ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVI (2000)

Maciej Skwarczyński (Warszawa)

Twierdzenie Bochnera o tubie

W artykule(1) przedstawimy jeden z wariantów dowodu twierdzenia S. Bochnera o tubie. Bochner sformułował to twierdzenie w 1938 r. w pracy [1]. Podręcznik S. Bochnera i W. T. Martina [2], wydany w r. 1948 zamieszcza inny dowód. K. Stein wykładał twierdzenie Bochnera w Monachium, w roku akademickim 1961/62, por. [13]. Pokrewne zagadnienia omawiają prace [4], [10], [14].

Salomon Bochner (20.08.1899–2.05.1982) pochodził z Polski. Urodził się w Podgórzu koło Krakowa. W latach 1915–1918 uczęszczał do Königstadtische Oberrealschule w Berlinie; później (1918–1921) studiował na Uniwersytecie Berlińskim pod kierunkiem takich profesorów jak Ludwig Bieberbach, Richard von Mises, Erhard Schmidt i Issai Schur. Praca dyplomowa Bochnera (1921) miała tytuł *Über orthogonale systeme analytischer Funktionen.* Pracę habilitacyjną *Konvergenzsätze für Fourierreihen grenzperiodischen Funktionen* przedstawił w r. 1926, już jako asystent uniwersytetu w Monachium. W 1933 r. poszukiwał zatrudnienia w Cambridge(2), skąd – na 25 lat – udał się do Princeton University. Był tam asystentem (1933–1934), adiunktem (1934–1939), docentem (1939–1946). Jako konsultant pojawił się w „Los Alamos Project”. W 1953 r. przebywał w Berkeley University. W r. 1968 został zatrudniony jako profesor w Rice University; tamże w następnym roku podjął funkcję dziekana. Opublikował wiele szeroko znanych podręczników i monografii; jest także autorem książki z historii matematyki *The Role of Mathematics in the Rise of Sciences* (1966). Współpracownikami Bochnera byli m.in. R. P. Boas, G. Hardy, R. C. Gunning, W. Martin, J. von Neuman, D. Widder, K. Yano. Jego uczeń i współpracownik

(1) Artykuł był referowany 20.04.2000 na międzynarowej konferencji *90 years of RKHS property*, zorganizowanej w Krakowie przez Katedrę Analizy Funkcjonalnej UJ. Był również tematem odczytu w Instytucie Zastosowań Matematyki Chińskiej Akademii Nauk (Pekin) wygłoszonego 28.04.2000.

(2) Nieco wcześniej (1931) w Cambridge została wydana ważna monografia E. W. Hobsona *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, charakterystyczna dla brytyjskiego stylu (E. W. Hobson, E. T. Copson, G. N. Watson).

R. C. Gunning opracował (wraz z H. Rossim) monografię SCV [5]. Dzieła zebrane Bochnera pod redakcją Gunninga, zostały opublikowane przez American Mathematical Society w r. 1992.

S. Bochner jest autorem wielu prac z analizy harmonicznej i zespolonej geometrii różniczkowej. Jego twierdzenie o tubie należy do teorii funkcji holomorficznych wielu zmiennych zespolonych (ang. SCV). Dziedzina ta uzyskała samodzielne znaczenie po r. 1903 dzięki pracy Friedericha Hartogsa [6]. Hartogs był w Monachium uczniem A. Pringsheima.

Mówimy, że funkcja f, określona w otwartym podzbiorze $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, jest *holomorficzna*, jeśli lokalnie jest sumą szeregu potęgowego N zmiennych zespolonych. Zbiór wszystkich takich funkcji oznaczamy symbolem $\mathrm{Hol}\,(\Omega)$. Znana *zasada identyczności* mówi, że każda funkcja holomorficzna, określona w obszarze Ω i znikająca na dowolnie wybranym niepustym otwartym podzbiorze jest tożsamościowo równa zeru. Dostrzegamy tu analogię między rodziną funkcji holomorficznych a formą ożywioną: lokalna modyfikacja wymusza globalną reakcję.

