ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLIV (2008)

Tomasz Schreiber (Toruń)*

Powstawanie kropli dla wielokątnych pól Markowa

Wprowadzenie. Celem niniejszego artykułu jest przybliżenie Czytelnikowi pewnego szczególnego *modelu konturowego*, tak zwanego *wielokątnego pola Markowa* (skonstruowanego oryginalnie przez Araka, Surgailisa i Clifforda [1, 2, 3]), a następnie opisanie pewnych jego własności w niskiej temperaturze. Jedną z takich własności jest proces formowania się *kropli Wulffa* – wyspowatych skupisk ośrodka dominowanego w *oceanie* ośrodka dominującego – których geometria zadana jest wymaganiem minimalizacji *energii powierzchniowej* kropli danej całką konturową ze specyficznego dla modelu napięcia powierzchniowego, zob. przełomową monografię Dobrushina, Koteckiego i Shlosmana [4] oraz pracę [8].

Tak zwane modele konturowe są ciekawą i bogatą w zastosowania fizyczne klasą geometrycznych procesów losowych na płaszczyźnie. Są to losowe zespoły rozłącznych zamkniętych krzywych prostych (bez samoprzecięć), najczęściej o charakterze wielokątnym. Krzywe te często nazywa się konturami – pochodzi to od fizycznej interpretacji takich modeli, w których wchodzące w skład zespołu krzywe zamknięte traktuje się jako *granice* pomiędzy dwoma konkurującymi ze sobą ośrodkami o niezgodnej naturze wymuszającej ich przestrzenną separację. Dobrym przykładem są tutaj np. domeny magnetyczne o niezgodnych zwrotach magnetyzacji, ośrodki płynne i gazowe, woda i olej itp. Oczywiście, można tu zapytać: dlaczego rozważa się dwuwymiarowe wersje takich obiektów, skoro większość związanych z nimi sytuacji fizycznych ma w świecie rzeczywistym charakter trójwymiarowy? Odpowiedzi są zasadniczo dwie. Po pierwsze również w dwuwymiarze istnieje bardzo duże bogactwo nietrywialnych zagadnień opisywalnych przy pomocy modeli konturowych, po drugie zaś, współczesne techniki matematyczne, jakkolwiek pozwalają w miarę dobrze opisywać takie modele w dwuwymiarze, wydają się wymagać istotnego rozwinięcia, zanim zostaną z sukcesem

* Autor jest laureatem nagrody im. K. Kuratowskiego dla młodych matematyków polskich za rok 2005. Fragmenty poniższej pracy przedstawione zostały podczas referatu przy odbiorze nagrody (IMPAN, Warszawa, maj 2005).

zastosowane do ich odpowiedników w trójwymiarze (gdzie zamiast krzywych zamkniętych rozważa się powierzchnie zamknięte). Sztandarowym przykładem jest tu model Isinga (na regularnej kracie, np. $\mathbb{Z}^d$), który w przypadku $d = 2$ doczekał się pełnego rozwiązania, przy braku pola zewnętrznego, już w 1944 roku (Onsager, [9]), podczas gdy dla jego wersji trójwymiarowej istnieje jedynie szereg niezweryfikowanych matematycznie hipotez, stanowiących od wielu lat istotne i dotychchczas niespełnione wyzwanie. Czytelnikowi zainteresowanemu własnościami modeli mechaniki statystycznej polecamy książkę [5], gdzie znaleźć można także szereg dalszych odnośników literaturowych.

