ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVII (2001)

Jarosław Górnicki (Rzeszów)

Podstawy nieliniowej teorii ergodycznej

1. Wstęp. Świat materialny postrzegany przy pomocy zmysłów składa się z obiektów *makroskopowych* tj. takich, których rozmiary są olbrzymie w porównaniu z rozmiarami atomów (wielkość atomu jest rzędu 10^{-10} m). Podejmując badanie typowego układu makroskopowego, zawierającego około 10^{25} atomów (cząsteczek) napotykamy na dwie zasadnicze trudności:

— jednoczesne (szybkie) zbadanie 10^{25} oddziałujących wzajemnie cząsteczek przekracza nasze możliwości,
— nie mamy możliwości śledzenia zachowania się pojedynczej cząsteczki.

Zmusza to nas poszukiwania metod umożliwiających zrozumienie (odkrycie) własności badanego układu makroskopowego w oparciu o minimalną liczbę podstawowych pojęć.

Pierwsze badania tego typu problematyki wiążą się z powstaniem *termodynamiki* (czyli badaniami zjawisk cieplnych w układach makroskopowych) i *kinetycznej teorii materii* (której celem jest wyjaśnienie własności obiektów makroskopowych w oparciu o ruch i oddziaływania mikroskopijnych składników). W przypadku termodynamiki możliwe są dwa podejścia: *fenomenologiczne* i *statystyczne.*

Podejście fenomenologiczne nie uwzględnia faktu, że obiekt makroskopowy składa się z dużej ilości mikrocząsteczek. Opiera się ono na założeniu ciągłości zachodzących zjawisk fizycznych i opisuje układy makroskopowe za pomocą ich własności fizycznych, odkrytych metodami doświadczalnymi (podstawą są zasady termodynamiki).

Podejście statystyczne traktuje układ makroskopowy jako zbiór dużej ilości mikrocząsteczek, którego parametry można wyznaczyć metodami rachunkowymi na podstawie własności atomów (cząsteczek) tworzących dany układ. Podstawy podejścia statystycznego, a w konsekwencji mechaniki statystycznej, zawdzięczamy pracom R. E. Clausiusa, J. C. Maxwella, L. E. Boltzmanna z lat 1856–1868 poświęconych termodynamice gazów oraz pracom J. W. Gibbsa, który w 1902 roku ogłosił podstawy termodynamiki dla ciał stałych i cieczy. Ich badania zostały oparte na gruncie teorii atomistycznej (w owym czasie nie potwierdzonej jeszcze doświadczalnie!) oraz założeniu, że cząsteczki znajdują się w ciągłym chaotycznym ruchu, a ich prędkości zależą od temperatury. Dodatkową trudnością w owym czasie był brak podstaw teorii prawdopodobieństwa (jej aksjomatycznie sformułowanie zostało podane przez A. N. Kołmogorowa dopiero w 1933 r.).

Rozwojowi kinetycznej teorii materii towarzyszyły dramatyczne wydarzenia. Próby wyjaśniania zjawisk termodynamicznych przy pomocy zjawisk mechanicznych (zderzeń atomów, cząsteczek) często prowadziły do zaskakujących interpretacji. Było to szczególnie przykre dla austriackiego fizyka Ludwiga Boltzmanna (1844–1906), którego teorie nie zostały zrozumiane przez jemu współczesnych. Zarzucano Boltzmannowi, że jego statystyczna teoria dopuszcza możliwość zachodzenia procesów, których nie można obserwować (J. Loschmidt, E. Zermelo). Związane to było między innymi z wątpliwościami wpływowych fizyko-chemików (z E. Machem i W. Ostwaldem na czele) co do istnienia atomów. Boltzmann popełnił samobójstwo w 1906 roku, na dwa lata przed doświadczalnym potwierdzeniem, że atomy istnieją (J. Perrin).