1. Definicja. *Tuba* $T(B)$, jest to zbiór w $\mathbb{C}^N$ postaci $B + i\mathbb{R}^N$, gdzie B jest zbiorem w $\mathbb{R}^N$. Zbiór B nazywamy bazą rozpatrywanej tuby(3).

Część wspólna tub oraz suma tub są tubami. Również produkt kartezjański tub oraz powłoka wypukła tuby są tubami. Zachodzą bowiem łatwe do sprawdzenia równości

$$T(A \cap B) = T(A) \cap T(B), \tag{1}$$

$$T(A \cup B) = T(A) \cup T(B), \tag{2}$$

$$T(A \times B) = T(A) \times T(B), \tag{3}$$

$$T(\mathrm{conv}\,(B)) = \mathrm{conv}\,(T(B)). \tag{4}$$

W omawianym twierdzeniu Bochnera zaawansowane pojęcie analityczne (holomorficzność) jest powiązane z elementarnym pojęciem geometrycznym (wypukłość).

2. Twierdzenie Bochnera o tubie. *Rozpatrzmy obszar $B \subset \mathbb{R}^N$. Każda funkcja holomorficzna w obszarze $T(B)$ ma holomorficzne rozszerzenie do obszaru $T(\mathrm{conv}\,(B))$.*

3. Uwaga. Otwarty zbiór $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ nazywamy *regionem holomorficzności*, jeśli istnieje $f \in \mathrm{Hol}\,(\Omega)$, dla której jest naturalną dziedziną określoności. Mówiąc dokładniej: jeśli $p \in \mathrm{bd}\,\Omega$, to nie istnieje funkcja $h \in \mathrm{Hol}\,(U)$, określona w spójnym otoczeniu punktu p, taka że h jest bezpośrednim holomorficznym przedłużeniem funkcji f ze składowej zbioru Ω. Każdy obszar

(3) Dla uniknięcia nieporozumień zbiór $\mathbb{R}^N + iB$ proponujemy nazywać *tubą Minkowskiego* nad B.

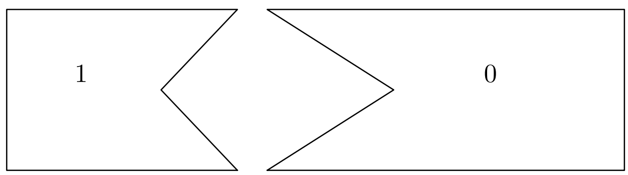
wypukły jest przykładem regionu holomorficzności. (Szczegóły można znaleźć w książce S. Krantza [8].) Region holomorficzności $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^N$, do którego rozszerza się holomorficznie każda funkcja holomorficzna w regionie Ω, nazywa się *obwiednią holomorficzności* dla Ω. Tak określona obwiednia holomorficzności nie zawsze istnieje, jednak jeśli istnieje, to jest jednoznacznie określona przez Ω. Twierdzenie Bochnera (dla ustalonego N) mówi, że

(a) Każdy obszar tubowy $T(B)$ ma w $\mathbb{C}^N$ obwiednię holomorficzności.

(b) Rodzina obszarów tubowych jest zamknięta ze względu na konstrukcję obwiedni holomorficzności.

(c) Obwiednia holomorficzności dla obszaru tubowego $T(B)$ jest określona jawnym wzorem jako $T(\operatorname{conv}(B))$.

Podkreślamy, że bez założenia spójności bazy B twierdzenie Bochnera jest fałszywe. Wystarczy rozpatrzeć w $\mathbb{R}^2$ bazę o dwu składowych przedstawioną na rys. 1 oraz lokalnie stałą funkcję holomorficzną f przyjmującą dwie wartości (0 i 1). Widać (zasada identyczności), że funkcja ta nie ma holomorficznego rozszerzenia do tuby nad obszarem wypukłym.



Rys. 1. Niespójna baza w $\mathbb{R}^2$.

