ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVI (2000)

Jacek Banasiak (Durban)

Stabilność liniowych układów dynamicznych: współczesne wersje twierdzenia Lapunowa albo historia czterech liczb

1. Wstęp. Artykuł przedstawia w skrócie historię twierdzeń o stabilności rozwiązań liniowych równań ewolucyjnych, poczynając od twierdzenia Lapunowa, dotyczącego układów równań liniowych o stałych współczynnikach, a kończąc na wynikach o stabilności półgrup operatorów rozwiązujących równania różniczkowe w przestrzeniach Banacha.

W całym artykule przez stabilność równania, bądź układu równań, będziemy rozumieć to, że wszystkie rozwiązania tego równania (układu) dążą, w odpowiedniej topologii, do rozwiązania zerowego, gdy zmienna niezależna dąży do $+\infty$.

Artykuł ten jest oparty głównie na monografiach [1] i [3], gdzie zainteresowany czytelnik znajdzie dowody przedstawionych tu twierdzeń, rozwinięcie wielu aspektów omówionych teorii, jak również wyczerpującą bibliografię tematu.

Rozważmy na wstępie liniowy układ równań różniczkowych na $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n, \\ \dot{u}_2 &= a_{21}u_1 + \ldots + a_{2n}u_n, \\ \vdots &= \vdots \\ \dot{u}_n &= a_{n1}u_1 + \ldots + a_{nn}u_n, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie po zmiennej, którą będziemy nazywanć czasem. Układ (1) uzupełniamy zazwyczaj warunkiem początkowym

$$u_1(0) = \mathring{u}_1, \ldots, u_n(0) = \mathring{u}_n, \tag{2}$$

gdzie $(\mathring{u}_1, \ldots, \mathring{u}_n) = \mathring{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{C}^n$ jest danym wektorem. Oznaczając przez A macierz współczynników układu, $A = \{a_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, zaś przez $\boldsymbol{u}$ wektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2 \ldots u_n)$, zagadnienie początkowe (1), (2) możemy zapisać w zwartej formie jako

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{u}} &= A\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{u}(0) &= \mathring{\boldsymbol{u}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Omówimy w skrócie jeden ze sposobów rozwiązania (3), który stanowi punkt wyjścia dla rozwijanej dalej ogólnej teorii, a pochodzący od Peano. Polega on na uogólnieniu koncepcji funkcji wykładniczej $t \to e^{at}\mathring{u}$, która rozwiązuje zagadnienie początkowe dla jednego równania liniowego: $\dot{u} = au$, $u(0) = \mathring{u}$.

Zgodnie z zapisem macierzowym, rozwiązanie (3) powinno mieć postać $t \to e^{At}\mathring{\boldsymbol{u}}$, trzeba tylko zdefiniować w odpowiedni sposób funkcję wykładniczą macierzy.

Na szczęście nie wymaga to zbyt wiele pracy: definicja w postaci szeregu potęgowego

$$e^{tA}\mathring{\boldsymbol{u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n \mathring{\boldsymbol{u}}}{n!} \tag{4}$$

okazuje sie zupełnie wystarczająca, tzn. można udowodnić, że funkcja $t \to e^{tA}\mathring{\boldsymbol{u}}$ jest różniczkowalna i spełnia (3).

Mając na względzie dalszy rozwój teorii odnotujmy, że odwzorowanie $\mathbb{R}_+ \ni t \to e^{tA} \in M_n(\mathbb{C})$ (przestrzeń zespolonych macierzy o wymiarze $n \times n$) spełnia warunki

(i) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, dla dowolnych $t, s \geqslant 0$,

(ii) $e^{0A} = I$.

Używając terminologii algebraicznej możemy powiedzieć, że odwzorowanie $t \to e^{tA}$ jest homomorfizmem z addytywnej półgrupy $(\mathbb{R}_+, +)$ w multyplikatywną półgrupę $(M_n(\mathbb{C}), \cdot)$. Obrazem tego odwzorowania jest przemienna półgrupa w $(M_n(\mathbb{C}), \cdot)$, zależąca w sposób ciągły od parametru $t \in \mathbb{R}_+$.

Powyższa uwaga uzasadnia nazwanie rodziny $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ (i jej późniejszych uogólnień) (*jednoparametrową*) *półgrupą* generowaną przez macierz A. Rodzinę tę będziemy na ogół oznaczać symbolem $(T(t))_{t\geqslant 0}$, żeby podkreślić, zwłaszcza na późniejszym etapie, że nie musi ona być dana wzorem (4).

Bezpośrednie posługiwanie się definicją (4) jest w większości przypadków trudne, jeśli nie niemożliwe. Wiadomo jednak, że każdą macierz można sprowadzić do postaci Jordana za pomocą mnożenia przez macierze odwracalne, tzn. dla każdej macierzy A istnieje odwracalna macierz S taka, że

$$A = S^{-1}BS,$$

gdzie macierz B jest sumą prostą klatek Jordana

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_i \end{pmatrix},$$

danych dla $1 \leqslant k \leqslant i$ wzorem

$$B_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Pojawiająca się w powyższym wzorze liczba λ_k jest wartością własną macierzy A, zaś wymiar macierzy B_k jest równy krotności λ_k. Gdy λ_k jest prostą wartością własną, B_k redukuje się do skalara λ_k (macierzy wymiaru 1×1).

Wykorzystując wzór $A^n = S^{-1}B^nS$, $n \in \mathbb{N}$, i definicję (4) widzimy, że funkcję wykładniczą $t \to e^{tA}$ można wyrazić jako

$$e^{tA} = S^{-1}e^{tB}S,$$

zatem e^{tA} jest podobna do e^{tB}, zaś e^{tB} jest sumą prostą macierzy postaci e^{tB_k}. Dla uproszczenia umówmy się, że wartości własne macierzy A zostały pogrupowane tak, by $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $r \leqslant n$, były proste. Wówczas macierze $B_1, \dots, B_r$ można połączyć w jeden blok będący macierzą diagonalną. Oznaczmy go przez przez $\bar{B}$. Tak więc

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{t\bar{B}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tB_{r+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{tB_i} \end{pmatrix}.$$

Macierze $e^{t\bar{B}}$ i e^{tB_k} można łatwo wyliczyć.

(i) Dla macierzy diagonalnej

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

mamy oczywiście

$$e^{t\bar{B}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_r t} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(ii) Każdą macierz B_k, $k > r$, możemy rozłożyć na sumę $B_k = \lambda_k I + N_k$, gdzie

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

jest macierzą nilpotentną (jeśli B_k jest macierzą o wymiarze $n_k \times n_k$, to $N_k^{n_k} = 0$). W związku z tym suma (4) dla N_k kończy się na wyrazie z potęgą $t^{n_k - 1}$ i w konsekwencji

$$e^{tN_k} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\lambda_k I$ i N_k są przemienne, otrzymujemy

$$e^{tB_k} = e^{\lambda_k t} e^{tN_k}. \tag{6}$$

Ponieważ mnożenie przez macierz S jest operacją ciągłą, z (5) i (6) wynika fundamentalne twierdzenie w teorii stabilności rozwiązań (1), udowodnione w 1892 roku przez Lapunowa [2].