2. Wyobraźnia pionierów. W twórczości Boltzmanna szczególną rolę odgrywała jego *hipoteza ergodyczna* z 1868 roku (zob. [4], [9], [25]) (wyraz ergodyczny pochodzi od greckich słów $\acute{\varepsilon}\rho\gamma o\nu$ – praca rozumiana jako energia i $\acute{o}\delta o\zeta$ – droga), którą formułował następująco: *duża nieregularność ruchu cieplnego i zmienność sił zewnętrznych działających na ciało stwarza duże prawdopodobieństwo, że atomy w ruchu cieplnym mogą przyjmować wszystkie wartości położeń i pędów zgodnie z ustaloną energią wewnętrzną ciała...* Boltzmann usiłował ją udowodnić, by móc zastąpić średnią przestrzenną po dużej liczbie układów w tej samej chwili przez średnią czasową jednego układu (po nieskończenie długim przedziale czasowym). Jednak w tak kategorycznym sformułowaniu hipoteza ta okazała się nieprawdziwa (A. Rosenthal, M. Plancherel, 1913). P. i T. Ehrenfestowie w swoim przeglądzie mechaniki statystycznej (*Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften*, 1912, Bd. IV, Art. 32) wysunęli łagodniejszą *hipotezę quasi-ergodyczną*, zgodnie z którą *izolowany układ mechaniczny o energii E i dużej liczbie stopni swobody po dostatecznie długim czasie będzie samorzutnie przechodził dowolnie blisko jakiegokolwiek stanu układu o tej samej energii.*

Aby podać jej matematyczne sformułowanie przypomnijmy pewne pojęcia. Niech $E = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną, $\mu(\Omega) < +\infty$. O mierzalnej transformacji $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$ mówimy, że *zachowuje miarę*, jeśli dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ mamy $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, gdzie $T^{-1}(A) = \{\omega : T(\omega) \in A\}$. Na przykład, na odcinku $[0, 2\pi]$ z σ-ciałem zbiorów borelowskich i miarą unormowaną Lebesgue'a μ, dla dowolnie ustalonego $\alpha \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $Tx = (x + \alpha) \pmod{2\pi}$ zachowuje miarę. Korzystając z tej terminologii możemy sformułować hipotezę quasi-ergodyczną następująco:

Niech E będzie przestrzenią z miarą skończoną, $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ półgrupą przekształceń mierzalnych $\Phi_t : \Omega \to \Omega$ takich, że dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset E$ zachodzi $\mu(A) = \mu(\Phi_{-t}(A))$ w każdej chwili $t \geqslant 0$. Jeżeli $A \subset E$ jest zbiorem mierzalnym, to dla prawie każdego punktu $x \in E$,

$$\mu(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_A(\Phi_s(x))\, ds,$$

gdzie χ_A jest funkcją charakterystyczną zbioru A, a $\Phi_t(x)$ oznacza trajektorię punktu x.

Mówiąc poglądowo: średni czas przebywania trajektorii (orbity) prawie każdego punktu $x \in \Omega$ w zbiorze $A \subset \Omega$ jest równy mierze tego zbioru.

Kolejnym rezultatem, ważnym dla teorii ergodycznej i pracy Boltzmanna, było twierdzenie H. Poincarégo [23] o powracaniu z 1890 roku (dla dowodu zob. [11], [26]):

Twierdzenie 1. *Niech E będzie przestrzenią z miarą skończoną. Jeżeli T jest transformacją zachowującą miarę, to T jest transformacją nieskończenie powracającą, tzn. dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset \Omega$ i prawie każdego $x \in A$ jest $T^n x \in A$ dla nieskończenie wielu n.*

Rezultat ten, dotyczący ogólnego charakteru ruchu, jest zaskakujący! Bardziej wierzymy, że *nie można dwa razy wejść do tej samej rzeki* niż w to, że *izolowany układ bardzo wielu cząsteczek, w toku mechanicznej ewolucji, powraca dowolnie blisko stanu, od którego ewolucja się rozpoczęła* (*prawie każdy poruszający się punkt wielokrotnie powraca dowolnie blisko swojego wyjściowego położenia*). Powodem naszych wątpliwości jest to, że nie obserwujemy takich zjawisk. Z drugiej jednak strony, korzystając powszechnie z osiągnięć L. Pasteura (mikrobiologa) wiemy, że jeśli czegoś nie dostrzegamy na co dzień, to wcale to nie oznacza, że tego nie ma. Aby wyjaśnić istotę twierdzenia Poincarégo wyobraźmy sobie naczynie prostopadłościenne, które można podzielić pionową przegrodą na dwie równe części, zawierające gaz doskonały składający się z N cząsteczek. Załóżmy, że na skutek bezładnego ruchu cząsteczek ich rozmieszczenie między połówkami naczynia zmienia się co sekundę. Wówczas dla $N = 10$ przeciętnie tylko raz na $2^{10} = 1024$ sekundy (≈ 17 minut) możemy zaobserwować, że prawa połówka naczynia jest pusta (prawdopodobieństwo znalezienia się wszystkich N cząsteczek w lewej połowie naczynia wynosi $p_N = 2^{-N}$). Jednak dla 1 cm^3 gazu, który zawiera około 10^{19} cząsteczek, średni czas oczekiwania na zajście takiego zjawiska byłby już niewiarygodnie długi ($\approx 10^{3\cdot 10^{18}}$ sekund, a wiek Wszechświata oceniany jest „tylko” na 10^{10} lat $\approx 3{,}15 \cdot 10^{17}$ sekund). W tym tkwi sedno sprawy! O zaskakujących zastosowaniach twierdzenia o powracaniu pisze W. I. Arnold [1].

