ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLIV (2008)

Ludomir Newelski (Wrocław)

Teoria modeli i dynamika topologiczna*

Wstęp. Celem tego artykułu jest przedstawienie pewnego kierunku badań w teorii modeli, związanego z dynamiką topologiczną. Teoria modeli ma swój własny język, nieznany większości matematyków, dlatego większa część tej pracy jest poświęcona wyjaśnieniu podstawowych pojęć tej dziedziny. Definicje są ilustrowane przykładami. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do licznych podręczników i monografii z teorii modeli, zarówno na poziomie wstępnym [CK,Sa], jak i zaawansowanym [Ho,Pi,Ba,Ma]. Punktem wyjścia w teorii modeli jest pojęcie modelu.

Modelem (lub strukturą) nazywamy zbiór M (zwany uniwersum) z pewnymi wyróżnionymi relacjami i funkcjami na tym zbiorze, a także pewnymi stałymi (wyróżnionymi elementami). Zatem model M możemy zapisać w postaci

$$M = (M; R_i, f_j, c_t)_{i\in I, j\in J, t\in T},$$

gdzie I, J, T są pewnymi zbiorami indeksów, R_i jest n_i-arną relacją na M, f_j k_j-argumentową funkcją na M, z wartościami w M, zaś c_t wyróżnionym elementem M. Przykładami struktur tego typu są ciało liczb zespolonych $\mathbb{C} = (\mathbb{C}; +, -, \cdot, 0, 1)$, uporządkowane ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R} = (\mathbb{R}; +, -, \cdot, 0, 1, <)$ czy też przestrzeń liniowa $V = (V; +, -, 0, r)_{r\in F}$ nad ustalonym ciałem F (tu r oznacza funkcję unarną, mnożenie przez skalar r).

Zbiór symboli $L = \{R_i, f_j, c_t\}_{i\in I, j\in J, t\in T}$ nazywa się językiem (lub też sygnaturą) modelu M. Rozważa się też inne modele dla języka L, tzn. modele postaci

$$N = (N; R_i^N, f_j^N, c_t^N)_{i\in I, j\in J, t\in T},$$

gdzie symbole R_i, f_j, c_t języka L sa interpretowane jako relacje R_i^N, funkcje f_j^N (odpowiedniej arności) oraz stałe c_t^N. Używając symboli języka L możemy tworzyć wyrażenia nazwowe oznaczające elementy M (zwane termami) oraz formuły wyrażające własności tych elementów.

* Artykuł ten jest rozszerzoną wersją wykładu wygłoszonego na Zjeździe AMS-PTM w Warszawie, w sierpniu 2007.

Termy języka L tworzy się ze zmiennych i symboli stałych języka L, stosując do nich symbole funkcyjne L. Oznaczają one elementy M lub funkcje na M otrzymane przez złożenie funkcji będących interpretacjami odpowiednich symboli funkcyjnych. Przykładowo, w przypadku ciała $F = (F, +, -, \cdot, 0, 1)$ termami są wyrażenia wielomianowe jak np. $x \cdot (x - y) + 1$, $1 + 1 \cdot 0$.

Formuły języka L tworzy się z symboli L, spójników logicznych, kwantyfikatorów, zmiennych (o zakresie zmienności M), nawiasów i symbolu równości $=$. Wyrażają one własności elementów M. Zdania to formuły bez zmiennych wolnych, wyrażają one własności M. Rozważamy tu tylko formuły „pierwszego rzędu", co znaczy, że zmienne w nich występujące przebiegają dany zbiór M (nie zaś, jak w przypadku formuł wyższych rzędów, iterowane zbiory potęgowe zbioru M). Przykładowo, w ciele F formuła $\varphi(x) = \exists y (y \cdot y = x)$ wyraża własność „x jest kwadratem".

W zamyśle, model M jest pewnym przybliżeniem świata pojęć matematycznych. Odpowiada to dość dobrze sytuacji w algebrze, która zajmuje się algebraicznymi strukturami różnych typów, będącymi szczególnymi rodzajami modeli M. Bardziej problematyczna jest sytuacja w analizie czy geometrii, gdzie rozważa się własności „wyższego rzędu". Przykładowo, w analizie zdania „każdy ograniczony podzbiór $\mathbb{R}$ ma supremum", prawdziwego w modelu $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$, nie da się zapisać jako zdania pierwszego rzędu w języku $L = \{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$, gdyż kwantyfikujemy w nim po wszystkich podzbiorach naszego modelu (jest więc zdaniem drugiego rzędu).

Można by co prawda argumentować, że całą matematykę można sformalizować na gruncie teorii mnogości i w tym sensie każde zdanie matematyczne można zapisać jako zdanie pierwszego rzędu, jednak formalny język teorii mnogości niekoniecznie jest najwłaściwszy do wyrażania twierdzeń całej matematyki. Teoria modeli nie twierdzi, że stosuje się bezpośrednio do wszystkich dziedzin matematyki. Jednak pomimo tych ograniczeń można stwierdzić, że teoria modeli ma pewne interesujące wyniki na temat logicznych podstaw matematyki, jak również pewne zastosowania w klasycznej matematyce.