Twierdzenie 1. *Rozwiązania*

$$t \to \boldsymbol{u}(t) = T(t)\mathring{\boldsymbol{u}} = e^{tA}\mathring{\boldsymbol{u}}$$

układu (1) *mają dla każdego* $\mathring{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{C}^n$ *własność*

$$\lim_{t\to+\infty} \|T(t)\mathring{\boldsymbol{u}}\| = 0, \tag{7}$$

gdzie $\|\cdot\|$ *oznacza dowolną normę w przestrzeni* $\mathbb{C}^n$, *wtedy i tylko wtedy gdy części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy* A *są ujemne.*

Twierdzenie to można istotnie zinterpretować jako twierdzenie o stabilności. Wynika to z faktu, że wszystkie rozwiązania układu zmierzają, przy t dążącym do nieskończoności, do jedynego punktu stacjonarnego układu którym, wobec warunku spełnionego przez wartości własne, jest $\boldsymbol{u}(t) \equiv 0$. Innymi słowy, jedyne rozwiązanie stacjonarne układu (3), którym jest funkcja tożsamościowo równa zeru, jest stabilne.

Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynikają stwierdzenia znacznie mocniejsze. Po pierwsze, zauważmy, że zbiór wartości własnych operatora e^{tN_k}, dla każdego $r < k \leqslant i$, składa się wyłącznie z 1, zatem zbiór wartości własnych e^{tB_k} zawiera tylko $e^{\lambda_k t}$. Uwzględniając to, że ze względu na podobieństwo, zbiory wartości własnych e^{tA} i e^{tB} są sobie równe, zaś e^{tB} jest sumą prostą macierzy e^{tB_k}, wnosimy, że zbiór wartości własnych e^{tA} jest równy zbiorowi

$$\{e^{\lambda_k t}; \lambda_k \text{ jest wartością własną macierzy } A\}. \tag{8}$$

W dalszym ciągu artykułu będziemy rozważać przestrzenie nieskończenie wymiarowe i działające w nich operatory liniowe, których struktura jest znacznie bardziej skomplikowana od struktury operatorów reprezentowanych przez macierze skończeniewymiarowe. Na przykład, widmo operatora C działającego w (powiedzmy) unormowanej przestrzeni nieskończeniewymiarowej, tzn. zbiór

$$\sigma(C) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - C \text{ nie jest odwracalny w sposób ciągły}\},$$

na ogół zawiera znacznie więcej elementów niż tylko wartości własne operatora C. Z tego powodu dalsze rozważania będziemy prowadzić używając zbioru $\sigma(C)$, a nie zbioru wartości własnych.

Po tym komentarzu możemy zapisać wynik (8) w postaci *twierdzenia o odwzorowaniu widmowym*

$$\sigma(e^{tA}) = e^{t\sigma(A)}, \tag{9}$$

przy czym równość powyższą należy rozumieć tak, że jeśli $\lambda = e^{\mu t} \in \sigma(e^{tA})$, to dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, liczba $\mu + 2k\pi i/t \in \sigma(A)$.

Wprowadźmy jeszcze promień widmowy półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$ wzorem

$$r(T(t)) = \sup_{\lambda\in\sigma(T(t))} |\lambda|. \tag{10}$$

Z (9) i (10) wynika, że

$$r(T(t)) = e^{t\sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda}. \tag{11}$$

Widzimy, że istotną rolę w rozważaniach odgrywa też liczba

$$s(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda, \tag{12}$$

zwana *granicą spektralną* macierzy A.

Obecnie omówimy bliżej zwiazek między twierdzeniem o odwzorowaniu widmowym (9) i twierdzeniem Lapunowa. Z reprezentacji rozwiązania wynika, że istnieją stałe M i ω takie, że dla wszystkich $t \geqslant 0$ i $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{C}^n$ zachodzi oszacowanie

$$\|T(t)\boldsymbol{u}_0\| \leqslant Me^{t\omega}\|\boldsymbol{u}_0\|. \tag{13}$$

Możemy zatem wprowadzić liczbę $\omega_0(T)$, charakteryzująca asymptotykę $(e^{tA})_{t\geqslant 0} = (T(t))_{t\geqslant 0}$ dla dużych czasów, zwaną *typem* lub *jednostajnym oszacowaniem wzrostu* półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$, za pomocą wzoru

$$\omega_0(T) = \inf\{\omega; \text{dla których zachodzi (13)}\}. \tag{14}$$

Z nierówności

$$r(T(t)) = \limsup_{n\to\infty} \|T(t)^n\|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \|T(nt)\|^{1/n} \leqslant e^{\omega t}, \tag{15}$$

prawdziwej dla dowolnej liczby $\omega > \omega_0(T)$ wynika, że $r(T(t)) \leqslant e^{\omega_0(T)t}$. W trochę bardziej skomplikowany sposób, wykorzystując strukturę półgrupy, dowodzi się nierówności przeciwnej, tak więc dla wszystkich $t \geqslant 0$ zachodzi wzór

$$r(T(t)) = e^{\omega_0(T)t}. \tag{16}$$

Wynika stąd alternatywna charakteryzacja stabilności, mianowicie półgrupa $(T(t))_{t\geqslant 0}$ jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jej promień spektralny jest mniejszy od jedynki dla wszystkich (równoważnie, jednej) wartości $t > 0$. Z (11) wynika również tożsamość

$$\omega_0(T) = s(A). \tag{17}$$

Powyższe rozważania można podsumować następującym uogólnieniem twierdzenia Lapunowa.

Wniosek 1. *Niech $(T(t))_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą rozwiązującą układ* (1). *Wówczas jej typ $\omega_0(T)$ jest równy granicy spektralnej $s(A)$ macierzy A, zaś jej promień widmowy $r(T(t))$ spełnia związek*

$$r(T(t)) = e^{ts(A)} = e^{t\omega_0(T)}, \qquad t \geqslant 0.$$

2. Abstrakcyjne liniowe układy dynamiczne. Zadajmy sobie pytanie, co mają ze sobą wspólnego trzy następujące zagadnienia:

(i) układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned} \dot u_1 &= a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n,\\ \dot u_2 &= a_{21}u_1 + \ldots + a_{2n}u_n,\\ \vdots &= \vdots\\ \dot u_n &= a_{n1}u_1 + \ldots + a_{nn}u_n,\\ u_1(0) = \mathring{u}_1, &\ldots, u_n(0) = \mathring{u}_n, \end{aligned} \tag{18}$$

(ii) równanie różniczkowo-całkowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) &= -\nu(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}, t) + \int_{\Omega} k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y}, t)\, d\boldsymbol{y},\\ u(\boldsymbol{x}, 0) &= \mathring{u}(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie u jest funkcją poszukiwaną, k i ν są dane danymi funkcjami ciągłymi na $\bar{\Omega}$, zaś $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$,

(iii) równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u \quad \text{w zbiorze } \Omega \times [0,T] \subset \mathbb{R}^{n+1}_{+}, \\ u(\boldsymbol{x},0) &= \mathring{u}(\boldsymbol{x}), \\ u(\boldsymbol{x},t) &= 0 \quad \text{na brzegu zbioru } \Omega. \end{aligned} \tag{20}$$

Naturalną odpowiedzią na to pytanie jest, że we wszystkich przypadkach poszukujemy funkcji $[0,T] \ni t \to u(t)$ o wartościach w pewnej przestrzeni liniowej (Banacha) X, która dla danego operatora $A : X \to X$ i elementu $\mathring{u} \in X$ spełnia

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au, \\ u(0) &= \mathring{u}. \end{aligned} \tag{21}$$

Zagadnienie to nazywamy *abstrakcyjnym zagadnieniem Cauchy'ego.* Zachodzi pytanie, które z wyników omówionych w części pierwszej wykładu przenoszą się, czy też mają swoje odpowiedniki i, jeśli tak, to jakie, w teorii zagadnienia (21). Głównym celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wybranych, zdaniem autora, najbardziej interesujących, odpowiedzi na to pytanie.