3. Klasyczne twierdzenia ergodyczne. Powyższe osiągnięcia zapoczątkowały żmudną pracę mającą na celu matematyczne potwierdzenie prawdziwości hipotezy quasi-ergodycznej. Pierwsze twierdzenia ergodyczne pojawiły się dopiero na początku lat trzydziestych XX wieku. Wykazali je D. G. Birkhoff [3] w 1931 roku i J. von Neumann [21] w 1932 roku.

Twierdzenie Birkfoffa, zwane indywidualnym (punktowym) twierdzeniem ergodycznym, jest następujące (zob. [10], [26]):

TWIERDZENIE 2. *Niech* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *będzie przestrzenią z miarą skończoną i niech* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Jeżeli* $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$ *jest transformacją zachowującą miarę, to istnieje funkcja* $\overline{f} \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *taka, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \overline{f}(x)$$

dla prawie każdego (w sensie miary μ*)* $x \in \Omega$, $\overline{f}(Tx) = \overline{f}(x)$ *i* $\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega \overline{f}\, d\mu$.

Aby zaprezentować pewne konsekwencje tego twierdzenia przypomnijmy niezbędne pojęcia.

Niech T będzie transformacją zachowującą miarę na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zbiór $A \in \mathcal{A}$ nazywamy *niezmienniczym* (względem transformacji T), jeśli $A = T^{-1}(A)$. Transformację T nazywamy *ergodyczną* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niezmienniczego zbioru A mamy bądź $\mu(A) = 0$ bądź $\mu(\Omega - A) = 0$. Na przykład, gdy $\Omega = [0, 2\pi]$, $\mathcal{A}$ jest σ-ciałem borelowskim jego podzbiorów i μ miarą unormowaną Lebesgue’a na Ω, to transformacja dana wzorem $Tx = (x + \alpha) \pmod{2\pi}$, jest ergodyczna wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{\alpha i}$ nie jest pierwiastkiem z 1.

Jeżeli T jest transformacją ergodyczną, to przyjmując $f = \chi_A$ (χ_A jest funkcją charakterystyczną), otrzymujemy $\overline{f} = \mu(A)/\mu(\Omega)$ prawie pewne, czyli częstość powrotu punktu x do zbioru mierzalnego A jest zbieżna prawie wszędzie do „względnej” miary zbioru A (w przypadku $\mu(\Omega) = 1$ do prawdopodobieństwa A). Zatem mocne prawo wielkich liczb Borela–Bernoulliego jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Birkhoffa. Twierdzenie Birkhoffa uogólnia również prawo wielkich liczb Kołmogorowa (zob. [16], [11]). Topologiczne zagadnienia związane z tym twierdzeniem prezentowane są w pracy [20], a pewne dygresje z historią odkrycia twierdzeń ergodycznych przez Birkhoffa i von Neumanna podaje S. Ulam [27, rozdz. 4, 5].

Dla naszych dalszych rozważań szczególne znaczenie ma wynik von Neumanna (zwany statystycznym (średnim) twierdzeniem ergodycznym), który przypomnimy w sformułowaniu dla operatorów unitarnych w przestrzeni Hilberta, niekoniecznie związanych z jakimś układem dynamicznym (zob. [11]):

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli H jest przestrzenią Hilberta i $T : H \to H$ operatorem unitarnym, $F(T) = \{x \in H : Tx = x\}$, to dla dowolnego $x \in H$ istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x = Px,$$

gdzie P jest projekcją ortogonalną na zbiór $F(T)$.