Załóżmy, że $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ jest formułą języka L (gdzie $\bar{x}, \bar{y}$ są skończonymi ciągami zmiennych) oraz $\bar{b}$ jest skończonym ciągiem elementów M długości $|\bar{y}|$. Niech $n = |\bar{x}|$. Zbiór

$$\varphi(M, \bar{b}) = \{\bar{a} \in M^n : M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\},$$

złożony z elementów modelu M spełniających formułę $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$, nazywamy zbiorem definiowalnym w modelu M. Gdy $A \subseteq M$ zawiera $\bar{b}$, mówimy, że $\varphi(M, \bar{b})$ jest **definiowalny** z parametrami z A (lub: „nad A"). Podzbiory M^n definiowalne nad A tworzą ciało zbiorów, oznaczane przez $Def^n_A(M)$.

Gdy $A = \emptyset$ oraz $n = 1$, oznaczamy je przez $Def(M)$ (są to zbiory definiowalne bez parametrów).

Przykładowo, formuła $\varphi(x, y) = (y - x \cdot x = 2)$ definiuje w ciele liczb rzeczywistych parabolę – wykres funkcji $f(x) = x^2 + 2$, w definicji użyty został parametr 2. Funkcje, których wykresy są definiowalne, nazywa się funkcjami definiowalnymi.

Przez **teorię** modelu M (w skrócie $Th(M)$) rozumiemy zbiór wszystkich zdań języka L prawdziwych w M. Mówimy, że dwa modele M, N dla L są elementarnie równoważne, gdy $Th(M) = Th(N)$. Mówimy, że M jest elementarnym podmodelem N (symbolicznie: $M \prec N$), gdy M jest podmodelem N (tzn. M jest podzbiorem N i interpretacje symboli L w M są indukowane przez interpretacje w N) oraz dla każdego skończonego ciągu $\bar{a}$ elementów M, dla każdej formuły $\varphi(\bar{x})$ języka L, $M \models \varphi(\bar{a})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N \models \varphi(\bar{a})$.

Od tej chwili w pracy ustalamy model M oraz jego teorię $T = Th(M)$. Możemy teraz rozważać klasę wszystkich modeli teorii T. Opis, zrozumienie struktury modeli T jest jednym z głównych zadań teorii modeli. Zazwyczaj rozważa się tylko modele nieskończone. Dokładniej, jednymi z pierwszych problemów teorii modeli były pytania na temat liczby modeli T ustalonej mocy. Związane z nimi są pytania dotyczące szczegółowej struktury tych modeli, jak również badania na temat różnych sposobów konstruowania modeli.

Ze szczegółową strukturą modeli związane są badania mające na celu opis zbiorów definiowalnych w modelu. Najprostsza sytuacja występuje wtedy, gdy wszystkie definiowalne zbiory w M są definiowalne przez formuły bez kwantyfikatorów. Mówimy wtedy, że M (i jego teoria $Th(M)$) mają redukcję kwantyfikatorów. Wiele ważnych struktur ma redukcję kwantyfikatorów. Należą do nich m.in. ciała algbraicznie domknięte, uporządkowane ciało liczb rzeczywistych, bezatomowe algebry Boole'a, gęste porządki liniowe bez końców. W wielu przypadkach mamy „częściową” eliminację kwantyfikatorów, gdzie definiowalne podzbiory M są definiowalne przez formuły określonej prostej postaci. Na przykład, w każdym module definiowalne zbiory są boolowskimi kombinacjami zbiorów pp-definiowalnych (tzn. zbiorów będących rzutami zbiorów rozwiązań układów równań liniowych). W ciałach algebraicznie domkniętych zbiory definiowalne są boolowskimi kombinacjami afinicznych rozmaitości algebraicznych (w geometrii algebraicznej są one zwane zbiorami konstruowalnymi). Zrozumienie definiowalnych zbiorów w M umożliwia dalszą teorio-modelową analizę M.

1. Twierdzenie Morley'a i ranga Morley'a. Mówimy, że teoria T jest kategoryczna w mocy κ ($\kappa \geq \aleph_0$), gdy T ma jeden model mocy κ, z dokładnością do izomorfizmu. Następujące twierdzenie Morley'a [Mo], potwierdzające hipotezę Jerzego Łosia, było przełomem w teorii modeli.

Twierdzenie. *Jeśli przeliczalna teoria T jest kategoryczna w pewnej mocy nieprzeliczalnej, to jest kategoryczna w każdej mocy nieprzeliczalnej.*

Nietrywialny dowód tego twierdzenia opiera się na analizie topologicznych i kombinatorycznych własności przestrzeni typów teorii T. Głównym narzędziem jest tu ranga Morley'a, przy pomocy której mierzymy wielkość definiowalnych zbiorów oraz typów. Zdefiniujemy teraz te pojęcia.

Typy elementów to centralne pojęcie teorii modeli. **Typ** $p(x)$ zmiennej x, nad zbiorem parametrów $A \subseteq M$, to dowolny zbiór formuł $\varphi(x, \bar{a})$, gdzie $\bar{a} \subseteq A$ oraz $\varphi(x, \bar{y})$ jest formułą języka L. Typ $p(x)$ wyznacza zbiór

$$p(M) = \{b \in M : M \models \varphi(b, \bar{a}) \text{ dla wszystkich } \varphi(x, \bar{a}) \in p(x)\} = \bigcap_{\varphi \in p} \varphi(M).$$

Mówimy, że zbiór $p(M)$ jest typowo-definiowalny (nad A) i każdy element zbioru $p(M)$ **realizuje** typ $p(x)$.