Modele konturowe są zazwyczaj parametryzowane pewnymi wielkościami fizycznymi, spośród których należy wymienić zwłaszcza temperaturę i zewnętrzne pole magnetyczne. Jak parametry te wyraża się w języku matematycznym opiszemy poniżej. Jednym z podstawowych zjawisk podlegających badaniom są, tak zwane, *przejścia fazowe* – gwałtowne zmiany właściwości modelu przy bardzo niewielkich zmianach parametru. W będącej matematyczną idealizacją, tak zwanej, *granicy termodynamicznej*, sprowadzającej się w uproszczeniu do przejścia do nieskończoności z rozmiarem układu, odpowiada to istnieniu tzw. punktów krytycznych, oddzielających wartości parametrów dla których pewne zjawisko zachodzi od tych, dla których ono nie zachodzi. Znów podstawowym przykładem jest tu, tak zwany punkt Curie – wartość temperatury powyżej której ferromagnes zatraca swoje własności magnetyczne (nie można go namagnesować, traci swoje dotychczasowe namagnesowanie), zaś poniżej której własności magnetyczne są obecne. W terminach opisującego te zjawiska modelu konturowego Isinga oznacza to (z dokładnością do pewnych konwencji dotyczących rozumienia pojęcia krzywej zamkniętej na kracie całkowitoliczbowej $\mathbb{Z}^2$), że powyżej temperatury krytycznej z prawdopodobieństwem 1, każdy punkt otoczony jest przez nieskończenie wiele konturów, zaś poniżej z prawdopodobieństwem 1, wokół każdego punktu obserwujemy jedynie skończoną ilość konturów, a więc model ma charakter zbioru odizolowanych wysepek (konturów zewnętrznych) otoczonych wspólnym nieograniczonym *oceanem* wolnym od konturów.

Konstrukcja wielokątnego pola Markowa. Dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ przez $[[A]]$ oznaczymy zbiór prostych przecinających A. W szczególności $[[\mathbb{R}^2]]$ oznacza zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie. Na $[[\mathbb{R}^2]]$ wprowadzimy miarę μ niezmienniczą na działanie grupy izometrii płaszczyzny (tzw. miarę Haara-Lebesgue'a, która jest jedyna z dokładnością do stałej). W tym celu każdą prostą $l \in [[\mathbb{R}^2]]$ utożsamiamy z parą (ϕ, r), $\phi \in [0, 2\pi)$, $r \geq 0$, gdzie $(r \cos \phi, r \sin \phi)$ są współrzędnymi punktu najbliższego początkowi układu współrzędnych, i zadajemy na zbiorze parametrów $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+$ zwykłą miarę Lebesgue'a, którą następnie przenosimy przez powyższe utożsamienie na $[[\mathbb{R}^2]]$, dla prostoty, nie rozważając tutaj drobnych technikaliów związanych z niejednoznacznością doboru parametrów (ϕ, r) dla prostych przechodzących przez 0, które można pominąć, ponieważ $\mu([[0]]) = 0$.

Dalej, dla otwartego i ograniczonego zbioru wypukłego $D \subseteq \mathbb{R}^2$ rozważymy rodzinę Γ_D *dopuszczalnych konfiguracji wielokątnych* na D, określoną jako zbiór wszystkich grafów skończonych γ na $\bar{D} = D \cup \partial D$ o krawędziach prostoliniowych i takich, że:
- krawędzie γ nie przecinają się,
- wszystkie wierzchołki γ leżące wewnątrz D (wierzchołki wewnętrzne) są rzędu 2,
- wszystkie wierzchołki γ leżące na brzegu ∂D (wierzchołki brzegowe) są rzędu 1,
- żadne dwie krawędzie nie są współliniowe.

Innymi słowy, dopuszczalnymi konfiguracjami wielokątnymi są skończone rodziny rozłącznych wielokątów w D, być może zagnieżdżonych i być może obciętych przez brzeg.