Należy w tym miejscu odnotować, że S. Mazur na posiedzeniu Lwowskiego Oddziału PTM, 19.XI.1932 roku, anonsował następujący rezultat (zob. [19], str. 219):

TWIERDZENIE 4. *Niech E będzie przestrzenią Banacha, w której każdy ciąg ograniczony ma podciąg słabo zbieżny do pewnego elementu przestrzeni E. Jeżeli A jest operatorem liniowym na E z normą $\|A\| = 1$, to ciąg średnich $S_n x = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} A^k x$, $n = 1, 2, \ldots$, jest słabo zbieżny dla każdego $x \in E$.*

Wyniku tego, ani jego uzasadnienia S. Mazur nigdy nie opublikował. Natomiast w 1941 roku K. Yosida i S. Kakutani [28] opublikowali następujące rozszerzenie rezultatu von Neumanna, które zawiera również wynik Mazura:

TWIERDZENIE 5. *Niech E będzie przestrzenią Banacha i $T : E \to E$ odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że:*

1. *istnieje $C > 0$ takie, że $\|T^n\| \leqslant C$ dla $n = 1, 2, \ldots$,*
2. *dla dowolnego $x \in E$, ciąg $S_n x = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$, $n = 1, 2, \ldots$, zawiera podciąg słabo zbieżny do punktu $y \in E$.*

Wtedy $y = Ty$ i $S_n x \to y$, gdy $n \to +\infty$.

D o w ó d. Niech $x \in E$. Z założenia istnieje podciąg $\{S_{n_\nu} x\}_{\nu=1,2,\ldots}$ ciągu $\{S_n x\}_{n=1,2,\ldots}$ słabo zbieżny do punktu $y \in E$. Pokażemy, że $y = Ty$. Zauważmy, że

$$(1)\quad \|TS_n x - S_n x\| = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k x - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x \right\| = \frac{1}{n} \|T^n x - x\| \leqslant \frac{C+1}{n} \|x\|.$$

Korzystając teraz z dwóch prostych faktów (symbol $\rightharpoonup$ będzie oznaczał słabą zbieżność):

- liniowy ograniczony operator odwzorowuje ciągi słabo zbieżne w ciągi słabo zbieżne;
- jeśli $z_n \rightharpoonup z$ i $\|z_n\| \to 0$, to $z = 0$,

oraz przyjmując w nierówności (1) $n = n_\nu$, przechodząc do granicy z $\nu \to +\infty$, otrzymujemy $y = Ty$.

W kolejnym etapie pokażemy, że ciąg $\{S_n x\}_{n=1,2,\ldots}$ jest mocno zbieżny do elementu $y \in E$.

Przedstawmy wektor $x \in E$ w postaci $x = y + (x - y)$. Wówczas dzięki temu, że $y = Ty$ mamy $S_n x = y + n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x - y)$ i aby otrzymać tezę wystarczy wykazać, że ciąg $\{n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x-y)\}_{n=1,2,\ldots}$ zbiega mocno do 0 przy $n \to +\infty$. W tym celu niech $E_1 = \overline{(I - T)(E)}$ będzie podprzestrzenią będącą domknięciem zbioru wartości operatora $(I - T)$. Twierdzenie Hahna–Banacha gwarantuje, że podprzestrzeń ta jest słabo domknięta. Ponieważ

$$x - S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (I - T^k)x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (I - T)(I + T + \ldots + T^{k-1})x \in (I - T)(E)$$

oraz $x - S_{n_\nu} x \rightharpoonup x - y$ przy $\nu \to +\infty$, więc $x - y \in E_1$. W tej sytuacji pokażemy, że $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k z \to 0$ przy $n \to +\infty$ dla każdego $z \in E_1$. Jeśli $z \in (I - T)(E)$, tzn. $z = a - Ta$, to

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k z \right\| = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(a - Ta) \right\| = \frac{1}{n} \|a - T^n a\| \leqslant \frac{C + 1}{n} \|a\| \to 0,$$

gdy $n \to +\infty$. Niech teraz $t \in \overline{(I - T)(E)}$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje element $z = a - Ta$ taki, że $\|t - z\| < \varepsilon$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k t \right\| &\leqslant \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k z \right\| + \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k (t - z) \right\| \\ &\leqslant \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k z \right\| + \left(C + \frac{1}{n} \right) \varepsilon \to 0, \end{aligned}$$

gdy $n \to +\infty$ i $\varepsilon \to 0$, co kończy uzasadnienie twierdzenia. □

W powyższym twierdzeniu można podać również pewną charakteryzację punktu granicznego (podobnie jak w wypowiedzi Twierdzenia 3), ale zagadnienia tego nie będziemy omawiać.