Typ $p(x)$ jest niesprzeczny, gdy zbiór $\{\varphi(M, \bar{a}) : \varphi(x, \bar{a}) \in p(x)\}$ generuje filtr właściwy w algebrze Boole'a $Def_A(M)$. Maksymalny niesprzeczny typ nad A zwany nazywany jest typem zupełnym. $S_x(A)$ oznacza zbiór wszystkich zupełnych typów nad A, zmiennej x. $S_x(A)$ można utożsamiać z przestrzenią Stone'a ultrafiltrów w algebrze Boole'a $Def^1_A(M)$, w tym sensie $S_x(A)$ staje się zwartą przestrzenią topologiczną (z topologią Stone'a). Dokładniej, bazowe zbiory otwarte są tu postaci

$$[\varphi(x, \bar{a})] = \{p \in S_x(A) : \varphi(x, \bar{a}) \in p(x)\},$$

gdzie $\varphi(x, \bar{a})$ jest formułą z parametrami z A. W podobny sposób definiujemy typy większej liczby zmiennych.

Załóżmy, że $N \succ M$, $A \subseteq M$ oraz $b \in N$. Typ elementu b nad A określamy następująco

$$tp(b/A) = \{\varphi(x, \bar{a}) : \varphi(x, \bar{y}) \text{ jest formułą } L, \bar{a} \subseteq A \text{ i } N \models \varphi(b, \bar{a})\}.$$

Zatem $tp(b/A) \in S_x(A)$, ponadto można wykazać, że każdy typ $p(x) \in S_x(A)$ jest tej postaci (tzn. jest realizowany w pewnym $N \succ M$). Widzimy więc, że typ elementu to po prostu zbiór jego własności w danym modelu (względem danego zbioru parametrów), wyrażalnych w języku tego modelu. Niektóre typy nad $A \subseteq M$ są realizowane w M, pozostałe są realizowane w modelach $N \succ M$. Myślimy o nich jak o „idealnych” elementach modelu M. Przykładowo, w analizie niestandardowej rozważa się niestandardowe liczby infinitezymalne. Są to elementy odpowiedniego elementarnego rozszerzenia standardowego modelu analizy $\mathbb{R}$, spełniające typ

$$\{0 < x < \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Dla $A \subseteq M$, $Aut(M/A)$ oznacza grupę automorfizmów modelu M ustalających punktowo zbiór A. $Aut(M)$ oznacza $Aut(M/\emptyset)$. Oczywiście, gdy $a, b \in M$ są w tej samej orbicie względem $Aut(M/A)$, to mają one ten sam typ nad A. W pewnych modelach zachodzi też odwrotna implikacja, przynajmniej, gdy $|A| < \kappa$ dla określonej liczby kardynalnej κ. Modele takie nazywane są silnie κ-jednorodnymi. Model M nazywamy κ-nasyconym, gdy dla każdego $A \subseteq M$ mocy $< \kappa$, każdy typ w $S_x(A)$ jest realizowany w M.

Niech $\bar{\kappa}$ będzie dużą liczbą kardynalną (tzn. liczbą kardynalną dużo większą niż moc jakiegokolwiek modelu, który chcielibyśmy badać). Zbiory mocy $< \bar{\kappa}$ zwiemy małymi. Wśród elementarnych rozszerzeń modelu M znajdują się modele κ-nasycone i silnie κ-jednorodne dla dowolnej mocy κ. W przypadku $\kappa = \bar{\kappa}$ wygodnie jest ustalić jeden taki model $\mathfrak{C}$, zwany modelem monstrum. Model $\mathfrak{C}$ jest użyteczny, gdyż ma następujące własności:

- Każdy (mały) model T jest izomorficzny z pewnym elementarnym podmodelem $\mathfrak{C}$.
- Dla każdego (małego) $A \subseteq \mathfrak{C}$, typy w $S_x(A)$ odpowiadają dokładnie orbitom grupy $Aut(\mathfrak{C}/A)$.

Dzięki temu, jeśli chcemy badać małe modele T, możemy ograniczyć się do elementarnych podmodeli $\mathfrak{C}$, co właśnie w teorii modeli i dalej w tym artykule czynimy. Specjaliści z teorii modeli wierzą, że własności modelu M oraz jego teorii T ujawniają się najpełniej w modelu monstrum $\mathfrak{C}$ (lub, skromniej, w odpowiednio nasyconym elementarnym rozszerzeniu modelu M). Wydaje się, że w istocie „asymptotyczne" własności modelu M lepiej widać w jego rozszerzeniu $\mathfrak{C}$ (gdyż zawiera on wszystkie „idealne elementy" modelu M). Tak jest przykładowo w tzw. analizie niestandardowej, która jest po prostu analizą robioną w odpowiednio nasyconym elementarnym rozszerzeniu standardowego modelu $\mathbb{R}$. Przykładowo, w przypadku ciała algebraicznie domkniętego K, za model monstrum teorii $Th(K)$ możemy wziąć dowolne algebraicznie domknięte ciało tej samej charakterystyki, co K, mocy $\geq \bar{\kappa}$. Jest to więc tzw. dziedzina uniwersalna w geometrii algebraicznej. W przypadku przestrzeni liniowej V nad ciałem F, jako model monstrum teorii $Th(V)$ możemy przyjąć dowolną przestrzeń liniową nad ciałem F mocy $\geq \bar{\kappa}$. Trudniej byłoby wskazać model monstrum dla teorii uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych, gdyż teoria ta ma zbyt dużo typów (jest „niestabilna"). Każda teoria ma jednak model monstrum.