Zanim przejdziemy do głównego zagadnienia, to znaczy stabilności rozwiązań, warto zwrócić uwagę, że istnienie i jednoznaczność rozwiązań, które w przypadku układów równań liniowych zwyczajnych wynika łatwo z reprezentacji (4), już w przypadku zagadnienia (19) wymaga pewnej refleksji, a w przypadku zagadnień inspirowanych równaniem (20) prowadzi do nietrywialnej teorii.

Na wstępie omówimy pokrótce podstawowe wyniki dotyczące rozwiązalności zagadnienia (21), gdyż zarówno one same, jak i niektóre pojęcia niezbędne do ich sformułowania, znajdą później zastosowanie w analizie stabilności rozwiązań. Zaczniemy od jednolitej teorii dotyczącej rozwiązalności (18) i (19).

3. Układy generowane przez ciągły operator A. Interpretacja rozwiązania zagadnienia (18) jako funkcji wykładniczej macierzy tA, omówiona w części pierwszej, pozwala uniezależnić się od konkretnej postaci operatora A w (21) pod warunkiem, ze potrafimy w sensowny sposób zdefiniować jego eksponentę. Podejście to można w naturalny sposób zastosować do klasy abstrakcyjnych zagadnień Cauchy'ego, obejmujących m.in. zagadnienie (19), w których występuje ciągły operator A. Okazuje się bowiem, że w tym przypadku wzór (4) pracuje dokładnie tak samo, jak w przypadku macierzy, i definiuje jedyne rozwiązanie zagadnienia (21).

Co więcej, otrzymana w ten sposób funkcja wykładnicza jest identyczna z funkcją wykładniczą operatora A zbudowaną w klasycznym rachunku funkcjonalnym przy pomocy całki Dunforda:

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{t\lambda}(\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda,$$

gdzie całkowanie odbywa się po dowolnym konturze zamkniętym otaczającym widmo A. Ta obserwacja ma natychmiastowe zastosowanie w teorii stabilności rozwiązań (21). Otóż jednym z podstawowych wyników rachunku funkcjonalnego Dunforda jest twierdzenie o odwzorowaniu widmowym, które mówi, że dla dowolnej funkcji f analitycznej w otoczeniu widma A zachodzi

$$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A)).$$

Zastosowanie tego wyniku dla półgrupy (funkcji wykładniczej) operatora A daje

$$\sigma(e^{tA}) = e^{t\sigma(A)}, \tag{22}$$

co pokrywa się ze wzorem (9). W szczególności, powtarzając analizę Części 1 pracy, dotyczącej typu półgrupy $\omega_0(T)$ (która pozostaje prawdziwa dla wszystkich tu omawianych sytuacji), otrzymujemy

$$r(T(t)) = r(e^{tA}) = e^{t\omega_0(T)} = e^{ts(A)}, \tag{23}$$

czyli

$$\omega_0(T) = s(A).$$

Rozważania tej części możemy ująć w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. *Niech A bedzie liniowym operatorem ograniczonym w przestrzeni Banacha X. Wówczas zagadnienie* (21) *ma dokładnie jedno rozwiązanie $t \to T(t)\mathring{u} = e^{tA}\mathring{u}$, dane wzorem* (4). *Co więcej, typ półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$ jest równy granicy widmowej operatora A. Innymi słowy, układ jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy części rzeczywiste wszystkich elementów widma A są ujemne.*

Widzimy więc, że wynik Lapunowa przenosi się bez zmian na liniowe układy dynamiczne generowane przez operatory ograniczone w przestrzeniach Banacha. Niestety, takie układy dynamiczne pojawiają się w bardzo nielicznych zastosowaniach – żaden układ generowany operatorem różniczkowym, tak jak np. (20), nie należy do tej klasy.

Przejście do układów generowanych przez operatory nieograniczone wymaga znacznie głębszej teorii, którą naszkicujemy w następnej części artykułu.

4. Teoria Hille'a–Yosidy. Rozważmy obecnie sytuację, gdy operator A, zdefiniowany na dziedzinie $D(A) \subset X$, jest operatorem liniowym nieograniczonym w przestrzeni Banacha X. Załóżmy też, że jego zbiór rezolwenty $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ jest niepusty. Naszym celem jest zdefiniowanie funkcji operatora A, która pokrywałaby się ze zwykłą funkcję wykładniczą (np. zdefiniowaną przez (4)) w przypadku operatorów ograniczonych. Zauważmy, że ani definicja za pomocą szeregu potęgowego (4), ani definicja przy pomocy całki Dunforda nie mogą być tu użyte w sposób bezpośredni. W przypadku szeregu mamy do czynienie z nieskończoną ilością złożeń operatora A i, pomijając nawet kwestię zbieżności, może się zdarzyć, że wspólną dziedziną tych złożeń jest $\{0\}$. Całka Dunforda natomiast, z powodu możliwej nieograniczoności widma A, byłaby całką niewłaściwą i jej zdefiniowanie wymagałoby dodatkowych założeń.

Poszukujemy więc innej definicji funkcji wykładniczej, w której dawałoby się podstawić w miejsce liczby zespolonej operator nieograniczony. Oczywiście, tak postawiony cel nie jest zdefiniowany jednoznacznie – można rozważać różne takie uogólnienia i każde z nich może być przydatne do określonego celu.

W naszym przypadku głównym celem jest rozwiązywanie równań typu (21). W tej dziedzinie powszechnie przyjęta została następująca aksjomatyczna definicja funkcji wykładniczej, którą od tej pory będziemy nazywać *półgrupą silnie ciągła* lub *półgrupą klasy C_0*.

Definicja 1. Mówimy, że jednoparametrowa rodzina operatorów ciągłych $(T(t))_{t\geqslant 0}$, działających w przestrzeni Banacha X, jest półgrupą klasy C_0, jeśli

(i) dla każdych $t, s \geqslant 0$

$$T(t+s) = T(t)T(s),$$

(ii) $T(0) = I$,

(iii) dla każdego $x \in X$ funkcja $[0,\infty) \ni t \to T(t)x \in X$ jest ciągła.

Operator A, zdefiniowany na dziedzinie

$$D(A) = \{x \in X; \text{istnieje } \lim_{h\to 0^+} h^{-1}(T(h)x - x)\}$$

wzorem

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}(T(h)x - x)$$

nazywany jest generatorem półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$.

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeśli mamy daną półgrupę $(T(t))_{t\geqslant 0}$, to dla dowolnego $x \in D(A)$ funkcja $t \to T(t)x$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (21), o ile A jest generatorem $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Na ogół jednak jesteśmy zainteresowani zagadnieniem odwrotnym: dane jest równanie z określonym operatorem i chcemy wiedzieć, czy można je rozwiązać.