Dla każdego parametru $\beta \geq 0$, zwanego w dalszym ciągu *temperaturą odwrotną*, określamy *wielokątne pole Markowa* $\mathcal{A}_D^{[\beta]}$ żądając, by

$$d\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_D^{[\beta]} \in d\gamma\right) \propto \exp(-\beta\ell(\gamma)) \prod_{e \in E(\gamma)} \mu(dl[e]), \ \gamma \in \Gamma_D, \tag{1}$$

gdzie $\ell(\gamma)$ oznacza łączną długość krawędzi grafu γ, $E(\gamma)$ jest zbiorem krawędzi γ, zaś $l[e]$ to prosta zawierająca krawędź e. Innymi słowy, probabilistyczny *koszt* stworzenia grafu γ jest proporcjonalny do iloczynu kosztów $\mu(dl[e])$ stworzenia poszczególnych krawędzi, wymnożonym przez, tak zwaną *wagę boltzmannowską* $\exp(-\beta\ell(\gamma))$. Stała normalizująca w proporcji (1) nazywana jest *sumą statystyczną* i oznaczana przez $Z_D[\beta]$. Wielkość $-\beta \log Z_D[\beta]$ nazywamy energią swobodną. Można pokazać, że przy oznaczeniu $P_D[\beta] := \log Z_D[\beta]$ mamy

$$\frac{\partial P_D}{\partial \beta}[\beta] = -\mathbb{E}\ell(\mathcal{A}_D^{[\beta]}) \tag{2}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial \beta^2}[\beta] = \mathrm{Var}\left(\ell(\mathcal{A}_D^{[\beta]})\right), \tag{3}$$

zaś wyższe pochodne $P_D[\beta]$ również posiadają naturalną interpretację probabilistyczną. Wynika stąd duże znaczenie sumy statystycznej. Użyta powyżej terminologia wywodząca się z mechaniki statystycznej i termodynamiki wymaga komentarza. Wyobraźmy sobie w tym celu układ fizyczny o pewnej (dla uproszczenia skończonej) przestrzeni fazowej $\mathcal{X}$ oraz funkcji energetycznej $\mathcal{H} : \mathcal{X} \quad \mathbb{R}$. Zgodnie z prawami mechaniki statystycznej (w tzw. formalizmie zespołu kanonicznego) ustalając temperaturę układu T i kładąc $\beta = \frac{1}{kT}$, gdzie k jest stałą Bolztmanna, powinniśmy spodziewać się, że prawdopodobieństwo wystąpienia konfiguracji $x \in \mathcal{X}$ jest proporcjonalne do $\exp(-\beta\mathcal{H}(x))$, a więc wynosi

$$\frac{\exp(-\beta\mathcal{H}(x))}{\sum_{y\in\mathcal{X}} \exp(-\beta\mathcal{H}(y))},$$

gdzie w mianowniku odnajdujemy sumę statystyczną. Należy zwrócić uwagę na fakt, że prawo zachowania energii obowiązuje tu w sensie statystycznym, tzn. zachowana jest nie tyle energia pojedynczej konfiguracji, co jej łączna wartość oczekiwana po wszystkich konfiguracjach. Nie wchodząc tutaj w fizyczne wyprowadzenie tego wzoru, spójrzmy na jego znaczenie.

