ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLII (2006)

Piotr Rybka (Warszawa)

Peter Lax, jakim go znam

Nagroda Abela została ustanowiona pierwszego stycznia 2002 roku decyzją rządu Norwegii, aby upamiętnić dwusetną rocznicę urodzin Nielsa Henrika Abela i aby móc honorować matematyków, którzy z racji przekroczenia granicy 40 lat nie kwalifikowali się do otrzymania medalu Fieldsa. Jest ona uzupełnieniem nagrody Nobla, która ściśle rzecz ujmując nie obejmuje matematyki. Znamy jednak laureatów z innych dziedzin, który zostali uhonorowani za prace matematyczne, np. John Nash, a ostatnio Robert Aumann, obaj nagrodzeni w dziedzinie ekonomii.

Pierwszym laureatem nagrody Abela był Jean-Pierre Serre w roku 2003. W roku 2004 wspólnie nagrodzeni zostali sir Michael Atiyah i Isadore Singer. Następnie, ku mojej radości, wyróżniony został Peter Lax, emerytowany profesor Instytutu Couranta w Nowym Jorku, czyli wydziału matematyki i informatyki Uniwersytetu Nowojorskiego. Tegorocznym laureatem jest Lennart Carleson.

Gdy w 1987 roku wstępowałem do Instytutu jako doktorant, to Peter Lax był jedną ze sław – magnesem przyciągającym młodych ludzi z całego świata, chcących studiować analizę, równania różniczkowe i ich zastosowania. Obok niego wymieniłbym pracujących tam wtedy Jamesa Glimma i Louisa Nirenberga.

Z oficjalnego komunikatu Norweskiej Akademii Nauk i Literatury dowiadujemy się, że nagroda została przyznana „za głęboki i przełomowy wkład do teorii i zastosowań równań różniczkowych oraz obliczeniowego ich rozwiązywania”. Znaczenie dorobku łatwo podsumować jednym zdaniem: bez lematu Laxa–Milgrama nie obejdzie się żaden nowoczesny wykład równań różniczkowych cząstkowych. Do tego trzeba dołączyć katalog zagadnień, do których rozwoju istotnie się przyczynił. W jego skład wchodzą:

– teoria równań hiperbolicznych, a zwłaszcza praw zachowania, i metody numerycznego ich rozwiązywania;
– nieskończenie wymiarowe układy całkowalne, teoria solitonów, analogony transformaty Cole'a-Hopfa dla równania Kortewega-de Vriesa;
– teoria rozpraszania (i zaskakujące jej zastosowania w teorii liczb);

– teoria numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych;
– podwaliny teorii całkowych operatorów Fouriera.

Zanim częściowo przybliżę jego osiągnięcia, wspomnę, że Peter Lax przy każdej okazji podkreślał swoje węgierskie pochodzenie. Urodził się pierwszego maja 1926 roku w Budapeszcie. W dniu ataku na Pearl Harbor był z rodzicami w drodze do Ameryki. Jak sam powiada, ucieczka z Węgier uchroniła go przed pewną śmiercią z rąk hitlerowców. Rodzina Laxa osiadła w Nowym Jorku, gdzie Peter chodził do szkół. W 1949 roku został absolwentem Uniwersytetu Nowojorskiego, napisawszy pracę doktorską, u samego Richarda Couranta, współzałożyciela obecnego Instytutu Couranta. Po rocznej pracy w Los Alamos w 1950 roku, dokąd wielokrotnie wracał na lato jako konsultant, związał się na stałe z Instytutem Couranta, w latach 1972–1980 był nawet jego dyrektorem. Otrzymał wiele doktoratów honoris causa i jest laureatem licznych nagród.

Wyjaśniając jego dokonania przedstawię jednocześnie co mną kierowało, aby udać się na studia do Instytutu Couranta. Zawsze w matematyce pociągały mnie zagadnienia związane z równaniami różniczkowymi i ich zastosowaniami. Wiemy, że w przyrodzie obowiązują prawa zachowania, np. masy, pędu, energii. Niektóre z równań fizyki matematycznej są w istocie zapisem takich praw. W szczególności jest nim równanie cieczy idealnej. Peter Lax zajmował się prawami zachowania, które można zapisać jako układy hiperboliczne. Z grubsza rzecz ujmując, hiperboliczność oznacza tutaj istnienie odpowiedniej ilości naturalnych kierunków rozchodzenia się fal.

Zdarzają się złośliwe przypadki układów równań hydrodynamiki opisujące przepływy naddźwiękowe, które zmieniają typ, co przyprawia konstruktorów samolotów o ból głowy.