Fundamentalne twierdzenie teorii półgrup silnie ciągłych, podające kryteria rozwiązalności (21), jest na ogół nazywane twierdzeniem Hille'a–Yosidy, choć jeszcze kilku innych wybitnych matematyków połowy XX wieku (Feller, Phillips, Lumer, Miyadera…) miało mniejszy lub większy wkład w nadanie temu twierdzeniu i jego dowodowi ostatecznej formy, którą przedstawiamy poniżej.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że A jest operatorem liniowym w przestrzeni Banacha X, zaś $\omega \in \mathbb{R}$ i $M \geqslant 1$ są dwiema stałymi. Poniższe stwierdzenia są równoważne*:

(i) *A generuje półgrupę silnie ciągłą $(T(t))_{t\geqslant 0}$ spełniającą dla wszystkich $t \geqslant 0$ oszacowanie*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \tag{24}$$

(ii) *operator A jest domknięty i gęsto określony, jego zbiór rezolwenty $\rho(A)$ zawiera półoś (ω, ∞) oraz zachodzi tzw. oszacowanie Hille'a–Yosidy: dla każdych $\lambda > \omega$ i $n \in \mathbb{N}$*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \tag{25}$$

gdzie $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ oznacza rezolwentę operatora A.

Następujące obserwacje będą istotne dla dalszych rozważań.

(i) Rezolwentę $R(\lambda, A)$ można otrzymać za pomocą przekształcenia Laplace'a półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$: dla każdego $x \in X$ i $\lambda > \omega$

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{\lambda t} T(t)x\, dt. \tag{26}$$

(ii) Półgrupę $(T(t))_{t\geqslant 0}$ można rzeczywiście uważać za uogólnienie funkcji wykładniczej. Wynika to z dowodów twierdzenia Hille'a–Yosidy. Dowód Hille'a sprowadza się udowodnienia, że dobrze znaną tożsamość

$$e^{ta} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{ta}{n}\right)^{-n}$$

można wykorzystać wykorzystać dla operatorów nieograniczonych. W istocie, Hille dowodzi, że

$$T(t)x = e^{tA}x = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^n$$

definiuje żądany obiekt, czyli półgrupę klasy C_0 generowaną przez A.

Dowód podany przez Yosidę wykorzystuje mniej narzucające się przybliżenie, mianowicie tak zwane obecnie *przybliżenie Yosidy* operatora A

$$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda = \lambda A R(\lambda, A)$$

które jest abstrakcyjną konsekwencją równości

$$a = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda a}{\lambda - a}.$$

Za pomocą tego przybliżenia Yosida definiuje jednostajnie ciągłe półgrupy $t \to e^{tA_\lambda}$ i dowodzi, że w granicy przy $\lambda \to \infty$ otrzymuje się półgrupę klasy C_0 generowaną przez A.

(iii) Z (26) wynika, że jeśli spełniony jest którykolwiek z równoważnych warunków twierdzenia Hille'a–Yosidy, to cała półpłaszczyzna $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ jest zawarta w zbiorze rezolwenty A. Co więcej, dla każdej liczby $\lambda \in \mathbb{C}$, spełniającej $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, zachodzi

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(Re\,\lambda - \omega)^n}, \qquad n = 1, \dots . \tag{27}$$

Odnotujmy też, że szczęśliwie twierdzenie Hille'a–Yosidy nie wprowadza nowych parametrów liczbowych do teorii. Ze sformułowania twierdzenia wynika bowiem, że

$$\omega_0(T) = \inf\{\omega; \text{zachodzi oszacowanie (25)}\}.$$

Jest też rzeczą ważną podkreślenie, że z punktu widzenia rozwiązalności zagadnienia (21), twierdzenie Hille'a–Yosidy dzieli przestrzeń X na dwa zbiory: dziedzinę operatora A, $D(A)$, i jej dopełnienie $X \setminus D(A)$. Trajektorie $t \to T(t)x$ zaczynające się w $D(A)$ ($x \in D(A)$) są różniczkowalne i w związku z tym są klasycznymi rozwiązaniami (21), natomiast trajektorie zaczynające się w $X \setminus D(A)$ są na ogół tylko ciągłe i w ogólnym przypadku nie są rozwiązaniami (21). Jest to istotna różnica w porównaniu z układami generowanymi przez operatory ciągłe, gdzie wszystkie trajektorie są rozwiązaniami (21); będzie ona miała również znaczenie przy badaniu stabilności rozwiązań.

5. Stabilność półgrup generowanych przez operatory nieograniczone – rozważania wstępne. Przypomnijmy, że głównym tematem wykładu jest stabilność rozwiązań zagadnienia (21), a w szczególności zbadanie związku pomiędzy granicą widmową operatora A i typem półgrupy $\omega_0(T)$ który, zgodnie z równaniem (14), określa wykładniczy rząd zbieżności rozwiązań do zera. Idealną sytuacją byłoby gdyby, tak jak w poprzednich przypadkach, obydwie te liczby były równe. Wówczas zachowanie się rozwiązań byłoby w pełni określone przez widmo generatora. W przypadku półgrup generowanych przez operatory ograniczone równość tych dwóch liczb jest konsekwencją znacznie mocniejszego wyniku – twierdzenia o odwzorowaniu spektralnym. Pierwszym więc pytaniem, które powinniśmy zadać, jest pytanie, czy twierdzenie to jest prawdziwe dla generatorów nieograniczonych. Odpowiedź na nie jest w ogólności negatywna, o czym można przekonać się rozważając poniższy przykład.

Przykład 1. W przestrzeni $X = \{f \in C([0,1]); f(1) = 0\}$ rozważmy półgrupę

$$(T(t)f)(x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{for } x+t < 1 \\ 0 & \text{for } x+t > 1 \end{cases}$$

Półgrupa ta daje rozwiązanie równania transportu $\partial_t f = \partial_x f$ na odcinku $[0,1]$ z zerowymi warunkami brzegowymi zadanymi na prostej $x = 1$.

Jest to półgrupa silnie ciągla, generowana przez operator

$$Af = f',$$

zdefiniowany na $D(A) = \{f; f \in C^1([0,1]) \cap X,\ f' \in X\}$.

Rozwiązując równanie różniczkowe $\lambda f - f' = g$ otrzymujemy

$$f(t) = \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} g(s)\, ds$$

dla dowolnej wartości λ. Zatem $\sigma(A) = \emptyset$. Z drugiej strony, skoro dla każdego $t \geqslant 0$ operator $T(t)$ jest ograniczony, jego widmo jest niepuste i widzimy, że równość

$$\sigma(T(t)) = \sigma(e^{tA}) = e^{t\sigma(A)}$$

nie może być prawdziwa.

Modyfikując powyższy przykład możemy uzyskać jeszcze bardziej przekonujący kontrprzykład.

Przykład 2. Rozważmy przestrzeń Banacha

$$X = \Big\{f; \int_0^\infty e^s |f(s)|\, ds < \infty\Big\} \cap L_p(\mathbb{R}_+)$$

i zdefiniujmy na niej półgrupę

$$(T(t)f)(x) = f(x+t)$$

dla $x, t \geqslant 0$. Rozważając funkcje charakterystyczne odcinka $[t, t+\epsilon^p]$ można pokazać, że dla każdego $t \geqslant 0$ zachodzi $\|T(t)\| = 1$, zatem $\omega_0(T) = 0$.

