ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLII (2006)

Roman Murawski (Poznań)

Kurt Gödel (1906–1978)*

Kurt Gödel uważany jest za jednego z największych logików, być może za największego logika XX wieku. Paul Oppenheim pisał o „największym logiku matematycznym od czasów Arystotelesa", zaś Karl Menger nazywał go czasami „Mozartem matematyki".

Kurt Friedrich[1] Gödel urodził się 28 kwietnia 1906 roku w Brünn (obecnie Brno) na Morawach w należącej do mniejszości niemieckiej zamożnej rodzinie. Jego ojciec, który pochodził z Wiednia, był dyrektorem i współwłaścicielem fabryki tekstylnej. Matka – osoba wykształcona o szerokich zainteresowaniach kulturalnych – grała dobrze na fortepianie, często bywała w teatrze. Kurt miał starszego o cztery lata brata Rudolfa, który został lekarzem rentgenologiem.

Kurt od wczesnego dzieciństwa był bardzo wrażliwy i do tego słabego zdrowia. W wieku 4–5 lat przeżywał silne ataki lęku, gdy matka wychodziła z domu, gdy zaś miał 8 lat przeszedł ciężką gorączkę reumatyczną, która być może spowodowała późniejszą, dającą o sobie znać przez całe życie, hipochondrię. Był dzieckiem niezwykle ciekawym świata, ciągle zadającym dorosłym pytania. Stąd w rodzinie nazywano go „Herr Warum".

W 1912 roku rozpoczął naukę w Evangelische Volksschule, od 1916 zaś roku uczęszczał do niemieckojęzycznego Realgymnasium w Brnie. Razem z bratem pobierał też prywatne lekcje angielskiego. Nigdy nie uczył się w szkole czeskiego, za to pobierał lekcje stenografii, której później używał m.in. przy sporządzaniu notatek.

Kurt Gödel był bardzo dobrym uczniem. Na świadectwach miał same „bardzo dobre" z wyjątkiem „dobrych" dwukrotnie z gimnastyki i raz z matematyki! Mając 14 lat zainteresował się matematyką, zaś w wieku 16 lat studiował Kanta.

---

* Praca finansowana ze środków Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej.

[1] Drugiego imienia przestał Gödel używać w roku 1948, kiedy uzyskał obywatelstwo amerykańskie. Powody tej decyzji nie są znane.

W roku 1924 zdał maturę i jesienią zaczął studiować fizykę na Uniwersytecie w Wiedniu. Dwa lata później zmienił jednak kierunek studiów na matematykę. Największy wpływ w czasie studiów miał na niego Hans Hahn, który wprowadził go też do założonego przez Moritza Schlicka Koła Wiedeńskiego. W latach 1926–1928 Gödel regularnie uczęszczał na spotkania Koła, później te kontakty stały się luźniejsze – przyczyną były chyba różnice w poglądach filozoficznych. Mimo to wpływ Koła na zainteresowania i poglądy filozoficzne Gödla był duży. Wykłady Rudolfa Carnapa z logiki matematycznej i lektura wydanej wtedy (1928) książki D. Hilberta i W. Ackermanna *Grundzüge der theoretischen Logik* ([12]) spowodowały, że Gödel zainteresował się logiką.

W 1929 roku zmarł nagle (w wieku 54 lat) ojciec Gödla. Trzy dni po jego śmierci Kurt zrzekł się obywatelstwa czechosłowackiego i przyjął obywatelstwo austriackie (jego brat Rudolf uczynił to już w roku 1925). Śmierć ojca oznaczała dla rodziny całkowitą zmianę sytuacji materialnej. Ponieważ Kurt wraz z bratem mieszkali w Wiedniu, matka wynajęła dom w Brnie i przeniosła się do synów. Wynajmowali mieszkania w dzielnicy Josefstadt; Rudolf był już wtedy renomowanym lekarzem. Wraz z matką Kurt często bywał w teatrze; interesował się też malarstwem współczesnym, chętnie słuchał muzyki, zwłaszcza operowej i operetkowej. Z czasem zainteresowania te zupełnie wygasły.

Jednym z problemów, które opisali we wspomnianej wyżej monografii Hilbert i Ackermann, był problem pełności systemu logiki. Gödel rozwiązał go w swojej rozprawie doktorskiej „Über die Vollständigkeit des Logikkalküls" ([2] i [3]), którą złożył 6 lipca 1929 roku. 6 lutego następnego roku uzyskał na jej podstawie stopień doktora filozofii (miał wówczas 23 lata).