Już na pierwszy rzut oka widać tutaj współzawodnictwo dwóch mechanizmów. Jednym z nich jest wykładnicza dyskryminacja stanów o wysokich energiach, drugim uśrednianie po być może bardzo dużej liczbie stanów. Wielkością fizyczną opisującą to współzawodnictwo jest dla układów termodynamicznych charakteryzowanych zespołem kanonicznym tzw. energia swobodna (Helmholtza) $F = U - TS$ i wielkość ta jest minimalizowana przez układ w stanie równowagi. By przyjrzeć się tej kwestii bliżej, ustalmy najpierw bardzo wysoką temperaturę, co odpowiada β bliskiemu zeru. W takiej sytuacji nietrudno zauważyć, że prawdopodobieństwa występowania każdej z możliwych konfiguracji są mniej więcej takie same, co odpowiada całkowitemu chaosowi i brakowi struktury w układzie, którym rządzą fluktuacje termiczne – w języku mechaniki statystycznej mówi się o całkowitej dominacji czynnika entropijnego dążącego do uczynienia układu możliwie jak najbardziej chaotycznym. Z przeciwnym przypadkiem mamy do czynienia dla bardzo niskich temperatur, odpowiadających bardzo dużym wartościom β – w tej sytuacji układ z prawdopodobieństwem bliskim 1 pozostaje w konfiguracjach minimalizujących energię – jest to więc całkowita dominacja czynnika energetycznego nad entropijnym. Najciekawsze do badania są oczywiście temperatury pozostające pomiędzy powyższymi skrajnymi i łatwymi do opisu przypadkami. Mamy wówczas do czynienia z *konkurencją* pomiędzy czynnikiem energetycznym i entropijnym. Bardzo często jest tak, że istnieje pewna temperatura krytyczna poniżej której dominuje czynnik energetyczny, powyżej zaś czynnik entropijny. Sam punkt krytyczny, w którym oba czynniki są, w pewnym sensie, zrównoważone, jest zwykle bardzo ciekawym i trudnym obiektem do analizy i dzieli zakres dopuszczalnych temperatur układu na obszar nisko i wysokotemperaturowy. Wprowadzone w (1) wielokątne pola Markowa mieszczą się w tym kontekście jeśli przyjmiemy $\mathcal{X} := \Gamma_D$ oraz $\mathcal{H}(\gamma) := \ell(\gamma)$, a więc *energia* grafu γ zadana jest łączną długością jego krawędzi. Uważny Czytelnik spostrzeże oczywiście, że powyższe przypisanie nie ma ścisłego charakteru ze względu na nieskończony charakter Γ_D oraz ze względu na dodatkową obecność iloczynu

$\prod_e \mu(dl[e])$ we wzorze (1), odpowiadającego w terminach fizyki statystycznej tzw. aktywnościom chemicznym poszczególnych krawędzi. Rozważania te wykraczają jednak poza zakres niniejszego artykułu.

Skonstruowane w taki sposób pola wielokątne posiadają wiele interesujących własności. Jedną z podstawowych jest tzw. dwuwymiarowa własność Markowa: dla dowolnej zamkniętej prostej krzywej gładkiej θ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, rozkład warunkowy procesu $\mathcal{A}_D^{[\beta]}$ we wnętrzu krzywej, przy danej konfiguracji na zewnątrz θ, zależy od tej konfiguracji zewnętrznej jedynie przez jej *ślad* na θ, a więc punkty i kierunki przecięć konfiguracji zewnętrznej z krzywą θ. Innym interesującym aspektem $\mathcal{A}_D^{[\beta]}$ jest bardzo szczególna rola punktu $\beta = 2$, w którym znane są dokładne wzory na energię swobodną oraz wiele innych charakterystyk numerycznych dla pola $\mathcal{A}^{[\beta]}$ (w języku fizyki statystycznej dla $\beta = 2$ układ jest całkowicie rozwiązywalny). Ponieważ jednak punkt $\beta = 2$ znajduje się w obszarze wysokich temperatur, nie będziemy się nim bardziej szczegółowo zajmować w tym artykule.

Wreszcie, bardzo ważną cechą konstruowanych w taki sposób pól wielokątnych $\mathcal{A}_D^{[\beta]}$, gdzie D przebiega wypukłe podzbiory $\mathbb{R}^2$, jest możliwość rozszerzenia na całe $\mathbb{R}^2$, poprzez przejście do granicy $D \uparrow \mathbb{R}^2$, z zachowaniem rozkładów warunkowych na zbiorach ograniczonych, co ma również istotny związek z dyskutowaną wyżej własnością Markowa. Jest to, tak zwana, *granica termodynamiczna*, oznaczana w dalszym ciągu przez $\mathcal{A}^{[\beta]} := \mathcal{A}_{\mathbb{R}^2}^{[\beta]}$. Jej istnienie nie jest faktem trywialnym, dowód przedstawiony został w pracy [10].