Generatorem $(T(t))_{t\geqslant 0}$ jest operator różniczkowania zdefiniowany na maksymalnej dziedzinie w X. Rozwiązując równanie różniczkowe $\lambda u - u' = f$ otrzymujemy

$$u(t) = e^{\lambda t} \int_t^\infty e^{-\lambda s} f(s)\, ds$$

i całkując można sprawdzić, że jeśli $\operatorname{Re}\lambda > -1$, to $u \in D(A)$. Tak więc, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > -1\} \subset \rho(A)$ i w konsekwencji $s(A) \leqslant -1$. Mamy więc

$$s(A) \leqslant -1 < 0 = \omega_0(T). \tag{28}$$

Widzimy więc, że nie tylko twierdzenie o odwzorowaniu widmowym nie jest prawdziwe dla operatorów nieograniczonych i półgrup przez nie generowanych, ale również nie zachodzi słabsze od niego twierdzenie Lapunowa.

Omówimy kilka możliwych rozwiązań tego problemu. Najpierw zwróćmy jednak uwagę, że być może wymagamy zbyt dużo – twierdzenie Lapunowa mówi o stabilności **rozwiązań** zagadnienia Cauchy'ego zaś, jak zauważyliśmy wcześniej, dla $x \notin D(A)$ funkcje $t \to T(t)x$ nie są rozwiązaniami (21). W związku z tym może bardziej właściwe byłoby mówienie o stabilności rozwiązań $t \to T(t)x$ dla $x \in D(A)$. Prowadzi to do pojawienia się nowej liczbowej charakterystyki półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$, zwanej *oszacowaniem wzrostu* półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$ i zdefiniowanej jako

$$\omega_1(T) = \inf\{\omega; \text{dla każdego } x \in D(A) \text{ istnieje } M_x \text{ takie, że } \|T(t)x\| \leqslant M_x e^{\omega t}\}. \tag{29}$$

Odpowiedź na pytanie, czy twierdzenie Lapunowa w wersji $\omega_1(T) = s(A)$ jest prawdziwe, jest też negatywna. Świadczy o tym dość skomplikowany przykład podany przez Prof. Zabczyka w roku 1975, [4]. Przykład ten jest podwójnie interesujący. Po pierwsze jest to pierwszy przykład na to, że stabilność liniowych układów dynamicznych nie jest w pełni kontrolowana przez położenie widma ich generatora, i to od razu w silniejszej wersji (bo odnoszącej się do rozwiązań). Po drugie, jest to przykład skonstruowany w przestrzeni Hilberta l^2, co pokazuje, że niezachodzenie twierdzenia Lapunowa wynika z przejścia ze skończenie do nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha, a nie ze specyfiki konkretnych przestrzeni.

Na zakończenie tej części zdefiniujemy jeszcze jedną wielkość, która odgrywa kluczową role w badaniu stabilności. Jest to *odcięta jednostajnej ograniczoności rezolwenty* operatora A:

$$s_0(A) = \inf\{\omega \in \mathbb{R}; \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A) \text{ i } \sup_{\operatorname{Re}\lambda > \omega} \|R(\lambda, A)\| < +\infty\}. \tag{30}$$

Wprowadzenie tej liczby można uzasadnić tym, że rezolwenta jest jednostajnie ograniczona na prostych $\operatorname{Re}\lambda = \omega$ dla $\omega > \omega_0(T)$ – wynika to z twierdzenia Hille'a–Yosidy. Nie wiemy jednak, jak rezolwenta zachowuje się w pasie $s(A) < \operatorname{Re}\lambda < \omega_0(T)$, a jest to ważne, jeśli chcemy wykorzystywać bardzo wygodną jej reprezentację jako przekształcenie Laplace'a półgrupy generowanej przez A.

Istnieją przykłady, że w ogólności żadne dwie z wprowadzonych liczb: $s(A)$, $s_0(A)$, $\omega_1(T)$, $\omega_0(T)$, nie muszą być równe. Dalsze badania mogą być prowadzone w dwóch kierunkach. Po pierwsze, możemy starać się znaleźć klasy półgrup, w których zachodzenie odpowiednich równości będzie zagwarantowane. Po drugie, można szukać dodatkowych warunków, których spełnienie będzie prowadziło do stabilności.

W dalszej części artykułu omówię przede wszystkim wyniki uzyskane w pierwszej grupie zagadnień.

6. Historia czterech liczb. W tej części wykładu omówimy związki pomiędzy wprowadzonymi czterema liczbami $s(A), s_0(A), \omega_1(T), \omega_0(T)$. Po pierwsze zauważmy, że w sposób oczywisty

$$\omega_1(T) \leqslant \omega(T) \tag{31}$$

oraz, z twierdzenia Hille'a–Yosidy,

$$s(A) \leqslant s_0(A) \leqslant \omega_0(T). \tag{32}$$

Następnym krokiem jest powiązanie $\omega_1(T)$ z widmowymi właściwościami generatora A. Kluczowym wynikiem jest tutaj obserwacja, że jeśli tylko dla każdego $x \in X$ istnieje całka niewłaściwa

$$B_\lambda x = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} T(t)x\,dt, \tag{33}$$

to automatycznie daje ona rezolwentę generatora A (jest to wynik mocniejszy od (26), który mówił jedynie, że równość zachodzi dla $\lambda > \omega_0(T)$). Okazuje się, że zbieżność w (33) zachodzi dla wszystkich λ spełniających $\omega = \operatorname{Re}\lambda > \omega_1(T)$ i tylko dla nich, czyli

$$\omega_1(T) = \inf\{\omega; \text{jeśli } \operatorname{Re}\lambda > \omega, \text{ to zbieżna jest całka (33)}\}. \tag{34}$$

W szczególności, mamy zawsze

$$s(A) \leqslant \omega_1(T), \tag{35}$$

przy czym przykład Zabczyka pokazuje, że może zachodzić tu nierówność ostra.

Związek pomiędzy $\omega_1(T)$ i $s_0(A)$ dla dowolnych półgrup został znaleziony całkiem niedawno przez Wrobla, Weissa i van Neervena. Jest on konsekwencją ogólniejszego wyniku odnoszącego się do *ułamkowych oszacowań wzrostu* ω_α. Nie wchodząc w szczegóły techniczne, jest to wykładniczy rząd oszacowań trajektorii wychodzących z dziedzin potęg ułamkowych operatora $-A$, które oznaczymy przez X_α, czyli

$$\omega_\alpha(T) = \inf\{\omega; \text{dla każdego } x \in X_\alpha \text{ istnieje } M \text{ takie, że } \|T(t)x\| \leqslant Me^{\omega t}\}. \tag{36}$$

Jest to w pewnym sensie wielkość interpolująca $\omega_0(T)$ i $\omega_1(T)$. Weiss i Wrobel udowodnili, że funkcja $\alpha \to \omega_\alpha(T)$ jest nierosnąca, wypukła w dół, i w konsekwencjii ciągła na $[0, \infty[$.