Wspomnieć należy, że od około 1960 roku, za sprawą prac A. N. Kołmogorowa, jego ucznia J. Sinaja, dzięki subtelnym uogólnieniom fizycznych pojęć (m.in. entropii), w ramach teorii ergodycznej zostały stworzone narzędzia do prowadzenia znacznie pogłębionej analizy statystycznego zachowania się układów makroskopowych (mechanicznych) oraz tzw. układów dynamicznych. Dzięki temu problemy teorii ergodycznej budzą zainteresowanie nie tylko fizyków i matematyków, lecz również biologów, chemików i innych. W wyniku prac J. Sinaja, D. Ornsteina i innych (zob. [11]) uzyskano zaskakujący wniosek: garść dość prostych hipotez statystycznych pociąga za sobą fakt, że zachowanie układu mechanicznego (makroskopowego) jest równoważne – co do swojej struktury probabilistycznej – jednemu ze standardowych eksperymentów Bernoulliego z rzucaniem monet. Stosując twierdzenia ergodyczne, uzyskuje się zatem bardzo silne wnioski dotyczące asymptotycznego zachowania się takich złożonych układów.

4. Nieliniowe twierdzenie ergodyczne. Na pojawienie się pierwszego rezultatu typu ergodycznego, ale dotyczącego odwzorowań nieliniowych, przyszło czekać aż do połowy lat siedemdziesiątych XX wieku.

Brak prostych kryteriów charakteryzujących zbiory zwarte w przestrzeniach o nieskończonym wymiarze jest naturalnym wyzwaniem do poszukiwania, na innej drodze niż argumentacja zwartościowa, warunków gwarantujących istnienie punktów niezmienniczych (stałych) dla pewnych typów odwzorowań ciągłych. W pierwszej kolejności uwagę skupiono na tzw. odwzorowanich *nieoddalających* (tak nazywamy odwzorowania $T : C \to C$, gdzie C jest podzbiorem przestrzeni Banacha, które spełniają warunek: $\forall_{x,y\in C}\|Tx - Ty\| \leqslant \|x - y\|$), gdyż tego typu odwzorowania określone na dowolnym niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorze przestrzeni Banacha mają punkty, które są dowolnie mało przesuwalne. Jednak określenie dostatecznie ogólnych warunków (nie odwołujących się do argumentów zwartościowych!), gwarantujących istnienie punktów niezmienniczych dla odwzorowań nieoddalających, okazało się zadaniem trudnym.

Na przykład, translacja przestrzeni o niezerowy wektor, obrót pierścienia na płaszczyźnie o kąt $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, są prostymi przykładami izometrii bez punktów stałych. Sytuacja taka (brak punktu stałego) jest również możliwa, gdy dziedzina odwzorowania jest zbiorem ograniczonym i wypukłym! W przestrzeni $C[0,1]$ z normą maksimum zbiór

$$A = \{f \in C[0,1] : 0 = f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1) = 1\}$$

jest domknięty, wypukły i ograniczony. Odwzorowanie $T : A \to A$ dane wzorem $Tf(t) = t \cdot f(t)$ jest nieoddalające i nie ma punktu stałego.

Przełom w badaniach nad istnieniem punktów niezmienniczych dla odwzorowań nieoddalających nastąpił w 1965 roku za sprawą prac F. E. Browdera [5], [6], D. Göhdego [15], W. A. Kirka [18], które, jak szybko się okazało, zapoczątkowały nową gałąź analizy funkcjonalnej – metryczną teorię punktów stałych, zob. [12], [13]. Rezultaty Browdera, Göhdego, Kirka dotyczyły m.in. wyróżnionych przez J. A. Clarksona w 1936 roku *jednostajnie wypukłych* przestrzeni Banacha. Przypomnijmy, że są to przestrzenie, w których dla dowolnego $\varepsilon \in (0,2]$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolych x, y z domkniętej kuli jednostkowej tej przestrzeni, spełniających zależność $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$, zachodzi $\|(x+y)/2\| < 1-\delta$. Przestrzenie Hilberta, przestrzenie L^p, $1 < p < +\infty$, są jednostajnie wypukłe, natomiast wspomniana przestrzeń $C[0,1]$ taka nie jest. Dla tego typu przestrzeni mamy:

Twierdzenie 6. *Jeżeli C jest niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorem jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha, to każde odwzorowanie nieoddalające $T : C \to C$ ma punkt stały.*

Podamy dowód tego twierdzenia wykorzystując pojęcie asymptotycznego centrum ciągu, wprowadzone przez M. Edelsteina w 1972 roku. Przypomnijmy, że dla ograniczonego ciągu $\{x_n\}$, rozpatrywanego w przestrzeni Banacha E, względem domkniętego, wypukłego podzbioru $C \subset E$, jego *asymptotyczne centrum* jest następującym zbiorem:

$$AC(\{x_n\}) = \{x \in C : \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x - x_n\| = \inf_{z\in C}(\overline{\lim_{n\to\infty}} \|z - x_n\|)\}.$$

Istota wykorzystania tego pojęcia kryje się w tym, że w jednostajnie wypukłych przestrzeniach Banacha asymptotyczne centrum ograniczonego ciągu składa się z jednego elementu, zob. [13, Th. 4.1].