Faza niskotemperaturowa i jej własności. Jak wspomniano powyżej, dla wielkości β większych od wartości krytycznej zachowanie pola wielokątnego $\mathcal{A}^{[\beta]}$ dominowane jest przez czynnik energetyczny. Jest to ściśle związane z istotnymi własnościami układu charakteryzowanymi przez poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1 (Schreiber [10]). *Istnieje $\beta_0 > 0$ takie, że dla $\beta > \beta_0$ granica termodynamiczna $\mathcal{A}^{[\beta]}$ posiada następujące własności:*
- *Z prawdopodobieństwem 1 każdy punkt $x \in \mathbb{R}^2$ otoczony jest przez najwyżej skończoną liczbę konturów (wliczamy tu zdegenerowany przypadek gdy punkt leży na konturze - wówczas także uważamy, iż jest on przez ten kontur otoczony).*
- *Pole $\mathcal{A}^{[\beta]}$ nie zawiera konturów nieskończonych,*
- *Istnieje stała $C > 0$ taka,że dla każdych dwóch punktów $x, y \in \mathbb{R}^d$ i każdych zbiorów konfiguracji $G_1 \subseteq \Gamma_{\mathbb{B}_2(x,1)}$ oraz $G_2 \subseteq \Gamma_{\mathbb{B}_2(y,1)}$ zachodzi*

$$\Big|\mathbb{P}(\mathcal{A}^{[\beta]} \cap \mathbb{B}_2(x,1) \in G_1,\ \mathcal{A}^{[\beta]} \cap \mathbb{B}_2(y,1) \in G_2) - \mathbb{P}(\mathcal{A}^{[\beta]} \cap \mathbb{B}_2(x,1) \in G_1)\mathbb{P}(\mathcal{A}^{[\beta]} \cap \mathbb{B}_2(y,1) \in G_2)\Big| \le \exp(-C\mathrm{dist}(x,y)),$$

gdzie $\mathbb{B}_2(x,1)$ *oznacza dysk o promieniu* 1 *wokół* x (*jest to własność tzw. wykładniczego* α*-mieszania, a więc wykładniczego zaniku zależności*).

Warto zauważyć, że pierwsza teza powyższego twierdzenia oznacza w szczególności, iż kontury pola $\mathcal{A}^{[\beta]}$ dzielą płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na przeliczalną rodzinę ograniczonych wysepek otoczonych konturami i dokładnie jeden obszar nieograniczony (tzw. *ocean*) otaczający te wysepki. Ponadto, własność trzecia oznacza, że wpływ zachowania procesu w okolicy punktu x na jego własności w pobliżu punktu y, $x, y \in \mathbb{R}^2$, maleje wykładniczo wraz z odległością.

Dowód twierdzenia 1 opiera się na tak zwanej *reprezentacji polimerowej* pola $\mathcal{A}^{[\beta]}$ skonstruowanej w pracy [10]. Idea jest tutaj w zarysie następująca:
- Wybieramy w $\mathbb{R}^2$ rodzinę *punktów narodzin* (zgodnie z tzw. jednorodnym procesem punktowym Poissona, o intensywności 8π), z których jednocześnie wyruszają pewne błądzenia losowe po konturach wielokątnych (nie specyfikujemy tutaj ich dynamiki ze względu na dosyć techniczny charakter),
- Każdy kontur jest *zabijany* (usuwany) jeśli
  - przekroczy dopuszczalną długość (daną dla każdego konturu niezależną zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem β),
  - lub dokona samoprzecięcia przed powrotem do punktu startowego,
- Dodatkowo, w razie przecięcia dwóch różnych konturów, zabijany jest cały układ i procedura zaczyna się *od początku.*

Z pewnych przyczyn rozszerzamy tę konstrukcję dokładając dodatkowy wymiar interpretowany jako czas, w którym kontury *rodzą się* i *giną*. Dalej, pokazuje się, że ze względu na obecność procedury *zabijania* konturów, pole konturów $\mathcal{A}^{[\beta]}$ zawarte jest zawsze w odpowiednim polu stworzonym z (być może przecinających się lub samoprzecinających się) konturów wygenerowanych przez błądzenia losowe bez procedury zabijania. Zaletą takiej reprezentacji jest fakt, iż zachowanie konturów tworzonych przez błądzenia losowe jest dobrze znane i zbadane – pozwala to skorzystać z ich odpowiednich własności w celu zakończenia dowodu twierdzenia.