Dowód twierdzenia Bochnera wymaga rozpatrzenia kilku przypadków. Przypadek pierwszy, wyróżniony w oryginalnej pracy Bochnera [1], dotyczy sytuacji, gdy baza $B = Q(\alpha') \cup Q(\alpha'')$ jest sumą dwu koncentrycznych współosiowych kostek. Ta część dowodu powtarza dokładnie oryginalne rozumowanie Bochnera–Martina [2], wystarczy więc ograniczyć się do krótkiego omówienia. Istotne znaczenie ma fakt, że kostka $Q(\alpha)$ jest produktem odcinków $(-\alpha_j, \alpha_j)$; w konsekwencji tuba nad $Q(\alpha)$ jest produktem tub nad odcinkami, tj. produktem wertykalnych pasów. Bochner aproksymował pas $-\alpha_j < \operatorname{Re} z_j < \alpha_j$ dyskiem eliptycznym $D(r_j)$, tj. obszarem płaskim, ograniczonym wertykalnie wydłużoną elipsą o półosiach α_j i $(\alpha_j^2 + k^2)^{1/2}$. Ogniska tej elipsy znajdują się w punktach $\pm ik$, a parametr $r_j := \alpha_j + (\alpha_j^2 + k^2)^{1/2}$ (suma półosi elipsy) jest wyznaczony przez k. Por. np. [3]. Niech $r = (r_1, \ldots, r_N)$. Tuba nad $Q(\alpha)$ jest aproksymowana polidyskiem eliptycznym

$$D(r) := D(r_1) \times \ldots \times D(r_N). \tag{5}$$

Klasyczna teoria rozwinięć potęgowych w polidyskach dopuszcza uogólnienie na polidyski eliptyczne. Istnieje ciąg wielomianów[4] jednej zmiennej $R_0, R_1, \ldots$ taki, że każda funkcja $f(z)$ holomorficzna w polidysku eliptycznym $D(r)$ ma w tym polidysku jednoznaczne przedstawienie jako suma lokalnie jednostajnie zbieżnego szeregu wielomianowego

$$f(z) = \sum_{n_1,\ldots,n_N=0}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_N} R_{n_1}(z_1)\cdots R_{n_N}(z_N). \tag{6}$$

Co więcej, jeśli $\sigma_j < r_j$, $j = 1, \ldots, N$, to przy odpowiednim wyborze stałej M zachodzą nierówności Cauchy'ego-Hadamarda. Wypisując te nierówności dla kostek $Q' = Q(\alpha'), Q'' := Q(\alpha'')$ otrzymujemy

$$|a_{n_1,\ldots,n_N}| \leqslant \frac{M}{(\sigma_1')^{n_1}\cdots(\sigma_N')^{n_N}} = \frac{M}{\exp(n_1 \ln\sigma_1' + \ldots + n_N \ln\sigma_N')}, \tag{7}$$

$$|a_{n_1,\ldots,n_N}| \leqslant \frac{M}{(\sigma_1'')^{n_1}\cdots(\sigma_N'')^{n_N}} = \frac{M}{\exp(n_1 \ln\sigma_1'' + \ldots + n_N \ln\sigma_N'')}. \tag{8}$$

Niech λ, μ będą współczynnikami kombinacji wypukłej. Podnosząc obie strony (7) do potęgi λ, obie strony (8) do potęgi μ i mnożąc otrzymane nierówności stronami otrzymujemy

$$|a_{n_1,\ldots,n_N}| \leqslant \frac{M}{\exp[n_1(\lambda\ln\sigma_1' + \mu\ln\sigma_1'') + \ldots + n_N(\lambda\ln\sigma_N' + \mu\ln\sigma_N'')]}. \tag{9}$$

Gdy σ_j' jest bliskie r_j', a σ_j'' jest bliskie r_j'', to $\lambda\ln\sigma_j' + \mu\ln\sigma_j''$ jest bliskie liczby

$$\ln\rho_j = \lambda\ln r_j' + \mu\ln r_j''. \tag{10}$$

Zauważmy, że liczby ρ_j wyznaczane z (10), odpowiadające różnym współczynnikom kombinacji wypukłej, tworzą zbiór ograniczony. Z (10) i (9) wynika ponadto, że współczynniki rozwinięcia (6) czynią zadość nierównościom Cauchy'ego-Hadamarda w polidysku eliptycznym $D(\rho)$, gdzie $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$. Zatem szereg (6) przedstawia funkcję holomorficzną w każdym z otrzymanych polidysków eliptycznych $D(\rho)$, niezależnie od współczynników kombinacji wypukłej (10). Wobec zasady identyczności każde dwie takie funkcje są zgodne (bo są zgodne z f w otoczeniu punktu 0, a część wspólna polidysków eliptycznych jest spójna, jako zbiór wypukły). Wynika stąd, że przy ustalonym k szereg (6) przedstawia holomorficzne rozszerzenie funkcji f określone w sumie wszystkich polidysków $D(\rho)$.