Jednym z ważnych zagadnień praktycznych i teoretycznych jest pytanie o rozchodzenie się fal uderzeniowych. Wyobraźmy sobie rurę przedzieloną przegrodą, po jednej jej stronie jest gaz a po drugiej próżnia. Zagadnienie Riemanna polega na opisie zachowania się gazu, po gwałtownym usunięciu wspomnianej przegrody. W skrajnym uproszczeniu problem sprowadza się do znalezienia rozwiązań nieliniowego równania Burgersa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

uzupełnionego warunkami początkowymi $u(x,0) = u_p$ dla $x \geqslant 0$ i $u(x,0) = u_l$ dla $x < 0$, gdzie $u_l \neq u_p$. Dostajemy zagadnienie, którego rozwiązania są dane prostymi do zbadania wzorami. Spodziewamy się, że gaz będzie się rozprężał, a w próżnię będzie przemieszczać się nieciągłość gęstości, ciśnienia i prędkości, gazu, czyli fala uderzeniowa.

Wykłady z równań różniczkowych przyzwyczajają nas do badania zagadnień dobrze postawionych, tj. takich, dla którym m.in. prawdziwe jest twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań i ciągłej zależności od danych. W tym przypadku bardzo łatwo jest wykazać, że naiwne podejście powoduje katastrofalne załamanie jednoznaczności! Można bowiem podać jawnym wzorem jednoparametrową rodzinę rozwiązań. W tym momencie trzeba było odwołać się do fizyki zagadnienia, co zrobił Lax. Jego zasługą jest rozwiązanie tego problemu, choć od razu trzeba powiedzieć, że nie on jeden zajmował się tą tematyką.

Mianowicie, jest oczywiste, że przejście fali uderzeniowej powoduje zniszczenia albo, bardziej elegancko, utratę informacji. Utrata informacji, to nic innego jak wzrost entropii. A zatem fizycznie poprawne są takie rozwiązania, które prowadzą do wzrostu entropii układu: informacja jest tracona po przejściu fali. W szczególności zakazane są rozwiązania prowadzące do promieniowania informacji przez falę. Okazuje się, że takie podejście do zagadnienia Riemanna już daje jednoznaczność rozwiązań.

Jedna rzecz, to teoria rozwiązań, druga to praktyczne jej zastosowania. Mam tu na myśli schematy obliczeniowe do rozwiązywania wspomnianych praw zachowania, a zwłaszcza fal uderzeniowych. Mamy szereg algorytmów obliczeniowych noszących imię Laxa: schematy Laxa-Wendroffa, Laxa-Friedrichsa. Chcę wskazać na zasadniczą trudność, którą można pokonać w obliczeniach z ich pomocą, a jest nią poprawne odtworzenie położenia i kształtu nieciągłości rozwiązania. Zasada wzrostu entropii podpowiada, że nasze obliczenia powinny być takie, aby informacja była tracona, w tym przypadku byłoby nią dokładne położenie fali. Dlatego godzimy się z jej rozmywaniem, natomiast nie do zaakceptowania jest sytuacja, gdy po przejściu fali pojawiają się niefizyczne oscylacje, które początkującym programistom mogą zniszczyć obliczenia. Dlatego schematy Laxa wprowadzają numeryczną dysypację, to znaczy, że zastosowane do równania Burgersa (1) prowadzą do rozwiązywania lepkiego równania Burgersa. Pod tą nazwą kryje się równanie, którego lewa strona jest taka, jak w (1), a po prawej mamy wyraz $\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Współczesne metody obliczeniowe umożliwiają jednak śledzenie fali z dokładnością większą niż ta, na którą pozwalają schematy Laxa.

Kluczowym pytaniem analizy numerycznej jest to, czy rozwiązanie obliczone w jakikolwiek sposób przybliża dokładne. W szczególności spodziewamy się, że błąd będzie maleć przy zmniejszaniu kroku czasowego (i przestrzennego) obliczeń. Możemy skupić się na równaniu

$$y' = f(y,t), \qquad y(0) = y_0, \tag{2}$$

bo wiele zagadnień ewolucyjnych, a wśród nich i (1) jak i te poniżej (3), (4), po dyskretyzacji przestrzennej sprowadzają się do zagadnienia (2). W miarę ogólny schemat jego rozwiązania można zapisać następująco,

$$y^0 := y_0, \qquad y^{n+1} = y^n + hF(y^{n+1}, y^n, \ldots, y^{n-k}), \qquad n = 1, \ldots, N,$$

gdzie h jest krokiem czasowym, w domyśle małym. Występowanie y^{n+1}, po obu stronach wzoru, nie jest pomyłką autora. W miarę „łatwo” jest sprawdzić, jaki błąd popełniamy posługując się tym wzorem. Podstawowym narzędziem jest tu wzór Taylora. Schemat jest zgodny, jeśli ów błąd dąży do zera wraz z krokiem czasowym h. Jednakże pytamy, co się stanie z obliczeniami, gdy h dąży do zera, a N rośnie jak $\sim 1/h$. Wkład Petera Laxa w wyjaśnienie tego problemu jest ogromny. Jego odkryciem jest twierdzenie głoszące, iż dla schematu zgodnego warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności jest stabilność. Upraszczając możemy powiedzieć, że schemat jest stabilny, jeśli zmianę wyniku obliczeń, powstałą w wyniku zmiany danych początkowych, można ograniczyć za pomocą odległości pomiędzy danymi początkowymi. Oczywiście pojęcie to ma sens tylko wtedy, gdy pierwotne równanie ma tę własność, iż jego rozwiązania zależą w sposób ciągły od danych początkowych, tj. gdy jest dobrze postawione.