Załóżmy, że X jest definiowalnym podzbiorem M. Powiedzmy, $X = \varphi(M)$. Wówczas w modelu monstrum $\mathfrak{C} \succ M$ możemy zdefiniować zbiór

$$X^{\mathfrak{C}} = \varphi(\mathfrak{C}).$$

Definicja ta nie zależy od wyboru formuły φ definiującej zbiór X. Sytacja jest tu analogiczna do geometrii algebraicznej, gdzie dla ciał algebraicznie domkniętych $K \subseteq K'$ oraz rozmaitości algebraicznej V w ciele K rozważa się $V^{K'}$, zbiór punktów K'-wymiernych rozmaitości V.

Ranga Morley'a to funkcja, która niepustym zbiorom definiowalnym $X \subseteq M$ przypisuje $RM(X)$ będącą liczbą porządkową lub formalnym symbolem ∞, o którym zakładamy, że jest większy od każdej liczby porządkowej. Wygodnie jest jednak definiować rangę Morley'a dla definiowalnych podzbiorów modelu monstrum $\mathfrak{C}$.

Definiujemy więc rangę Morley'a jako najmniejszą funkcję określoną na rodzinie wszystkich niepustych zbiorów definiowalnych X w $\mathfrak{C}$, z wartościami w klasie wszystkich liczb porządkowych $Ord \cup \{\infty\}$, taką, że dla każdej $\alpha \in Ord$ mamy

$$RM(X) \geq \alpha + 1 \iff \text{istnieją niepuste, parami rozłączne, definiowalne zbiory } X_n \subseteq X, n \in \mathbb{N}, \text{ takie, że } RM(X_n) \geq \alpha.$$

Dla zbioru definiowalnego $X \subseteq M$ przyjmujemy $RM(X) = RM(X^{\mathfrak{C}})$. Dla formuły $\varphi(x)$ definiujemy $RM(\varphi) = RM(\varphi(\mathfrak{C}))$. Dla typu zupełnego $p(x)$ przyjmujemy $RM(p)$ jako minumum $RM(\varphi), \varphi \in p$.

W szczególności, $RM(X) = 0 \iff X$ jest skończony i niepusty.

Przykładowo, w geometrii algebraicznej ranga Morley'a dowolnej rozmaitości algebraicznej jest skończona i równa wymiarowi tej rozmaitości. Jest wiele analogii między teorią modeli rozwiniętą w latach 70. i 80. ubiegłego wieku i elementarną geometrią algebraiczną. Pierwszy zwrócił na to uwagę Hrushovski w połowie lat 80. Pisał też o tym Poizat [Po].

Przykładowo, używając rangi Morley'a możemy zdefiniować pojęcie „punktu generic" w zbiorze definiowalnym, uogólniającego pojęcie punktu generic w rozmaitości algebraicznej.

Załóżmy, że $M \prec N$ oraz X jest definiowalny w M. Mówimy, że $a \in X^N$ jest punktem generic (nad M), gdy $a \notin Y^N$ dla każdego definiowalnego $Y \subseteq X$ niższej rangi Morley'a niż $RM(X)$. Równoważnie: $RM(tp(a/M)) = RM(X)$.

Ranga Morley'a była jednym z głównych narzędzi w dowodzie twierdzenia Morley'a. Morley udowodnił, że dla teorii kategorycznych w pewnej mocy nieprzeliczalnej ranga Morley'a ma wartości będące liczbami porządkowymi, co umożliwiło indukcyjne (względem rangi Morley'a) dowody różnych własności zbiorów definiowalnych, a w konsekwencji zrozumienie struktury modeli takich teorii. W roku 1973 Baldwin udowodnił, że (podobnie jak w przypadku rozmaitości algebraicznych), w teorii, która jest kategoryczna w mocach nieprzeliczalnych, ranga Morley'a ma wartości skończone.

2. Geometryczna Teoria Modeli. Ranga Morley'a i jej warianty działają dobrze w teoriach stabilnych (tj. teoriach ze stosunkowo małą liczbą typów), umożliwiając w pewnym stopniu zrozumienie struktury zbiorów definiowalnych w modelach tych teorii. Do teorii stabilnych należą m.in. teorie takich struktur jak ciała algebraicznie domknięte, moduły, ciała rozdzielczo domknięte, ciała różniczkowo domknięte (przemiot badań algebry różniczkowej i różniczkowej geometrii algebraicznej), rozmaitości analityczne (z odpowiednio określoną strukturą pierwszego rzędu), grupy algebraiczne, jak również np. grupy wolne. Ten ostatni fakt został niedawno udowodniony przez Zlila Selę, w związku z pozytywnym rozwiązaniem przez niego problemu Tarskiego dotyczącego tego, czy nieabelowe grupy wolne są elementarnie równoważne.

Niestety ranga Morley'a zawodzi w wielu interesujących przypadkach rozważanych w teorii modeli, takich jak m.in. ciała pseudoskończone, ciała z waluacjami, ciała z automorfizmem, struktury o-minimalne (tj. np. ciała rzeczywiście domknięte i ich pewne wzbogacenia).