---

[4] Wielomiany $R_j(z)$, wprowadzone w książce Bochnera i Martina, są stosunkowo elementarne i wiążą się z funkcją Żukowskiego. W pracy z r. 1938 Bochner korzystał w tym miejscu z klasycznych wielomianów Legendre'a.

Ustalmy ρ wyznaczone z (10) i rozpatrzmy kostkę $Q(\delta)$ gdzie $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_N)$, oraz $\rho_j = \delta_j + (\delta_j^2 + k^2)^{1/2}$. Równość (10) można przepisać jako

$$\ln(\delta_j + \sqrt{\delta_j^2 + k^2}) = \lambda \ln(\alpha_j' + \sqrt{(\alpha_j')^2 + k^2}) + \mu \ln(\alpha_j'' + \sqrt{(\alpha_j'')^2 + k^2}). \tag{11}$$

Odejmując od obu stron (11) liczbę

$$\ln k = \lambda \ln k + \mu \ln k. \tag{12}$$

i mnożąc obustronnie przez k powstałą równość otrzymujemy równoważny warunek określający δ_j, mianowicie

$$\delta_j \left(\frac{\delta_j}{k}\right)^{-1} \ln\left(\frac{\delta_j}{k} + \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_j}{k}\right)^2}\right) = \lambda\sigma_j' \left(\frac{\sigma'}{k}\right)^{-1} \ln\left(\frac{\sigma_j'}{k} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_j'}{k}\right)^2}\right) + \mu\sigma_j'' \left(\frac{\sigma_j''}{k}\right)^{-1} \ln\left(\frac{\sigma_j''}{k} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_j''}{k}\right)^2}\right). \tag{13}$$

Dla dostatecznie dużych k z (13) wynika równość przybliżona

$$\delta_j \approx \lambda\sigma_j' + \mu\sigma_j''. \tag{14}$$

Wynika stąd, że dla dużych k liczba δ_j wyznaczona z (13) niewiele różni się od kombinacji wypukłej (14). Wynika stąd, że f ma holomorficzne rozszerzenie do sumy tub nad kostkami $Q(\delta)$, gdzie $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_N)$ jest kombinacją wypukłą wektorów $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_N')$ i $\alpha'' = (\alpha_1'', \ldots, \alpha_N'')$. Elementarne rozważania pokazują, że wspomniana suma tub jest tubą nad powłoką wypukłą zbioru $Q(\alpha') \cup Q(\alpha'')$. Otrzymaliśmy tezę twierdzenia Bochnera dla rozpatrywanego przypadku. (Wynika stąd łatwo, że twierdzenie Bochnera pozostaje prawdziwe dla każdej tuby, której baza jest obrazem sumy dwu koncentrycznych współosiowych kostek przy izometrii afinicznej przestrzeni $\mathbb{R}^N$.)

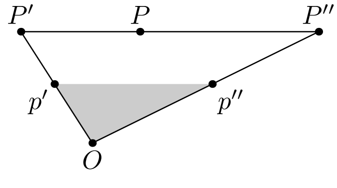
W dalszym ciągu dowodu rozpatrzymy pozostałe przypadki występujące w twierdzeniu Bochnera. W tej części nasze rozumowanie odbiega od oryginalnej pracy Bochnera. Tak więc dowód przedstawiony w tym artykule składa się z czterech etapów, w których rozpatrujemy coraz bardziej ogólne bazy. W dowodzie tym zakładamy kolejno, że baza B jest: (a) sumą koncentrycznych kostek, (b) obszarem gwiaździstym, (c) skończonym łańcuchem obszarów wypukłych, (d) dowolnym obszarem.