Dowód twierdzenia 6. Wybieramy $x \in C$ i tworzymy ciąg $x_n = T^n x$, $n = 1, 2, \ldots$ Taki ciąg nie musi być zbieżny, ale jego asymptotyczne centrum względem zbioru C jest zbiorem jednoelementowym: $AC(\{T^n x\}) = \{y\}$. W tej sytuacji nierówność

$$\|Ty - x_n\| = \|Ty - T^n x\| \leqslant \|y - T^{n-1}x\| = \|y - x_{n-1}\|$$

gwarantuje, że $Ty = y$. $\square$

W metrycznej teorii punktów stałych jednym z podstawowych i trudniejszych problemów jest zagadnienie zbieżności ciągów iteracyjnych rozważanych odwzorowań. Wśród wielu ważnych prac (m.in. F. E. Browdera, Z. Opiala), poświęconych tej problematyce, na szczególną uwagę zasługuje praca J. B. Baillona [2] z 1975 roku, w której zostało podane pierwsze twierdzenie typu ergodycznego dla odwzorowań *nieliniowych* w rzeczywistych przestrzeniach Hilberta.

Twierdzenie 7. *Niech C będzie niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorem przestrzeni Hilberta H, $T : C \to C$ odwzorowaniem nieoddalającym. Wtedy dla każdego $x \in C$ ciąg*

$$S_n x = \frac{x + Tx + \ldots + T^{n-1}x}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest słabo zbieżny do punktu stałego odwzorowania T.

W tym przypadku również można podać charakteryzację punktu granicznego, ale jak poprzednio nie będziemy tej sytuacji dyskutować.

Rezultat ten był dużą niespodzianką. Zaprezentujemy jego uzasadnienie oparte na spostrzeżeniach, które okazały się użyteczne w ogólniejszych sytuacjach. Śledząc proponowane uzasadnienie można odkryć podobieństwa i różnice z dowodem twierdzenia Yosidy–Kakutaniego.

LEMAT 1. *Niech C będzie niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorem przestrzeni Hilberta H, $T : C \to C$ odwzorowaniem nieoddalającym. Jeżeli ciąg $\{x_n\} \subset C$ jest taki, że $x_n - Tx_n \to 0$ i $x_n \rightharpoonup x$, to wtedy $x = Tx$.*

D o w ó d. W przestrzeni Hilberta mamy tożsamość:

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle.$$

Gdy $x_n \rightharpoonup x$, to ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony i przechodząc w powyższym wzorze z $n \to +\infty$, dla każdego $y \neq x$, mamy

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|. \tag{1}$$

Z przyjętych założeń wynika nierówność

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n - Tx\| = \varliminf_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|,$$

która (w konfrontacji) z warunkiem (1) gwarantuje, że $x = Tx$. □

LEMAT 2. *Niech C będzie niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorem przestrzeni Hilberta H, $T : C \to C$ odwzorowaniem nieoddalającym. Wtedy dla dowolnego $x \in C$*

$$\|TS_nx - S_nx\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\|TS_nx - x\|.$$

D o w ó d. Rozpisując przy pomocy iloczynu skalarnego wyrażenie $\|TS_nx - S_nx\|^2$ otrzymujemy tożsamość

$$\|TS_nx - S_nx\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \|TS_nx - T^ix\|^2 - \frac{1}{2n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} \|T^ix - T^jx\|^2.$$