Po doktoracie Gödel zajął się problemem realizacji Hilbertowskiego programu ugruntowania matematyki klasycznej (przede wszystkim wykazania jej niesprzeczności) za pomocą środków finitystycznych. Wyniki swych badań zaanonsował 7 września 1930 roku w czasie konferencji w Królewcu – wtedy to po raz pierwszy zaprezentował (tzw. pierwsze) twierdzenie o niezupełności systemów aksjomatycznych sformalizowanych w logice pierwszego rzędu i zawierających arytmetykę liczb naturalnych. Wynik ten wskazywał na to, że program Hilberta jest nierealizowalny w swej pierwotnej postaci.

Pierwsze twierdzenie o niezupełności wraz ze sformułowaniem twierdzenia drugiego (mówiącego o niedowodliwości niesprzeczności) i obietnicą podania dowodu w drugiej części pracy (por. niżej) zostało ogłoszone w artykule „Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme. I" opublikowanym w roku 1931 ([4]). W dniu 25 czerwca 1932 roku Gödel przedstawił tę pracę na Uniwersytecie Wiedeńskim jako rozprawę habilitacyjną i na jej podstawie otrzymał 1 grudnia tegoż roku habilitację. W dniu 11 marca następnego roku uzyskał *veniam* *legendi* i został docentem prywatnym z prawem do nauczania, ale bez pensji. W semestrze letnim roku 1933 prowadził wykład z podstaw arytmetyki.

Hans Hahn tak pisał w swojej recenzji: „Jest to osiągnięcie najwyższej rangi, które spotkało się z najwyższym uznaniem we wszystkich kręgach fachowców i które – jak daje się z całą pewnością przewidzieć – zajmie należne mu miejsce w historii matematyki. [...] Przedstawione przez dra Gödla prace przewyższają z pewnością poziom wymagany zwykle w przypadku rozprawy habilitacyjnej. Dr Gödel już dziś należy do najwyższych autorytetów w dziedzinie logiki symbolicznej i podstaw matematyki."

Od roku 1929 datują się kontakty naukowe Gödla z Karlem Mengerem. Uczestniczył on w prowadzonym przez tego ostatniego seminarium, opublikował w wydawanym przez Mengera czasopiśmie *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* trzynaście krótkich artykułów, zajmował się też pracą redakcyjną dotyczącą tego czasopisma. Na seminarium Mengera poznał także Alfreda Tarskiego, który w czasie obu swoich wizyt w Wiedniu (w latach 1930 i 1935) wygłaszał tam referaty.

Latem 1932 roku odwiedził Wiedeń profesor Oswald Veblen, organizujący naówczas Institute for Advanced Study w Princeton, N.J. (USA). Został zaproszony także na seminarium Mengera, gdzie mógł akurat wysłuchać wystąpienia Gödla (referował on wtedy swoje wyniki dotyczące interpretacji klasycznej arytmetyki i teorii liczb w matematyce intuicjonistycznej). Referat wywarł na Veblenie tak silne wrażenie, że postanowił zaprosić Gödla do odwiedzenia nowego instytutu w Princeton. Gödel skorzystał z zaproszenia i wyjechał do USA jesienią 1933 roku. Spędził w Princeton cały rok akademicki 1933/34. Wiosną 1934 roku wygłosił cykl wykładów poświęconych twierdzeniom o niezupełności. W tym okresie w Princeton pracowało trzech logików: Alonzo Church i dwaj jego doktoranci Stephen Cole Kleene i J. Barkley Rosser. Church zajmował się w tym czasie λ-rachunkiem. Wszyscy trzej słuchali wykładów Gödla. Po dyskusjach z Churchem i pod ich wpływem Gödel rozszerzył pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej wprowadzając pojęcie funkcji (ogólnie) rekurencyjnej. Kleene i Rosser sporządzili notatki do wykładów Gödla, które powielane krążyły wśród zainteresowanych. Zostały one opublikowane w roku 1965 (por. [5]).

Gödel wrócił z Princeton w złym stanie zdrowia. Na skutek warunków klimatycznych i atmosfery psychicznej panujących w Ameryce, jak i wskutek zmienionej diety, Gödel doznał w czerwcu 1934 roku załamania nerwowego. Opiekę lekarską sprawował nad nim psychiatra (i późniejszy laureat Nagrody Nobla) Julius von Wagner-Jauregg. Gödel spędził jakiś czas w sanatoriach w Purkersdof i w Neulengbach. Kolejna wizyta w Princeton, zaplanowana na jesień 1934, musiała zostać przełożona na jesień roku następnego.