Żeby omówić bardziej szczegółowo zapowiedziany wynik, wprowadźmy jeszcze pojęcie typu fourierowskiego przestrzeni Banacha X. Mówimy mianowicie, że X ma typ fourierowski $p \in [1, 2]$, jeśli przekształcenie Fouriera daje się rozszerzyć do odwzorowania ciągłego z $L_p(\mathbb{R}, X)$ do $L_q(\mathbb{R}, X)$, $1/p + 1/q = 1$, czyli, innymi słowy, w $L_p(\mathbb{R}, X)$ działa twierdzenie Hausdorffa–Younga. Każda przestrzeń Banacha ma typ 1, przestrzenie Hilberta (i tylko one) mają typ 2, jednostajnie wypukłe przestrzenie Banacha mają typ większy od 1, przestrzenie L_p mają typ $\min\{p, q\}$.

Zachodzi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 4. *Jeśli przestrzeń Banacha X ma typ $p \in [1,2]$, zaś A jest generatorem półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$ na X, to*

$$\omega_{1/p-1/q}(T) \leqslant s_0(A), \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{37}$$

Ponieważ każda przestrzeń Banacha ma typ przynajmniej 1, otrzymujemy natychmiast, że

$$\omega_1(T) \leqslant s_0(A), \tag{38}$$

co, w szczególności, pozwala uporządkować zbiór naszych czterech liczb. Mamy więc w dowolnej przestrzeni Banacha

$$s(A) \leqslant \omega_1(T) \leqslant s_0(A) \leqslant \omega_0(T). \tag{39}$$

Na drugim końcu skali mamy przestrzenie Hilberta z typem fourierowskim 2. Wówczas powyższe twierdzenie daje

$$\omega_0(T) \leqslant s_0(A),$$

ale ponieważ nierówność przeciwna jest oczywista, otrzymujemy

$$s(A) \leqslant \omega_1(T) \leqslant s_0(A) = \omega_0(T). \tag{40}$$

Rozważania powyższe można podsumować twierdzeniem, przypominającym twierdzenie Lapunowa, w następujący sposób:

TWIERDZENIE 5. *Niech $(T(t))_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą na dowolnej przestrzeni Banacha X. Jeśli rezolwenta generatora A istnieje i jest jednostajnie ograniczona w prawej półpłaszczyźnie, to rozwiazania klasyczne zagadnienia (21) zmierzają wykładniczo do zera. Innymi słowy, jeśli $s_0(A) \leqslant 0$, to istnieje $\epsilon > 0$ taka, że*

$$\omega_1(T) = -\epsilon. \tag{41}$$

W przestrzeniach Hilberta twierdzenie to jest prawdziwe dla dowolnych trajektorii $t \to T(t)x$, $x \in X$, tzn. z nierówności $s_0(A) \leqslant 0$ wynika $\omega_0(T) = -\epsilon$ dla pewnej $\epsilon > 0$.

Szkic dowodu. Twierdzenie to można udowodnić, zauważając, że jeśli rezolwenta jest ograniczona dla $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, to można ją przedłużyć w sposób jednostajnie ograniczony dla $\operatorname{Re}\lambda \geqslant -\epsilon$, dla pewnego $\epsilon > 0$. Oznacza to, że $s_0(A) \leqslant -\epsilon < 0$. Z (38) otrzymujemy, że $\omega_1(T) \leqslant -\epsilon$, a to oznacza, że dla każdego $x \in D(A)$ istnieje M, takie że $\|T(t)x\| \leqslant Me^{-\omega t}$ dla $\omega \in (0,\epsilon)$. $\square$

7. Półgrupy ewentualnie jednostajnie ciągłe. W tej części artykułu omówię klasę półgrup silnie ciągłych, dla których zachodzi twierdzenie o odwzorowaniu widmowym.

Zacznijmy od uwagi, że stosunkowo słabe wymaganie silnej ciągłości funkcji operatorowej $t \to T(t)$, tzn. ciagłości funkcji $t \to T(t)x$ dla każdego $x \in X$, jest podyktowane tym, że półgrupy, które są ciągłe w bardziej naturalnej, tzn. jednostajnej, topolgii, automatycznie mają ograniczone generatory, a więc są stosunkowo mało interesujące z punktu widzenia zastosowań. Głównym problemem jest tu ciągłość dla $t \to 0^+$, jeśli zaś zażądamy ciągłości funkcji $t \to T(t)$ w topologii jednostajnej tylko począwszy od pewnego $t_0 > 0$, to zbiór tak ciągłych półgrup jest istotnie szerszy od zbioru półgrup generowanych przez operatory ograniczone; należą do niego np. półgrupy holomorficzne, które rozwiązują równanie dyfuzji i inne równania paraboliczne.

Reasumując, mówimy, że silnie ciągła półgrupa $(T(t))_{t\geqslant 0}$ jest półgrupą *ewentualnie jednostajnie ciągłą*, jeśli istnieje $t_0 > 0$ taka, że funkcja $t \to T(t)$ jest ciągła w jednostajnej topologii operatorowej dla wszystkich $t > t_0$.

Okazuje się, że dla półgrup ewentualnie jednostajnie ciągłych zachodzi twierdzenie o odwzorowaniu widmowym

TWIERDZENIE 6. *Jeśli $(T(t))_{t\geqslant 0}$ jest półgrupą ewentualnie jednostajną ciągłą na przestrzeni Banacha X, generowaną przez operator A, to dla każdego $t \geqslant 0$*

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}. \tag{42}$$

W szczególności dla półgrup ewentualnie jednostajnie ciągłych prawdziwa jest równość

$$\omega_0(T) = s(A).$$

Żeby przybliżyć nieco ten wynik, omówię wpierw związki pomiędzy widmami półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$ i jej generatora A w ogólnym przypadku.

Pierwszym wynikiem jest twierdzenie o zawieraniu widmowym: dla dowolnej półgrupy silnie ciągłej $(T(t))_{t\geqslant 0}$ generowanej przez A i dla każdego $t \geqslant 0$ zachodzi związek

$$\sigma(T(t)) \supset e^{t\sigma(A)}.$$

Co więcej, dla dwóch części widma: widma punktowego (wartości własnych) σ_p i widma rezydualnego σ_r (tzn. tych λ dla których obraz $\lambda I - A$ nie jest gęsty w X), zachodzi pełne twierdzenie o odwzorowaniu widmowym:

$$\sigma_p(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_p(A)}, \qquad \sigma_r(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_r(A)}.$$

W przeciwieństwie do klasycznej teorii widmowej okazuje się, że podział widma na widmo punktowe, ciągłe i rezydualne nie prowadzi do interesujących wyników. Bardziej opłaca się wprowadzić pojęcie *przybliżonego widma punktowego* $\sigma_a(A)$ zdefiniowanego jako zbiór tych $\lambda \in \mathbb{C}$, dla których istnieje *przybliżony wektor własny*, czyli ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unormowanych w X elementów $D(A)$, które spełniają związek

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0. \tag{43}$$

Oczywiście, widmo punktowe zawiera się w przybliżonym widmie punktowym. Dowodzi się też, że

$$\sigma(A) = \sigma_r(A) \cup \sigma_a(A),$$

przy czym suma powyższa nie musi być rozłączna.

Ważną właściwością przybliżonego widma punktowego jest to, że dla dowolnego operatora domkniętego A na przestrzeni Banacha X zawiera się ono w brzegu topologicznym widma:

$$\sigma_a(A) \subset \partial\sigma(A).$$

Co więcej, każdy przybliżony wektor własny generatora A odpowiadający przybliżonej wartości własnej λ jest również przybliżonym wektorem własnym każdego operatora $T(t)$, odpowiadającym przybliżonej wartości własnej $e^{\lambda t}$. Na ogół jednak operatory półgrupy mają znacznie więcej przybliżonych wektorów własnych, niż generator tej półgrupy.