Pojawia się w związku z tym problem, jak zdefiniować pojęcie dużego definiowalnego zbioru również w przypadkach, gdy ranga Morley'a ma wartość ∞, w szczególności w przypadkach teorii i struktur niestabilnych.

W latach 70. i 80. ubiegłego wieku m.in. Shelah, Pillay, Zilber, Hrushovski rozwinęli tzw. geometryczną teorię modeli. Kluczowy był tu pomysł Shelaha, by w strukturach stabilnych zdefiniować pewne ogólne pojęcie niezależności, zwane niezależnością forkingową (w przypadku teorii małych wzmocnieniem tego pojęcia była tzw. m-niezależność [Ne2]). Prowadzi to do rozważania pewnych kombinatorycznych pregeometrii (matroidów [CR]) na definiowalnych zbiorach w modelu. Umożliwiło to Shelahowi uzyskanie bardzo ogólnych twierdzeń dotyczących klasyfikacji modeli teorii. Geometryczna teoria modeli stała się jądrem współczesnej czystej teorii modeli, tworząc fundament dla dalszego rozwoju oraz dla zastosowań w algebrze.

Ważnym składnikiem geometrycznej teorii modeli stała się teoria grup stabilnych [Po]. Początkowo grupy stabilne (tzn. grupy, których teorie sa stabilne) stanowiły przedmiot badań teorii modeli jako przykładowe struktury algebraiczne, w których pojęcia teorii modeli są stosowalne w sensowny sposób. I tak na przykład w związku z twierdzeniem Morley'a jednym z celów było tu opisanie (zrozumienie) w sposób algebraiczny tych struktur algebraicznych, których teorie są kategoryczne w mocach nieprzeliczalnych. Znaczące wyniki uzyskali tu m.in. Lascar, Macintyre, Poizat. Przełom nastąpił w połowie lat 80. wraz z pojawieniem się prac Hrushovskiego, który odkrył, że w nietrywialnych przypadkach w modelach dowolnych teorii stabilnych bardzo często można znaleźć zbiory definiowalne, które są definiowalnymi grupami, a ponadto geometryczna natura zbiorów definiowalnych daje się wyjaśnić poprzez strukturę tych grup. W ten sposób teoria grup stabilnych znalazła się w centrum zainteresowania w ramach teorii modeli. Najważniejszym pojęciem dotyczącym grup stabilnych jest pojęcie zbioru generic, wprowadzone przez Poizata.

Załóżmy, że $G = (G, \cdot, \ldots)$ jest grupą, tzn. $\cdot$ jest działaniem grupowym w zbiorze G. Wielokropek w $(G, \cdot, \ldots)$ oznacza dopuszczalną dodatkową strukturę na G (tzn. dodatkowe funkcje, relacje, stałe).

Definicja 2.1 ([Po]) Załóżmy, że X jest definiowalnym podzbiorem G.

(1) Mówimy, że X jest zbiorem (lewostronnie) **generycznym**, gdy

$$G = a_1 X \cup \ldots \cup a_n X$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in G$, tzn. gdy skończenie wiele lewych przesunięć zbioru X o elementy grupy wystarcza do pokrycia grupy.

(2) Formuła $\varphi(x)$ (z parametrami z G) jest (lewostronnie) generyczna, gdy zbiór $\varphi(G)$ jest generyczny.

(3) Typ $p \in S(G)$ jest (lewostronnie) generyczny, gdy każda formuła w nim jest generyczna.

Definicję tę można również stosować do grup definiowalnych w danym modelu M. Ponadto analogicznie można zdefiniować pojęcie zbioru/formuły/typu prawostronnie generycznego. Poizat udowodnił w roku 1984, że w przypadku stabilnym typy generyczne w grupie istnieją (i dobrze wyrażają pojęcie dużego zbioru definiowalnego). W szczególności, gdy ranga Morley'a ma wartości $< \infty$, to X jest zbiorem generycznym dokładnie wtedy, gdy $RM(X) = RM(G)$, tzn. gdy ma największą możliwą rangę Morley'a.

Przykładowo, w grupach algebraicznych typy generyczne odpowiadają dokładnie punktom generycznym.

Niestety, w przypadkach niestabilnych typy generyczne nie zawsze istnieją. Warto tu jednak wspomnieć, że w roku 2007 M. Petrykowski udowodnił, że jeśli w danej grupie istnieje typ zupełny lewostronnie generyczny, to istnieje wówczas typ prawostronnie generyczny oraz oba te pojęcia (tj. lewo- i prawostronnej generyczności) pokrywają się.

Przykłady.

1. Niech $G = (\mathbb{R}, +)$, traktowana jako grupa definiowalna w strukturze $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$. W tym przypadku w $S(G)$ nie ma typów generycznych. Istotnie, $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{>0}$ jest rozbiciem zbioru $\mathbb{R}$ na sumę dwóch rozłącznych definiowalnych zbiorów, które nie są generyczne. Każdy typ $p \in S(G)$ zawiera jedną z formuł $x \leq 0$, $x > 0$, definiujących te zbiory. Zatem p nie jest generyczny.