Ponieważ T jest odwzorowaniem nieoddalającym, więc

$$\begin{aligned}\|TS_nx - S_nx\|^2 &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-2} \|S_nx - T^ix\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{n}\|x - TS_nx\|^2 - \frac{1}{2n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} \|T^ix - T^jx\|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{n}(\|x - TS_nx\|^2 - \|T^{n-1}x - S_nx\|^2),\end{aligned}$$

skąd wynika oczekiwana nierówność. □

Lemat 3. *Niech C będzie niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorem przestrzeni Hilberta H, $T : C \to C$ odwzorowaniem nieoddalającym, $\omega(x) = \{u \in C : \exists_{\{n_i\}} T^{n_i}x \rightharpoonup u\}$, $F(T)$ zbiorem punktów stałych. Wtedy*

$$\forall_{f,g\in F(T)} \forall_{u,\nu\in\omega(x)} \langle f - g, u - \nu\rangle = 0.$$

Dowód. W opisanych warunkach $F(T) \neq \emptyset$ oraz $\omega(x) \neq \emptyset$. Dla każdego $f \in F(T)$ ciąg $\{\|f - T^n x\|\}_{n=1,2,\ldots}$ jest nierosnący, więc istnieje granica $d(f) = \lim_{n\to\infty} \|f - T^n x\|$. Zatem z tożsamości

$$\|f - T^n x\|^2 = \|f - g\|^2 + 2\langle f - g, g - T^n x\rangle + \|g - T^n x\|^2$$

dla $T^{n_i}x \rightharpoonup u$, $T^{n_j}x \rightharpoonup \nu$, mamy

$$[d(f)]^2 = \|f - g\|^2 + 2\langle f - g, g - u\rangle + [d(g)]^2,$$
$$[d(f)]^2 = \|f - g\|^2 + 2\langle f - g, g - \nu\rangle + [d(g)]^2,$$

skąd otrzymujemy tezę. □

Dowód twierdzenia 7. Ponieważ zbiór C jest słabo zwarty, więc na podstawie twierdzenia Eberleina–Szmuliana, charakteryzującego zbiory słabo zwarte w przestrzeniach Banacha, ciąg $\{S_n x\}$ zawiera podciąg słabo zbieżny $S_{n_i}x \rightharpoonup y$. Punkt $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\mathrm{conv}}\{T^n x : n \geqslant k\} = \overline{\mathrm{conv}}\,\omega(x)$ (zob. [7]), więc $y \in \overline{\mathrm{conv}}\,\omega(x)$. Z drugiej strony Lematy 1 i 2 gwarantują, że $y \in F(T)$. W tej sytuacji $y \in F(T) \cap \overline{\mathrm{conv}}\,\omega(x)$. Lemat 3 gwarantuje, że $F(T) \cap \overline{\mathrm{conv}}\,\omega(x) = \{y\}$ (jest zbiorem złożonym z jednego elementu), co oznacza, że ciąg $S_n x \rightharpoonup y \in F(T)$. □

W latach następnych pojawiły się inne dowody tego twierdzenia. Jednak co istotniejsze, S. Reich [24] i R. E. Bruck [8] wskazali rozszerzenie tego twierdzenia na jednostajnie wypukłe przestrzenie Banacha z normą różniczkowalną w sensie Frécheta, które zawierają m.in. przestrzenie L^p, $1 < p < +\infty$. Dowód w tym przypadku opiera się na zaadaptowaniu idei zawartych w Lematach 1–3. Wskazane przy okazji metody okazały się na tyle efektywne, że dalsze ich udoskonalenie umożliwiło przeniesienie twierdzeń ergodycznych na szerszą klasę odwzorowań, zwanych asymptotycznie nieoddającymi w pośrednim sensie: mówimy, że odwzorowanie $T : C \to C$, gdzie C jest podzbiorem przestrzeni Banacha, jest *asymptotycznie nieoddalające w pośrednim sensie*, jeśli T^k jest odwzorowaniem ciągłym dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big(\sup_{x,y\in C} (\|T^n x - T^n y\| - \|x - y\|)\Big) \leqslant 0.$$

Dla tego typu odwzorowań H. Oka [22] wykazał:

Twierdzenie 8. *Niech C będzie niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorem jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha E z normą różniczkowalną w sensie Frécheta, $T : C \to C$ odwzorowaniem asymptotycznie nieoddalającym w pośrednim sensie. Wtedy dla każdego $x \in C$ ciąg*

$$S_n x = \frac{x + Tx + \ldots + T^{n-1}x}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest słabo zbieżny do punktu stałego odwzorowania T.