Tuba nad obszarem gwiaździstym. Ważną rolę w części (b) dowodu odgrywa rys. 3. Jest to rysunek z oryginalnej pracy Bochnera [1] uzupełniony dodatkowymi szczegółami. Szczególnie istotne jest rozbicie odcinka OP na sumę odcinków OP_0 i P_0P'.

Przedstawimy odpowiednie rozumowanie. Rozpatrzmy tubę $T(B)$ nad obszarem gwiaździstym względem punktu x^o. Bez straty ogólności można przyjąć, że $x^o = 0$. Za Ronkinem [9] wprowadzamy do rozważań rodzinę Ξ wszystkich tub $T(G)$, gdzie obszar G jest gwiaździsty względem punktu 0 i ma własność następującą. Dla każdej funkcji f holomorficznej w $T(B)$ istnieje funkcja g holomorficzna w $T(G)$, która pokrywa się z f w pewnym otoczeniu punktu 0. Rodzina Ξ jest niepusta, bo zawiera tubę $T(B)$. Jeśli $T(G_1), T(G_2)$ należą do Ξ i dla $j = 1, 2$ funkcja g_j, holomorficzna w $T(G_j)$, pokrywa się z f w pewnym otoczeniu punktu 0, to (zgodnie z zasadą identyczności) $g_1 = g_2$ na składowej zbioru $T(G_1) \cap T(G_2)$ zawierającej punkt 0. Zbiór ten nie ma innych składowych (jest gwiaździsty), więc $g_1 = g_2$ w $T(G_1) \cap T(G_2)$. Sumą rodziny Ξ jest tuba $T(B^*)$ nad obszarem B^* gwiaździstym względem punktu 0. Ponieważ wszystkie funkcje g są zgodne, więc łącznie określają funkcję f^* holomorficzną w $T(B^*)$. Ponieważ $T(B) \in \Xi$, więc $T(B) \subset T(B^*)$ i f^* jest holomorficznym rozszerzeniem dla f. Aby otrzymać tezę twierdzenia Bochnera w rozpatrywanym przypadku (b), uzasadnimy następujące

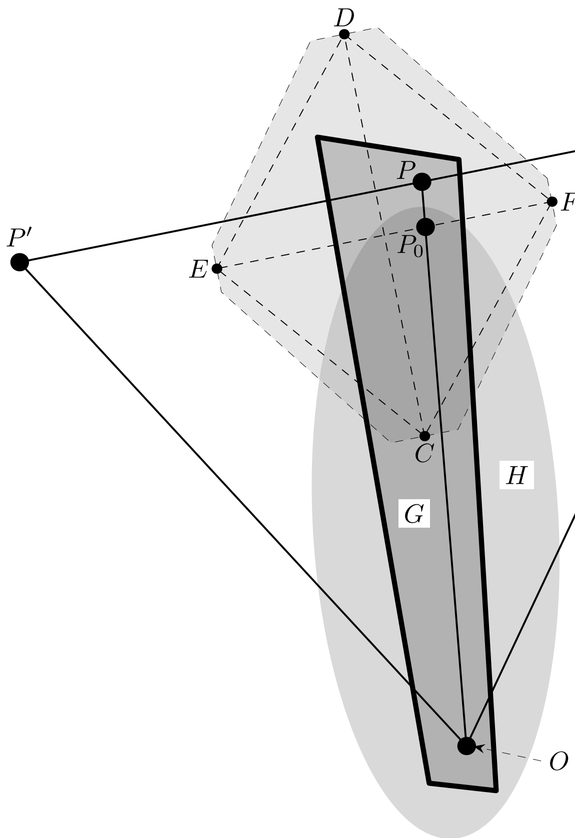
4. Twierdzenie. *Dla każdego gwiaździstego obszaru B obszar B^* jest wypukły.*

Dowód. Rozumując nie wprost rozpatrzmy w B^* punkty P', P'' takie, że odcinek $P'P''$ nie zawiera się w B^*. Wobec gwiaździstości B^* zawiera odcinki OP', OP''. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że otwarty trójkąt $P'OP''$ jest zawarty w B^*. W przeciwnym przypadku zastąpilibyśmy $P'P''$ (odpowiednio dobranym) równoległym odcinkiem $p'p''$, gdzie $p' \in OP'$, $p'' \in OP''$, por. rys. 2.