Pojęcie przybliżonego widma punktowego pozwala w elegancki sposób udowodnić Twierdzenie 6. Idea dowodu polega na przejściu do przestrzeni ilorazowej $l^\infty(X)/c_0(X)$. W tej przestrzeni przybliżone wektory własne z przestrzeni X stają się wektorami własnymi (z definicji (43) wynika, że przybliżony wektor własny jest wektorem własnym modulo ciągi zbieżne do zera). Ponieważ twierdzenie o odwzorowaniu widmowym dla wartości własnych jest prawdziwe, w przestrzeni $l^\infty(X)/c_0(X)$ mamy równość widm, zaś dzięki jednostajnej ciągłości półgrupy można pokazać, że opisane powyżej operacje są możliwe i zachowują strukturę problemu.

8. Twierdzenie Datki–Pazy'ego. W tej części omówimy ogólną wersję twierdzenia Datki–Pazy'ego. W swej oryginalnej postaci twierdzenie to mówi, że typ $\omega_0(T)$ półgrupy $(T(t))_{t\geqslant 0}$ jest mniejszy od zera wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $p \in [1,\infty)$, przy którym dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p \, dt < \infty.$$

Aby zaprezentować ogólną wersję tego twierdzenia, trzeba wprowadzić pojęcie funkcyjnej przestrzeni Banacha. W skrócie, jest to przestrzeń Banacha funkcji o wartościach zespolonych, zdefiniowanych na σ-skończonej przestrzeni mierzalnej, której norma spełnia dodatkowo warunek:

$$\text{jeśli } |f| \leqslant |g| \ \mu\text{-prawie wszędzie, to } \|f\| \leqslant \|g\|.$$

Przestrzenie ciągowe typu c i l^p, przestrzenie $C_0(\Omega)$ i $L_p(\Omega)$ są przykładami przestrzeni funkcyjnych Banacha.

Niech E będzie pewną przestrzenią funkcyjną Banacha nad σ-skończoną przestrzenią mierzalną (Ω,μ), zaś X drugą przestrzenią Banacha. Rozważania tej części opierają się na wyniku mówiącym, że jeśli jakiś operator ma promień spektralny równy jedności, to skalarne trajektorie tego operatora mogą mieć dowolnie długie części początkowe z dala od zera. Mówiąc ściślej, jeśli T jest operatorem ograniczonym na X, którego promień widmowy spełnia nierówność $r(T) \geqslant 1$, to dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ i $0 < \epsilon < 1$ istnieją wektory $x \in X$ i $x^* \in X^*$ takie, że $\|x\| = \|x^*\| = 1$ i

$$|\langle x^*, T^k x\rangle| \geqslant 1 - \epsilon \tag{44}$$

dla wszystkich $k = 0, 1, \ldots, N$.

Pierwszym krokiem jest zbadanie przypadku dyskretnego. Dla funkcyjnej przestrzeni Banacha $E(\mathbb{N})$ nad $\mathbb{N}$ zdefiniujmy *funkcję podstawową* na $E(\mathbb{N})$ wzorem

$$\phi_E(n) = \|\chi_{\{0,1,\ldots,n-1\}}\|_E$$

gdzie χ_A jest funkcją charakterystyczną zbioru A. Zachodzi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 7. *Niech T będzie operatorem ograniczonym na przestrzeni Banacha X i niech $E(\mathbb{N})$ będzie funkcyjną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{N}$, której funkcja podstawowa spełnia warunek*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_E(n) = \infty.$$

Jeśli istnieje ciąg liczb naturalnych $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do nieskończoności taki, że dla wszystkich $x \in X$ i $x^* \in X^*$ funkcja $n \to \langle x^*, T^{k_n} x\rangle$ należy do $E(\mathbb{N})$, to $r(T) < 1$.

Przejdźmy teraz do półgrup silnie ciągłych. Zdefiniujmy funkcję fundamentalną dla przestrzeni $E(\mathbb{R}_+)$ w następujący sposób

$$\phi_E(t) = \|\chi_{[0,t)}\|_E.$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 8. *Niech $(T(t))_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą klasy C_0 na przestrzeni Banacha X, zaś $E(\mathbb{R}_+)$ będzie przestrzenią funkcyjną Banacha nad $\mathbb{R}_+$, której funkcja fundamentalna spełnia*

$$\lim_{t\to\infty} \phi_E(t) = \infty.$$

Jeśli dla dowolnego $x \in X$ funkcja $t \to \|T(t)x\|$ należy do E, to $\omega_0(T) < 0$.

Wszystkie przestrzenie $L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, +\infty[$, spełniają założenia tego twierdzenia, więc w szczególności zachodzi twierdzenie Datki–Pazy'ego.

9. Półgrupy nieujemne. Inną klasą półgrup, których właściwości asymptotyczne są w stosunkowo pełny sposób określone przez położenie widma generatora, są półgrupy nieujemne. Klasa ta ma bardzo duże znaczenie w zastosowaniach, gdyż w wielu modelach fizycznych lub biologicznych tylko nieujemne dane początkowe i rozwiązania mają sens. Koncepcję dodatniości formalizuje się matematycznie wprowadzajac pojęcie *kraty Banacha*, czyli częściowo uporządkowanej przestrzeni Banacha, w której dodatkowo relacja częściowego porządku jest zgodna ze struktura liniową i normą w następującym sensie:

(i) dla każdych $x, y, z \in X$, z $x \leqslant y$ wynika $x + z \leqslant y + z$,

(ii) dla dowolnych $0 \leqslant a \in \mathbb{R}$ in $0 \leqslant x \in X$ mamy $0 \leqslant ax$,

(iii) dla każdej pary $x, y \in X$ istnieje ich maksimum $x \vee y$ i minimum $x \wedge y$,

(iv) dla każdych $x, y \in X$, $|x| \leqslant |y|$ pociąga $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Półgrupę klasy C_0 na (zespolonej kracie Banacha) X nazywamy *nieujemną*, jeśli dla każdego $0 \leqslant x \in X$ i $t \geqslant 0$ zachodzi $0 \leqslant T(t)x$.

Operator A nazywamy *operatorem o nieujemnej rezolwencie*, jeśli istnieje $\omega \in \mathbb{R}$ taka, że $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ i $0 \leqslant R(\lambda, A)$ for all $\lambda > \omega$.

Dość łatwo stwierdzić, że półgrupa $(T(t))_{t \geqslant 0}$ generowana przez A jest nieujemna wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leqslant R(\lambda, A)$ dla wszystkich dostatecznie dużych λ.

9.1. Dla półgrup nieujemnych zawsze zachodzi $s(A) = \omega_1(T)$. Jednym z podstawowych wyników w teorii półgrup nieujemnych jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 9. *Niech $(T(t))_{t \geqslant 0}$ będzie półgrupą nieujemną na kracie Banacha X generowaną przez A. Wówczas*

(i) *$s(A)$ jest infimum zbioru takich liczb ω, że jeśli* $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, *to dla każdego $x \in X$*

$$R(\lambda, A)x = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \tag{45}$$

czyli, innymi słowy,

$$s(A) = \omega_1(A). \tag{46}$$

(ii) *Zachodzi albo $s(A) = -\infty$, albo $s(A) \in \sigma(A)$.*

(iii) *Jeśli $\lambda \in \rho(A)$, to $0 \leqslant R(\lambda, A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda > s(A)$.*

(iv) *Zachodzi równość*

$$s(A) = s_0(A). \tag{47}$$

Uwagi o niektórych aspektach dowodu. Zauważmy, że dla dowolnych półgrup klasy C_0 infimum tych ω, dla których zachodzi (45), jest równe

$\omega_1(T)$ na podstawie (34). W związku z tym, jeśli (45) jest prawdziwy, to związek (46) wynika z (35).