2. Niech $G = S^1 = ([0, 1), +_{mod\ 1})$, traktowana jako grupa definiowalna w $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$. W tym przypadku typy generyczne w $S(G)$ istnieją: dla każdego $a \in S^1$ mamy dwa takie typy:

$$p_a^- = \{a - \frac{1}{n} < x < a : n \in \mathbb{N}^+\},$$

$$p_a^+ = \{a < x < a + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Ponadto, tu każdy typ generyczny jest tej postaci.

3. Teoria Modeli a Dynamika Topologiczna. Powstał problem, jak i czy można znaleźć dobre pojęcie dużego zbioru definiowalnego w definiowalnej grupie G, tak by istniały duże w tym sensie typy zupełne w $S(G)$. Tu użyteczna okazała sie dynamika topologiczna.

Przedstawimy teraz pokrótce podstawowe pojęcia dynamiki topologicznej. Załóżmy, że G jest grupą (dyskretną). Przez G-**potok** rozumiemy zwartą niepustą przestrzeń topologiczną X wraz z lewostronnym działaniem na niej grupy G przez homeomorfizmy. G-potoki są przedmiotem badań dynamiki topologicznej. G-potok X jest **minimalny**, gdy nie ma właściwych (domkniętych) pod-potoków. Minimalne (domknięte) podpotoki potoku X istnieją, są kluczowe w dynamice topologicznej. Punkt p należący do potoku X nazywamy **prawie okresowym**, gdy domknięcie jego G-orbity jest minimalnym potokiem.

Wróćmy do teorii modeli i załóżmy teraz, że G jest grupą definiowalną w modelu M. Wówczas przestrzeń typów $S(G)$ jest w naturalny sposób G-potokiem: dla $g \in G, X \subseteq G$ oraz $p \in S(G)$, utożsamiając p z ultrafiltrem z algebry Boole'a definiowalnych podzbiorów G, przyjmujemy

$$g * X = gX \text{ oraz } g * p = \{g * X : X \in p\}.$$

Zbadajmy własności dynamiczne tych G-potoków.

P r z y k ł a d y.

1. Jeśli G jest stabilna, to w $S(G)$ istnieje dokładnie jeden minimalny pod-potok $Gen(G)$, złożony ze wszystkich typów generycznych; jest on też jedyną orbitą G.

2. Załóżmy, że $G = S^1$ jest grupą definiowalną w modelu $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$. Wtedy w $S(G)$ jest również dokładnie jeden minimalny pod-potok $Gen(G)$, złożony ze wszystkich typów generycznych; składa się on jednak z dwóch orbit:

$$\{p_a^+ : a \in S^1\} \text{ oraz } \{p_a^- : a \in S^1\}.$$

3. Niech $G = (\mathbb{R}, +)$, traktowana jako grupa definiowalna w strukturze $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$. W $S(G)$ są dwa minimalne potoki: $\{p_{-\infty}\}$ i $\{p_{+\infty}\}$, złożone z typów elementów w nieskończoności. Typy $p_{-\infty}$ i $p_{+\infty}$ nie są typami generycznymi.

Następujące twierdzenie wyjaśnia nieco tę sytuację.

TWIERDZENIE 3.1([Ne3]) *Następujące warunki są równoważne.*
(*1*) *W $S(G)$ jest dokładnie jeden minimalny pod-potok.*
(*2*) *W $S(G)$ istnieja typy generyczne.*
W tym przypadku, jedyny minimalny pod-potok składa się właśnie z typów generycznych.

Jak wskazaliśmy wyżej, niestety w wielu przypadkach typów generic nie ma w $S(G)$. Pomimo tego często mamy wrażenie, że niektóre typy są szczególnie duże, choć nie są one typami generycznymi. Na przykład tak jest z typami $p_{-\infty}$ i $p_{+\infty}$ elementów w nieskończoności w grupie addytywnej uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych. Poniższa definicja jest próbą uchwycenia tego zjawiska.

DEFINICJA 3.2 ([NP]) Definiowalny zbiór $X \subseteq G$ jest **słabo generyczny**, gdy dla pewnego nie-generycznego $Y \subseteq G$, zbiór $X \cup Y$ jest generyczny.

(2) Typ $p \in S(G)$ jest **słabo generczny**, gdy każda formuła w tym typie definiuje w G zbiór słabo generyczny.

Definiujemy następujące podzbiory zbioru typów $S(G)$.

$$WGen(G) = \{p \in S(G) : p \text{ jest słabo generyczny}\},$$
$$Gen(G) = \{p \in S(G) : p \text{ jest generyczny}\},$$
$$APer(G) = \{p \in S(G) : p \text{ jest prawie okresowy}\}.$$

Uwaga 3.3 (1) $Gen(G)$ i $WGen(G)$ są domknięte.

$$Gen(G) \subseteq WGen(G).$$

(2) $APer(G)$ jest gęstym podzbiorem zbioru $WGen(G)$.

(3) Jeśli $Gen(G) \neq \emptyset$, to $Gen(G) = WGen(G) = APer(G)$.

Zaletą pojęcia typu słabo generycznego jest to, że typy takie (w przeciwieństwie do typów generycznych) zawsze istnieją, tzn. $WGen(G) \neq \emptyset$. Przykładowo, typy $p_{-\infty}, p_{+\infty}$ są słabo generyczne, a nie generyczne. Są przykłady, gdzie $APer(G) \neq WGen(G)$.

Pojęcie (słabej) generyczności można też zdefiniować w dowolnym G-potoku.