Rys. 2. Można przyjąć, że wnętrze $P'OP''$ zawiera się w B^*.

Niech P będzie pierwszym nie należącym do B^* punktem na odcinku $P'P''$. Niech S będzie punktem na odcinku $P'P''$, następującym po P, takim że długość PS jest mniejsza od długości $P'P$. Można znaleźć prostopadłe i połowiące się domknięte odcinki EF i CD, zawarte w B^*, dla których P jest punktem wewnętrznym rombu $ECFD$, por. rys. 3.



Rys. 3. Gwiaździste otoczenie G odcinka OP jest zawarte w $U \cup H$. Przy tym $T(G) \in \Xi$.

W tym celu wybieramy odcinek EF zawarty w trójkącie $P'OP''$, równoległy do $P'P''$, przecinający OP w punkcie P_o, taki by punkty F i S były dostatecznie bliskie. Drugą przekątną CD szukanego rombu można wówczas wybrać tak krótką, by zachodziła inkluzja $CD \subset B^*$.

Rozpatrzmy małe otoczenie W odcinka EF w postaci N-wymiarowego prostopadłościanu (izometryczny obraz kostki), takie że $W \subset B^*$. Analogicznie rozpatrzmy małe otoczenie V odcinka CD w postaci N-wymiarowego prostopadłościanu, takie że $V \subset B^*$. Możemy przyjąć, że prostopadłościany W, V są koncentryczne i współosiowe. Niech $U := \operatorname{conv}(W \cup V)$. Oczywiście $PP_o \subset U$. Niech $H \subset \mathbb{R}^N$ będzie wypukłym otoczeniem odcinka OP_o zawartym w B^*. Na koniec, niech $G \subset H \cup U$ będzie otoczeniem domkniętego odcinka OP, gwiaździstym względem punktu O.

Dla każdej funcji f holomorficznej w $T(B)$ istnieje, na mocy rozpatrzonego przypadku (a), funkcja h holomorficzna w $T(U)$, która na $T(W \cup V)$ pokrywa się z f^*. Tak więc h pokrywa się z f^* w otoczeniu punktu $P_o \in T(W \cup V)$, a co za tym idzie w (wypukłym) zbiorze $T(U) \cap T(H)$ punktu P_o

(zasada identyczności). Wynika stąd, że funkcje h i f^* zgodnie określają pewną funkcję holomorficzną na $T(U \cup H)$. Zawężenie tej funkcji do gwiaździstej tuby $T(G)$ pokrywa się w małym otoczeniu punktu 0 z f^*, a zatem z f.

Powyższe rozumowanie pokazuje, że $T(G) \in \Xi$. W konsekwencji, $G \subset B^*$ i $P \in B^*$. Wiemy jednak, że zbiór B^* jest otwarty w $\mathbb{R}^N$, a P, zgodnie z określeniem, leży na brzegu zbioru B^*. Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc dowód twierdzenia Bochnera w przypadku (b) został zakończony. □

Tuba nad łańcuchem obszarów wypukłych. Udowodnimy teraz twierdzenie Bochnera w przypadku (c), gdy baza B jest sumą obszarów wypukłych D_j, $j = 1, \ldots, s$, takich, że $D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$ dla $j = 1, \ldots, s-1$[5]. Będziemy rozumować przez indukcję względem s. Dla jednoelementowego łańcucha teza jest oczywista. Dla $s = 2$ teza wynika z (wcześniej wykazanego) przypadku (b) twierdzenia Bochnera. Korzystamy tu z faktu, że suma dwu zbiorów wypukłych o niepustym przecięciu jest zbiorem gwiaździstym. Załóżmy, że $s \geqslant 3$, oraz że teza jest prawdziwa dla wszystkich łańcuchów o liczbie elementów mniejszej niż s. Mamy $B = D_0 \cup D_s$, gdzie $D_0 = D_1 \cup \ldots \cup D_{s-1}$. Niech f będzie dowolną funkcją holomorficzną w $T(B)$ i niech $D := \operatorname{conv}(D_0)$. Wobec założenia indukcyjnego istnieje funkcja g holomorficzna w $T(D)$, która pokrywa się z f na $T(D_0)$ i w szczególności na $T(D_{s-1}) \cap T(D_s)$. Na mocy zasady identyczności g pokrywa się z f na wypukłym zbiorze $T(D) \cap T(D_s)$ zawierającym $T(D_{s-1}) \cap T(D_s)$. Wynika stąd, że g i f zgodnie określają funkcję holomorficzną na sumie $T(D) \cup T(D_s)$. Funkcja ta jest rozszerzeniem f, a ponadto, na mocy twierdzenia Bochnera dla dwuelementowego łańcucha zbiorów wypukłych, rozszerza się holomorficznie do tuby nad obszarem