Równość (46) może być uważany za słabszą wersję twierdzenia Lapunowa, mówi bowiem, że jeśli części rzeczywiste wszystkich elementów widma są ujemne (i wspólnie oddzielone od zera), to rozwiązania klasyczne zagadnienia (21) wykładniczo zmierzają do zera, gdy $t \to \infty$.

Punkt (ii) to twierdzenie Perrona–Frobeniusa dla półgrup nieujemnych.

Punktem wyjścia dla dowodu (45) jest abstrakcyjna wersja twierdzenia Landaua–Pringsheima, która mówi, że transformata Laplace'a lokalnie całkowalnej funkcji nieujemnej (o wartościach w X) nie daje się analitycznie przedłużyć poza półpłaszczyznę, w której zbieżna jest całka definiująca tę transformatę. □

9.2. Półgrupy nieujemne w przestrzeniach L_p. Jeśli kratą Banacha jest przestrzeń typu L_p, to dla półgrup nieujemnych zachodzi pełne twierdzenie Lapunowa. Wynik ten, który dokładniej omówię poniżej, pochodzi od Weissa.

TWIERDZENIE 10. *Jeśli* $X = L_p(\Omega, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, *gdzie* (Ω, μ) *jest* σ*-skończoną przestrzenią mierzalną, zaś* $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *jest półgrupą nieujemną na* X *generowaną przez* A, *to*

$$s(A) = \omega_0(T). \tag{48}$$

Innymi słowy, jeśli całe widmo A leży w domkniętej lewej półpłaszczyźnie nie zawierającej zera, to wszystkie trajektorie zagadnienia (21) *są wykładniczo stabilne.*

Twierdzenie to jest dość skomplikowane i w istotny sposób wykorzystuje teorię Łatuszkina–Montgomery-Smith'a, ograniczę się zatem do zarysowania tylko kilku ważniejszych punktów.

Uwagi o niektórych aspektach dowodu. Równość (48) dla dwóch szczególnych przypadków $p = 1$ i $p = 2$ była znana od początku lat osiemdziesiątych. Żeby stwierdzić jej prawdziwość dla przestrzeni $L_2(\Omega, \mu)$ wystarczy zebrać uzyskane wcześniej wyniki: (40), gdzie otrzymaliśmy $\omega_0 = s_0(A)$, i (47), który daje $s(A) = s_0(A)$. Wynik ten można oczywiście otrzymać na wiele innych, bardziej elementarnych, choć niekoniecznie łatwiejszych, sposobów.

Dla $p = 1$ rozumowanie przebiega w sposób następujący. Załóżmy, że $s(A) < 0$. Dla $f \in L_1(\Omega, \mu)$ mamy,

$$\|T(t)f\| = \int\limits_{\Omega} |(T(t)f)(x)|\, d\mu \leqslant \int\limits_{\Omega} (T(t)|f|)(x)\, d\mu,$$

czyli

$$\int_0^\tau \|T(t)f\|\,dt \leqslant \int_\Omega \Big(\int_0^\tau (T(t)|f|)(x)\,dt\Big)\,d\mu = \Big\langle 1, \int_0^\tau T(t)|f|\,dt\Big\rangle.$$

Z Twierdzenia 9 otrzymujemy, że $\omega_1(T) = s(A) < 0$, zaś z (34) wynika, że całka $\int_0^\tau T(t)|f|\,dt$ jest zbieżna (odpowiada przypadkowi $\lambda = 0$). Zatem dla każdego $f \in L_1(\Omega, \mu)$

$$\int_0^\infty \|T(t)f\|\,dt < +\infty,$$

co na mocy twierdzenia Datki–Pazy'ego pozwala stwierdzić, że półgrupa jest wykładniczo stabilna.

Omówione powyżej wyniki sugerują pewien sposób udowodnienia Twierdzenia 10: interpolując wynik dla $1 < p < 2$ i wykorzystując dualność dla $p > 2$. W istocie, taka jest idea dowodu, jednakże problemy techniczne są bardzo poważne.

Zauważmy, że technicznie rzecz biorąc, zazwyczaj dowodzi się tylko, że jeśli $s(A) < 0$, to $\omega_0(T) < 0$. Okazuje się jednak, że to wystarcza dla zachodzenia równości $s(A) = \omega_0(T)$. Jeśli bowiem weźmiemy dowolną liczbę $\omega \in (s(A), 0)$, to dla operatora $A - \omega$ zachodzi $s(A - \omega) < 0$. Ponieważ jest on generatorem półgrupy nieujemnej $(e^{-\omega t}T(t))_{t\geqslant 0}$, otrzymujemy $\omega_0(e^{-\omega t}T(t)) < 0$. Oznacza to, że dla każdej $\omega \in (s(A), 0)$ zachodzi

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \tag{49}$$

dla pewnego M. Skoro $\omega_0(T)$ jest infimum po wszystkich ω, dla których zachodzi (49), otrzymujemy $\omega_0(T) \leqslant s(A)$, co wobec oczywistej nierówności przeciwnej dowodzi $s(A) = \omega_0(T)$. □

9.3. Twierdzenie Lapunowa w przestrzeniach $C_0(\Omega)$. Omówione w poprzednim podpunkcie twierdzenie Weissa ma swój odpowiednik w przestrzeniach funkcji ciągłych. Zachodzi bowiem twierdzenie

TWIERDZENIE 11. *Niech $X = C_0(\Omega)$, gdzie Ω jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Jeśli $(T(t))_{t\geqslant 0}$ jest silnie ciągła półgrupą nieujemną na X, generowaną przez A, to $s(A) = \omega_0(T)$.*

Idea dowodu. Dowód tego twierdzenia opiera się na uwadze, że tzw. półgrupa sprzężona w sensie Phillipsa, $(T^\odot(t))_{t\geqslant 0}$, ma zawsze ten sam typ, co $(T(t))_{t\geqslant 0}$

$$\omega_0(T) = \omega_0(T^\odot),$$

po czym przenosi się dowód do przestrzeni sprzężonej, która ma charakterystykę podobną do przestrzeni L_1 (jest to tzw. przestrzeń AL). Dowód dalej przebiega podobnie jak w L_1 i kończy się zastosowaniem twierdzenia Datki–Pazy'ego. □

Literatura

[1] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math. 194, Springer Verlag, 1999.
[2] A. M. Lapunow, *Stabilnost dviženija*, Praca doktorska, Charków, 1892, tłumaczenie angielskie, Academic Press, 1966.
[3] J. van Neerven, *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Oper. Theory Adv. Appl. 88, Birkhäuser Verlag, 1996.
[4] A. Zabczyk, *A note on C_0-semigroups*, Bull. Acad. Polon. Sci. 23 (1975), 895–898.