Oprócz typowych kwestii związanych z dynamiką topologiczną, w G-potokach rozważanych w teorii modeli pojawiają się problemy nowe, specyficzne dla teorii modeli. Są to przykładowo kwestie dotyczące absolutności różnych własności potoków.

Załóżmy mianowicie, że $G^* \succ G$ jest elementarnym rozszerzeniem grupy G (na przykład, G^* może być naszym modelem monstrum dla teorii $Th(G)$). Wówczas możemy rozważać dwa potoki: G-potok $S(G)$ i G^*-potok $S(G^*)$. Naturalne jest dociekanie, na ile te potoki są podobne i które własności mają wspólne. Problematyka ta jest nowa w stosunku do dynamiki topologicznej, charakterystyczna dla ujęcia teoriomodelowego.

Po pierwsze, istnieje naturalna funkcja obcięcia $r : S(G^*) \to S(G)$, która jest ciągłą surjekcją. Mianowicie, dla $q(x) \in S(G^*)$ definiujemy $r(q)$ jako zbiór tych formuł z $q(x)$, które mają parametry w G, lub też (utożsamiając $q(x) \in S(G^*)$ z ultrafiltrem w ciele zbiorów definiowalnych w G)

$$r(q) = \{X \subseteq_{def} G : X^{G^*} \in q\} = q \restriction_G .$$

Niech $q \in S(G^*)$ oraz $p = q \restriction_G = r(q) \in S(G)$. Należałoby oczekiwać, że dynamiczne własności typów p i q będą podobne. Jest tak tylko częściowo.

U w a g a 3.4 1) Jeśli q jest słabo generyczny, to p jest słabo generyczny.

2) Prawie okresowość typu q nie zawsze implikuje prawie okresowość typu p.

3) Typ p może być słabo generyczny, lecz nie prawie okresowy (tzn. pojęcia słabej generyczności i prawie okresowości nie pokrywają się).

4) Jeśli p jest prawie okresowy, to istnieje prawie okresowy typ $q' \in S(G^*)$ taki, że $p = q' \restriction_G$.

Załóżmy, że X jest G-potokiem, który jest punktowo tranzytywny (tzn. dla pewnego punktu $p \in X$, G-orbita p jest gęsta w X). W dynamice topologicznej ważnym i nieco tajemniczym obiektem jest półgrupa Ellisa potoku X, którą definiujemy poniżej.

Każdy element $g \in G$ wyznacza homeomorfizm $\pi_g : X \to X$. Przez półgrupę Ellisa potoku X rozumiemy zbiór

$$E(X) = cl(\{\pi_g : g \in G\}) \subseteq X^X,$$

tzn. topologiczne domknięcie zbioru $\{\pi_g : g \in G\}$ w przestrzeni X^X wszystkich funkcji $X \to X$, rozważanej z topologią zbieżności punktowej (tzn. topologią produktową). $E(X)$ jest półgrupą względem działania składania funkcji. Działanie to jest ciągłe na pierwszej współrzędnej. Półgrupa $E(X)$ jest również G-potokiem: dla $g \in G$ i $f \in E(X)$ kładziemy $g * f = \pi_g \circ f$. Ponadto jest to potok punktowo tranzytywny, gdyż $\{\pi_g : g \in G\}$ jest gęstą G-orbitą w $E(X)$.

Dynamiczne i algebraiczne własności półgrupy $E(X)$ mówią nam dużo o wyjściowym potoku X. Ponadto, minimalne podpotoki $E(X)$ są to dokładnie minimalne lewostronne ideały $I \lhd E(X)$ (tzn. $E(X)I \subseteq I$). Ideały te wyznaczają minimalne podpotoki w X.

Niech I będzie minimalnym lewostronnym ideałem w $E(X)$. Niech $u \in I$ będzie idempotentem (tzn. $u^2 = u$). Wtedy zbiór $uI = uE(X)u$ jest podgrupą I, z elementem neutralnym u. Ponadto, ideał I jest rozłączną sumą takich podgrup. Okazuje się też, że wszystkie podgrupy $E(X)$ postaci uI (dla wszystkich I, u jak wyżej) są izomorficzne. Będziemy nazywać je specjalnymi podgrupami $E(X)$.

Wracając do teorii modeli i G-potoku $S(G)$, można się zastanawiać, jaka jest w tym przypadku półgrupa $E(S(G))$ oraz jej specjalne podgrupy.

Rozważmy najpierw przypadek, gdzie G jest grupą stabilną. Załóżmy też, że G jest odpowiednio nasycona. Wtedy okazuje się, że $E(S(G))$ jest w naturalny sposób izomorficzna jako G-potok z potokiem $S(G)$. Izomorfizm ten indukuje w $S(G)$ działanie półgrupowe, badane już w [Ne1]. Ponadto istnieje tu dokładnie jedna specjalna podgrupa $E(S(G))$ izomorficzna z grupą ilorazową G/G^0, gdzie G^0 jest tzw. spójną składową grupy G, tzn. przekrojem wszystkich definiowalnych podgrup G skończonego indeksu.

W przypadku ogólnym, gdy G niekoniecznie jest stabilna, można opisać (zrozumieć) półgrupę $E(S(G))$ w terminach teoriomodelowych, używając tzw. ko-dziedzicznych rozszerzeń typów. Nie jest jasne, czym są wówczas specjalne podgrupy $E(S(G))$. Przypuszczamy, że są one blisko związane z typowo-spójną składową G^{00} grupy G, o ile ona istnieje.