$$\operatorname{conv}(D \cup D_s) = \operatorname{conv}(D_1 \cup \ldots \cup D_s) = \operatorname{conv} B. \tag{15}$$

Otrzymaliśmy holomorficzne rozszerzenie funkcji f do tuby $T(\operatorname{conv} B)$. Na mocy zasady indukcji teza ma miejsce dla każdego skończonego łańcucha obszarów wypukłych. Tym samym wykazaliśmy prawdziwość twierdzenia Bochnera w przypadku (c).

Tuba nad dowolnym obszarem. W ogólnym przypadku (d) obszar $B \subset \mathbb{R}^N$ można przedstawić jako sumę wstępującego ciągu B_n, $n = 1, \ldots,$ gdzie każdy wyraz B_n jest sumą skończonego łańcucha obszarów wypukłych. Na mocy przypadku rozpatrzonego poprzednio, dla każdej funkcji f holomorficznej w $T(B)$ i każdego n istnieje funkcja f_n, holomorficzna w $T(\operatorname{conv} B_n)$, która na B_n jest równa f. Zauważmy, że obszar $\operatorname{conv} B$

[5] W zastosowaniach metody rzutów alternatywnych (por. [11]) występuje analogiczna konfiguracja. Ta heurystyczna wskazówka pomogła wyodrębnić przypadek (c).

jest sumą wstępującego ciągu wypukłych obszarów conv B_n. Wobec zasady identyczności, funkcje f_n są zgodne i określają funkcję f^* holomorficzną w $T(\operatorname{conv} B)$, która na $T(B)$ pokrywa się z f. Twierdzenie Bochnera zostało w pełni udowodnione. □

Literatura dodatkowa

[1] S. Bochner, *A theorem on analytic continuation of functions in several variables*, Ann. of Math. 39 (1938), 14–19.

[2] S. Bochner, W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton, 1948.

[3] K. Borsuk, *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa, 1977.

[4] H. Bremermann, *Die Holomorphiehullen der Tuben und Halbtubengebiete*, Math. Ann. 127 (1954), 406–423.

[5] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, 1965.

[6] F. Hartgos, *Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzenreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlichen* (praca dyplomowa, München Univ., 1903).

[7] E. W. Hobson, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge, 1931.

[8] S. Krantz, *Teoria funkcji wielu zmiennych zespolonych*, PWN, Princeton, 1948.

[9] L. Ronkin, *Elementy tieorji analiticzeskich funkcij mnogich pieremiennych*, Naukowa Dumka, Kijów, 1977.

[10] W. Rudin, *Lectures on the edge of the wedge theorem*, AMS Regional Conference Series 6.

[11] M. Skwarczyński, *The Bergman function, biholomorphic invariants and the Laplace transform*, Annales UMCS 48 (1994), 120–161.

[12] M. Skwarczyński, T. Mazur, *Wstępne twierdzenia teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych*, Wyd. Krzysztof Biesaga i wyd. UKSW, Warszawa 2000 (w druku).

[13] K. Stein, *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen.* Vorlesungen an der Universität München 1961/62. Ausarbeitung K. Wolfhardt.

[14] V. S. Wladimirov, *Les fonctions de plusieurs variables complexes* (*et leur application à la théorie quantique des champs*), Dunod, Paris, 1967.