Twierdzenie o separacji fazowej. Dyskutowany w tym paragrafie wynik o tzw. *separacji fazowej* dla pól wielokątnych jest głównym rezultatem pracy [11]. Aby go przedstawić, rozważmy pole wielokątne $\mathcal{A}^{[\beta]}$ i załóżmy, że jedyna nieograniczona składowa spójna zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}^{[\beta]}$ (zob. dyskusję po sformułowaniu Twierdzenia 1) jest pomalowana na *biało*, zaś pozostałe ograniczone składowe pomalowane są na *czarno* lub *biało* w taki sposób, by kontury stanowiły granice pomiędzy różnymi kolorami. Przyjmijmy teraz, że dla pewnej kuli $\mathbb{B}_2(0,R)$ o dużym promieniu R znamy wielkość μ_R oznaczającą łączne pole obszarów o kolorze czarnym w $\mathbb{B}_2(0,R)$. Założenie postaci $\mu_R = s$ nazywane jest często *ograniczeniem mikrokanonicznym* i ma bardzo przejrzystą interpretację fizyczną: jeśli pola obszarów białych i czarnych zintepretujemy, zgodnie z dyskusją we wprowadzeniu do niniejszego artykułu, jako ilości odpowiednich ośrodków w układzie (np. wody i oleju), to stwierdzenie, iż $\mu_R = s$ oznacza po prostu, że ilość *czarnego* ośrodka w układzie wynosi s. Problem, który tu rozważymy, odpowiada naturalnemu pytaniu: jeśli w układzie umieścimy pewną nadmiarową ilość czarnego ośrodka (a więc zadamy ograniczenie mikrokanoniczne $\mu_R = \mathbb{E}\mu_R + aR^2$, gdzie $a > 0$) to czy ośrodek ten zagreguje się tworząc jedną dużą kroplę, czy też rozejdzie się po całym układzie powodując jednorodne podwyższenie gęstości? W terminach fizycznych odpowiada to pytaniu, czy napięcie powierzchniowe jest wystarczająco duże by przezwyciężyć czynnik entropijny? Poniższe twierdzenie pokazuje, iż odpowiedź na te pytania brzmi *tak*.

TWIERDZENIE 2 (Schreiber [11]). *Przy nałożonym ograniczeniu mikrokanonicznym $\mu_R = \mathbb{E}\mu_R + \pi a R^2$, $a \in (0,1)$, z prawdopodobieństwem warunkowym zbiegającym do 1 przy $R \to \infty$, istnieje dokładnie jeden kontur θ o długości przekraczającej $C \log R$ (gdzie $C = C[\beta] > 0$ jest pewną stałą zależną tylko od β). Dodatkowo, θ pozostaje w odległości Hausdorffa nie przekraczającej $C[\beta]R^{3/4} \log R$ od brzegu pewnego dysku o promieniu $\sqrt{a}R$, zawartego w $\mathbb{B}_2(0,R)$.*

Oczywiście, pojawiający się w twierdzeniu dysk, to makroskopowa *kropla* czarnego ośrodka, na zewnątrz zaś dominuje ośrodek biały. Innymi słowy, istnieje wyraźna granica pomiędzy oboma ośrodkami, stąd nazwa *twierdzenie o separacji fazowej* oraz *twierdzenie o tworzeniu się kropli*. Choć twierdzenia takie były już dowodzone dla układów dyskretnych (model Isinga, perkolacja Bernoullego, modele z potencjałami Kaca), to powyższy wynik jest pierwszym tego typu rezultatem dla modelu ciągłego.