Mianowicie, zakładając, że grupa G jest odpowiednio nasycona, (np. że G jest sama modelem monstrum) rozważamy rodzinę wszystkich typowo-definiowalnych podgrup G małego indeksu (w stosunku do mocy G). Jeśli przekrój podgrup z tej rodziny jest rownież małego indeksu, to jest to właśnie G^{00}. Podobnie definiujemy niezmienniczą spójną składową G^∞ grupy G, jako przekrój tych wszystkich podgrup G małego indeksu, które są niezmiennicze nad małymi podzbiorami G, o ile ten przekrój też ma mały indeks. Gdy przekroje, o których mowa wyżej, nie mają małego indeksu w G, grupy G^{00} i G^∞ pozostają niezdefiniowane. Jeśli jednak grupy te istnieją, to mamy

$$G^\infty \subseteq G^{00} \subseteq G^0 \subseteq G.$$

W teorii modeli rozważa się szereg własności kombinatorycznych związanych ze stabilnością. Jedną z nich jest własność NIP, intensywnie badana ostatnio m.in. przez Shelaha, Pillay'a, Hrushovskiego. Własność NIP mają w szczególności teorie struktur o-minimalnych. Okazuje się, że w przypadku teorii z NIP grupy G^∞ i G^{00} istnieją. Udowodnił to Shelah [Sh] w przypadku G^{00}, zaś mój doktorant Jakub Gismatullin w przypadku G^∞ (wzmacniając rozumowanie Shelaha).

Hrushovski, Peterzil i Pillay [HPP] udowodnili, że jeśli teoria grupy G ma NIP oraz G ma „skończenie spełnialne typy generyczne", to G^{00} istnieje i jest stabilizatorem każdego z tych typów. Następujące twierdzenie poprawia ten wynik.

TWIERDZENIE 3.5 ([Ne3]) *Jeśli liczba typów słabo generycznych w $S(G)$ jest ograniczona, to G^∞ istnieje. Jest to wówczas punktowy stabilizator zbioru tych typów. W tym przypadku $G^\infty = G^{00}$.*

Twierdzenie to wzmacnia wyniki z [HPP], gdyż eliminuje założenie NIP, a ponadto założenie o ograniczoności liczby typów słabo generycznych jest słabsze od „skończonej spełnialności typów generycznych".

Przypuszczamy, że specjalne podgrupy $E(S(G))$ są silnie związane z grupą G/G^{00}, o ile G^{00} istnieje, zaś w przypadku NIP są wręcz z nią izomorficzne. Warto tu wspomnieć, że jeśli G^{00} istnieje, to grupa G/G^{00} jest zwartą grupą topologiczną, z tzw. topologią logiczną.

TWIERDZENIE 3.6 ([Ne3]) *Załóżmy, że G^{00} istnieje. Wtedy G/G^{00} jest homomorficznym obrazem każdej specjalnej podgrupy $E(S(G))$.*

Ostatnio uzyskałem wyniki potwierdzające w zasadzie powyższą hipotezę o związkach między specjalnymi podgrupami $E(S(G))$ a grupą G/G^{00} w przypadku ograniczonej liczby typów słabo generycznych.

Okazuje się też, że grupa G i półgrupa $E(S(G))$ są w pewien „generyczny" sposób powiązane algebraicznie.

Literatura

[Ba] J.T. Baldwin, *Fundamentals of Stability Theory*, Springer, Berlin 1988.

[HPP] E. Hrushovski, Y. Peterzil, A. Pillay, *Groups, Measures and the NIP*, preprint 2005.

[CK] C.C. Chang i H.J. Keisler, *Model Theory*, 3 wyd., North Holland, Amsterdam 1990.

[CR] H.H. Crapo i G.C. Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*, MIT Press 1970.

[Ho] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[Ma] D. Marker, *Model Theory. An Introduction*, Grad. Texts in Math., Springer, New York 2002.

[Ne1] L. Newelski, *On Type-definable Subgroups of a Stable Group*, Notre Dame J.Formal Logic 32 (1991), 173–187.

[Ne2] L. Newelski, *Meager forking and m-independence*, Proc. Int. Congress of Math., Berlin 1988, Doc.Math., Extra Vol. II (1998), 33–42.

[Ne3] L. Newelski, *Topological Dynamics of Definable Group Actions*, preprint 2006.

[NP] L. Newelski i M. Petrykowski, *Weak generic types and coverings of groups I*, Fund.Math. 191 (2006), 201–225.

[Pi] A. Pillay, *Geometric Model Theory*, Clarendon Press, Oxford 1996.

[Po] B. Poizat, *Groupes stables*, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbane, Francja 1985.

[Sa] G. Sacks, *Saturated Model Theory*, Benjamin, Reading 1972.

[Sh] S. Shelah, *Maximal Bounded Index Subgroup for Dpendent Theories*, preprint 2005.

Summary

In the first part the article contains an exposition of introductory notions of model theory. The second part is devoted to a new research direction in model theory, related to topological dynamics. Several connections between the notions of model theory and topological dynamics are discussed. In particular, a model-theoretic perspective on the Ellis semigroup is skeched.

Ludomir Newelski

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

e-mail: newelski@math.uni.wroc.pl