Będąc doktorantem przyciągniętym sławą Petera Laxa chodziłem na wszystkie wykłady monograficzne przez niego prowadzone. Choć miał ogromny wpływ na rozwój teorii praw zachowania, to raczej nie było tego tematu w jego wykładach. Zostawił go swoim kolegom, Jamesowi Glimmowi i Tai-Ping Liu. Wykładał m.in. transformatę Radona, której teoria leży u podstaw tomografii komputerowej, a nawet elementy teorii rozpraszania w oparciu o książkę napisaną wspólnie z Ralphem Phillipsem. Bardzo dużo czasu poświęcał ulubionym równaniom hiperbolicznym, choć tutaj nie posługiwał się własnymi wynikami na temat rozwiązań asymptotycznych i optyki geometrycznej, które legły u podstaw teorii całkowych operatorów Fouriera. Raczej sięgał po nowoczesne metody hörmanderowskiej teorii operatorów pseudoróżniczkowych.

Wielką przyjemność sprawiały mi te jego wykłady, w których posługując się nietrywialnymi narzędziami topologii algebraicznej, uzyskiwał wyniki dotyczące równań cząstkowych. Pokazywały one głębię jego wiedzy i szerokość zainteresowań. Jednocześnie przekonywał nas o *jedności* matematyki. Cytując Joe Kellera, wyraził ją tak: „matematyka czysta jest gałęzią matematyki stosowanej”. To znaczy, że potrzeba rozwiązywania zagadnień mniej lub bardziej praktycznych prowadzi do abstrakcyjnych teorii, które po jakimś czasie zaczynają żyć własnym życiem.

Interesowałem się też jego propozycjami tematów prac doktorskich. Rozmowa o nich była dobrą okazją, aby poznać go bliżej. To, że termin spotkania trzeba było potwierdzać u jego osobistej sekretarki, było trochę kłopotliwe, ale nie było czymś nadzwyczajnym. Najważniejsze jednak było to, że będąc bardzo zajętym człowiekiem, był dostępny dla potrzebujących jego wsparcia studentów i że można było liczyć na jego punktualność. Konsultacje z nim były zawsze owocne i pouczające. Przyjmował w prestiżowym i przestronnym gabinecie narożnym na szóstym piętrze. Sam gabinet świadczył, że mamy do czynienia z dobrze zorganizowanym człowiekiem, bo grubość warstw papierów na biurku zależała od intensywności pracy, a nie była monotoniczną funkcją czasu.

Gdy udałem się do niego na rozmowę, to zostałem przyjęty punktualnie. Tematy, które mi proponował, były bądź związane z obliczeniami, bądź z uogólnieniami transformaty Cole'a-Hopfa. Transformata ta jest zamianą zmiennych sprowadzającą lepkie równanie Burgersa do liniowego równania przewodnictwa cieplnego,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3}$$

które można rozwiązać za pomocą jawnego wzoru. W ostatecznym rachunku dostaniemy wzór na rozwiązanie lepkiego równania Burgersa. Peter Lax i David Levermore badali transformację dającą jawny wzór na rozwiązanie równania Kortewega-de Vriesa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{4}$$

To ostatnie zagadnienie wydawało mi się za trudne, ani nie chciałem się w pełni poświęcić obliczeniom, dlatego nie napisałem u niego doktoratu, ale u Boba Kohna.

Mimo iż nie nawiązaliśmy współpracy, to dzięki tym krótkimi spotkaniom miałem okazję, aby osobiście się przekonać, że Peter Lax jest nie tylko wybitnym matematykiem, świetnym wykładowcą, ale nade wszystko bardzo miłym człowiekiem. Podkreślają to jego znajomi i uczniowie. Zawsze był promiennie uśmiechnięty. A jak na człowieka piastującego poważne stanowiska przystało, chodził w twarzowej, eleganckiej szarej marynarce, choć bez krawata. Zawsze miał dużo życzliwości i ciepła dla młodych ludzi.

Peter Lax ma też pewną przypadłość, która mnie zaskakiwała, ale z upływem czasu nabrałem dla niej zrozumienia. Na seminaria często przychodził w ostatniej chwili. Zawsze pogodny przemykał przed audytorium i siadał w pierwszym rzędzie. Mniej więcej po kwadransie zapadał w sen. Nie byłoby w tym nic zaskakującego, wystarczy przy najbliższej okazji uważniej rozejrzeć się po sali seminaryjnej (o ile sami nie zaśniemy). Budził się na pięć minut przed końcem wykładu i niezawodnie zaczynał zadawać dociekliwe pytania, które świadczyły o wielkiej trzeźwości umysłu. Głębia umysłu i zwykła ludzka dobroć gospodarza narożnego gabinetu sprawiają, że spotkania z nim pozostaną niezapomnianym przeżyciem.

Piotr Rybka
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02–798 Warszawa
e-mail: rybka@hydra.mimuw.edu.pl