Intensywne badania w tym kierunku trwają nadal, zob. [17]. Twierdzenia ergodyczne umożliwiły również podanie warunków gwarantujących słabą zbieżność ciągów iteracyjnych (zob. [24], [8]), a mianowicie:

Wniosek 1. *Niech C będzie niepustym, domkniętym, wypukłym, ograniczonym podzbiorem jednostajnie wypukłej przestrzeni E z normą różniczkowalną w sensie Frécheta, $T : C \to C$ odwzorowaniem asymptotycznie nieoddalającym w pośrednim sensie. Wówczas ciąg $\{T^n x\}_{n=1,2,\ldots}$ jest słabo zbieżny do punktu stałego odwzorowania T wtedy i tylko wtedy, gdy T jest odwzorowaniem słabo asymptytycznie regularnym w punkcie x, tzn. $T^{n+1}x - T^n x \rightharpoonup 0$.*

Bezpośrednie wykazanie tego typu rezultatów (bez wykorzystania twierdzeń ergodycznych) było dotychczas bardzo trudne lub wręcz niemożliwe.

Obok zaprezentowanego powyżej nurtu badającego słabą zbieżność ciągów $\{S_n x\}_{n=1,2,\ldots}$, przy dodatkowych warunkach nakładanych na odwzorowanie i jednoczesnej rezygnacji z warunku różniczkowalności normy w sensie Frécheta, wykazano też szereg rezultatów dotyczących mocnej zbieżności ciągu $\{S_n x\}_{n=1,2,\ldots}$. Uzyskane rezultaty z powodzeniem przenoszono na przypadek ciągły, w którym rozważa się półgrupy odwzorowań. Zasadnicze wyniki nieliniowej teorii ergodycznej oraz stosowane w tej teorii metody zostały omówione w pracy [14].

Literatura

[1] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.

[2] J. B. Baillon, *Un théoréme de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris 280 (1975), 1511–1514.

[3] G. D. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 17 (1931), 656–660.

[4] L. Boltzmann, *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiallen Punkten*, Wissenschaftliche Abhandlungen 1 (1868), 49–96.

[5] F. E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 43 (1965), 1272–1276.

[6] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54 (1965), 1041–1044.

[7] R. E. Bruck, *On the almost-convergence of iterates of a nonexpansive mapping in Hilbert space and the structure of the weak ω-limit set*, Israel J. Math. 29 (1978), 1–16.
[8] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear conctractions in Banach spaces*, Israel J. Math. 32 (1979), 107–116.
[9] C. Cercignani, *Ludwig Boltzmann*, Oxford Univ. Press, 1998.
[10] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*, *part I*: *General Theory*, Interscience, New York 1958.
[11] S. W. Fomin, I. P. Kornfeld, J. G. Sinaj, *Teoria ergodyczna*, PWN, Warszawa 1987.
[12] K. Goebel, W. A. Kirk, *Zagadnienia metrycznej teorii punktów stałych*, Wyd. UMCS, Lublin 1999.
[13] K. Goebel, S. Reich, *Uniform convexity*, *hyperbolic geometry*, *and nonexpansive mappings*, Marcel Dekker, New York 1984.
[14] J. Górnicki, *Dyskretne aspekty nieliniowej teorii ergodycznej* (*aproksymacje punktów stałych ciągami słabo zbieżnymi*), Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2000.
[15] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. 30 (1965), 251–258.
[16] R. P. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, The Math. Soc. of Japan, Tokyo 1953.
[17] W. Kaczor, T. Kuczumow, S. Reich, *The mean ergodic theorem for nonlinear semigroups which are asymptotically nonexpansiv in the intermediate sense*, J. Math. Anal. Appl. 246 (2000), 1–27.
[18] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings with do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004–1006.
[19] G. Köthe, *Wkład Stanisława Mazura w analizę funkcjonalną*, Wiadom. Mat. 30 (1994), 199–250.
[20] T. Nadzieja, *Indywidualne twierdzenie ergodyczne z topologicznego punktu widzenia*, Wiadom. Mat. 32 (1996), 27–36.
[21] J. von Neumann, *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 70–82.
[22] H. Oka, *An ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mappings in the intermediate sense*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1693–1703.
[23] H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les equations de la dynamique*, Acta Math. 13 (1890), 1–270.
[24] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpensive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), 274–276.
[25] D. Szász, *Boltzmann's ergodic hypothesis*, *a conjecture for centuries*?, Studia Sci. Math. Hung. 31 (1996), 299–322.
[26] W. Szlenk, *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1982.
[27] S. Ulam, *Przygody matematyka*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1996.
[28] K. Yosida, S. Kakutani, *Operator theoretical treatment of Markov's process and mean ergodic theorem*, Ann. of Math. 42 (1941), 188–228.