear Algebra Appl. **365** (2003), 13–24.

[5] G. Bobiński, *Geometry of decomposable directing modules over tame algebras*, J. Math. Soc. Japan, **54** (2002), 609–620.

[6] —, *Geometry of regular modules over canonical algebras*, Tran. Amer. Math. Soc., w druku.

[7] G. Bobiński, A. Skowroński, *Geometry of modules over tame quasi-tilted algebras*, Colloq. Math. **79** (1999), 85–118.

[8] —, —, *Geometry of directing modules over tame algebras*, J. Algebra **215** (1999), 603–643.

[9] —, *Geometry of periodic modules over tame concealed and tubular algebras*, Algebr. Represent. Theory **5** (2002), 187–200.

[10] G. Bobiński, G. Zwara, *Normality of orbit closures for Dynkin quivers of type* $\mathbb{A}_n$, Manuscripta Math. **105** (2001), 103–109.

[11] G. Bobiński, G. Zwara, *Schubert varieties and representations of Dynkin quivers*, Colloq. Math. **94** (2002), 285–309.

[12] —, *Normality of orbit closures for directing modules over tame algebras*, J. Algebra **298** (2006), 120–133.

[13] K. Bongartz, *A geometric version of the Morita equivalence*, J. Algebra **139** (1991), 159–171.

[14] —, *Minimal singularities for representations of Dynkin quivers*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), 575–611.

[15] —, *On degenerations and extensions of finite-dimensional modules*, Adv. Math. **121** (1996), 245–287.

[16] M. Brion, *Multiplicity-free subvarieties of flag varieties*, in: *Commutative Algebra (Grenoble/Lyon, 2001)*, Contemp. Math. **331**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 13–23.

[17] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

[18] M. Domokos, H. Lenzing, *Invariant theory of canonical algebras*, J. Algebra **228** (2000), 738–762.

[19] —, *Moduli spaces for representations of concealed-canonical algebras*, J. Algebra **251** (2002), 371–394.

[20] D. Eisenbud, J. Harris, *The Geometry of Schemes*, Graduate Texts in Mathematics **197**, Springer-Verlag, New York, 2000.

[21] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen. I*, Manuscripta Math. **6** (1972), 71–103.

[22] Ch. Geiss, *On degenerations of tame and wild algebras*, Arch. Math. (Basel) **64** (1995), 11–16.

[23] Ch. Geiss, J. Schröer, *Varieties of modules over tubular algebras*, Colloq. Math. **95** (2003), 163–183.

[24] D. Happel, *A characterization of hereditary categories with tilting object*, Invent. Math. **144** (2001), 381–398.

[25] D. Happel, I. Reiten, S. Smalø, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **120** (1996), viii+ 88.

[26] M. Kashiwara, Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. J. **89** (1997), 9–36.

[27] O. Kerner, , *Tilting wild algebras*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), 29–47.

[28] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

[29] V. Lakshmibai, P. Magyar, *Degeneracy schemes, quiver schemes, and Schubert varieties*, Internat. Math. Res. Notices **1998** (1998), 627–640.

[30] H. Lenzing, A. Skowroński, *Quasi-titled algebras of canonical type*, Colloq. Math. **71** (1996), 161–181.

[31] J. A. de la Peña, *Tame algebras with sincere directing modules*, J. Algebra **161** (1993), 171–185.

[32] Ch. Riedtmann, *Degenerations for representations of quivers with relations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), 275–301.

[33] C. M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Mathematics **1099**, Springer, Berlin, 1984.

[34] A. Skowroński, *Tame quasi-tilted algebras*, J. Algebra **203** (1998), 470–490.

[35] A. Skowroński, J. Weyman, *Semi-invariants of canonical algebras*, Manuscripta Math. **100** (1999), 391–403.

[36] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.

[37] G. Zwara, *Degenerations of finite-dimensional modules are given by extensions*, Compositio Math. **121** (2000), 205–218.

[38] —, *An orbit closure for a representation of the Kronecker quiver with bad singularities*, Colloq. Math. **97** (2003), 81–86.

[39] —, *Regularity in codimension one of orbit closures in module varieties*, J. Algebra **283** (2005), 821–848.

Grzegorz Bobiński
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87–100 Toruń
e-mail:gregbob@mat.uni.torun.pl