Dowód Twierdzenia 2 oparty jest na opisanej powyżej konstrukcji polimerowej w terminach wielokątnych błądzeń losowych. Wymaga on jednak wielu dodatkowych technik, w tym między innymi tzw. rachunku szkieletowego (częściowego całkowania po przestrzeni konfiguracyjnej w celu pozbycia się czynnika entropijnego i przejścia do mezoskopowego rachunku napięć powierzchniowych) oraz metody przykładania niewielkich pól zewnętrznych w celu analizy lokalnej stabilności faz wewnątrz dużych konturów.

Dosyć niespodziewanie dla autora tej pracy, powyższe wyniki o czysto teoretycznej motywacji, a zwłaszcza odpowiednie techniki dowodowe, okazały się posiadać bardzo ciekawe zastosowania praktyczne w segmentacji obrazów, które są obecnie rozwijane przez autora we współpracy z M.N.M. van Lieshout (CWI, Amsterdam) oraz R. Kluszczyńskim (UMK, Toruń), zob. [6, 7].

Literatura

[1] T. Arak and D. Surgailis, *Markov Fields with Polygonal Realisations*, Probab. Th. Rel. Fields, **80** (1989), 543–579.
[2] T. Arak and D. Surgailis, *Consistent polygonal fields*, Probab. Th. Rel. Fields, **89** (1991), 319–346.
[3] P. Arak, P. Clifford and D. Surgailis, *Point-based polygonal models for random graphs*, Adv. Appl. Probab., **25** (1993), 348–372.
[4] R. Dobrushin, R. Kotecký and S. Shlosman, *Wulff construction – a global shape from local interaction*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, **104** (1992), American Mathematical Society, Providence.
[5] H.-O. Georgii, O. Häggström and C. Maes, *The random geometry of equilibrium phases*, in: C. Domb and J. L. Lebowitz (eds.), *Phase transitions and critical phenomena*, **18** (2000), 1–142, Academic Press, London.
[6] R. Kluszczyński, M. N. M. van Lieshout and T. Schreiber, *An algorithm for binary image segmentation using polygonal Markov fields*, w F. Roli, S. Vitulano (Ed.), Image Analysis and Processing, Proceedings of the 13th International Conference on Image Analysis and Processing, *Lecture Notes in Computer Science*, **3615** (2005), 383–390.
[7] R. Kluszczyński, M. N. M. van Lieshout and T. Schreiber, *Image segmentation by polygonal Markov fields*, przyjęta do druku w Annals of the Institute of Mathematical Statistics (2007),
[8] D. Ioffe and R. Schonmann, *Dobrushin-Kotecký-Shlosman theory up to the critical temperature*, Comm. Math. Phys., **199** (1998), 117–167.
[9] L. Onsager, *Crystal statistics. I. A two-dimensional model with order-disorder phase transition*, Phys. Rev., **2** (1944), 117–149.
[10] T. Schreiber, *Random dynamics and thermodynamic limits for polygonal Markov fields in the plane*, Adv. Appl. Probab., **37** (2005), 884–907.
[11] T. Schreiber, *Dobrushin-Kotecký-Shlosman theorem for polygonal Markov fields in the plane*, Journal of Statistical Physics, **123** (2006), 631–684.

Summary

The paper discusses a class of continuum random contour models in the plane, going under the name of polygonal Markov fields as originally introduced by Arak & Surgailis and sharing a number of crucial features with the two-dimensional Ising model, which makes them interesting from the viewpoint of mathematical statistical physics. For such systems, modeling the co-existence of two opposing phases separated by polygonal contours, we present our results on low-temperature geometry of phase-separating interfaces. In this context, we show that in the phase transition regime the surplus of dominated phase creates a disk-shaped droplet surrounded by ocean of dominating phase (Wulff body) and minimising the model-specific surface energy functional. The proof is based on a particular graphical construction which also found its applications in digital image segmentation as indicated at the end of this article.

Tomasz Schreiber
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń
e-mail: tomeks@math.uni.torun.pl