W semestrze letnim 1935 Gödel prowadził na Uniwersytecie w Wiedniu wykład z logiki. Latem udowodnił względną niesprzeczność aksjomatu wyboru.

Jesienią 1935 roku Gödel ponownie pojechał do Princeton. Tu zakomunikował swoje wyniki dotyczące teorii mnogości Johnowi von Neumannowi, który był już od kilku lat profesorem w Institute for Advanced Study (obok niego profesorami byli też Albert Einstein, Oswald Veblen i Hermann Weyl). Niestety, stan zdrowia Gödla bardzo się pogorszył – pojawiły się objawy podobne do wcześniejszych – i już w październiku 1935, za radą Veblena, Gödel wrócił do Europy. Po powrocie do Austrii znalazł się znów w sanatorium w Purkersdorf, gdzie spędził praktycznie cały rok, do wiosny 1937.

Jesienią 1937 roku, mimo ciągle nie najlepszego stanu zdrowia, podjął zajęcia na uniwersytecie prowadząc wykład (był to trzeci jego wykład na uniwersytecie) na temat aksjomatycznej teorii mnogości (wśród słuchaczy tego wykładu był Andrzej Mostowski, który przebywał w tym czasie na stypendium w Wiedniu). W tymże roku udowodnił też względną niesprzeczność hipotezy kontinuum.

28 października 1938 roku Kurt Gödel ożenił się z Adelą Nimbursky (z domu Porkert), którą znał już od blisko 10 lat. Uroczystość zaślubin odbyła się w wąskim gronie najbliższej rodziny, nie zostali o niej powiadomieni żadni koledzy ani z Wiednia, ani z Princeton. Ślub był ze strony Gödla demonstracją niezależności od rodziny.

Dwa tygodnie później Kurt wyjechał ponownie do Princeton. Tym razem referował tam swoje wyniki na temat niesprzeczności aksjomatu wyboru i hipotezy kontinuum. Wykłady te zostały opublikowane dwa lata później w formie monografii (por. [7]).

Semestr wiosenny 1939 roku spędził Gödel na Uniwersytecie w Notre Dame, Indiana, gdzie przebywał na zaproszenie Karla Mengera. W końcu 1939 roku wrócił do Wiednia. Tu podjął starania o „uratowanie" swojej docentury na uniwersytecie. Po *Anschlussie* Austrii przez Hitlera, zniesione zostało bowiem stanowisko docenta prywatnego, które zajmował Gödel. Na to miejsce wprowadzono stanowisko docenta *neuer Ordnung*, o które musiał się teraz starać. Na domiar złego nowe władze uznały go za zdolnego do służby wojskowej (ciążył na nim – jako na obywatelu „Wielkiej Rzeszy Niemieckiej" – obowiązek wojskowy). Do tego prawie zupełnie wyczerpały się już zasoby finansowe odziedziczone po śmierci ojca i Gödel był właściwie bez środków do życia (jako docent prywatny otrzymywał tylko symboliczne wynagrodzenie[2]). W tej sytuacji 25 września 1939 roku zwrócił się do władz z prośbą o przekształcenie zajmowanego dotąd stanowiska docenta prywatnego w stanowisko docenta „nowego porządku"[3]. Decyzję pozytywną

[2] O jego wysokości świadczy jeden z zachowanych dokumentów, z którego wynika, że wynagrodzenie, jakie Gödel otrzymał kiedyś za semestr, stanowiło równowartość ... kilku kufli piwa!

[3] O atmosferze tamtych czasów niech świadczy fakt, że w opinii o Gödlu napisanej w związku z jego podaniem stwierdzono m.in., że „pod względem naukowym nie ma

otrzymał dopiero 28 czerwca 1940 roku, kiedy to od kilku miesięcy był już w USA.

W listopadzie 1939 roku bowiem podjął Gödel starania o wizę amerykańską. Dzięki pomocy i protekcji Abrahama Flexnera z Princeton otrzymał ją w styczniu 1940 roku dla siebie i dla żony Adeli. 18 stycznia 1940 roku Gödlowie wyruszyli w podróż do USA. Ponieważ w sytuacji działań wojennych przeprawa przez Atlantyk nie wchodziła w grę, Gödlowie podróżowali pociągiem przez okupowaną Polskę, następnie przez Litwę, Łotwę, Związek Radziecki, Mandżurię i Japonię, a stamtąd statkiem[4] do San Francisco i dalej pociągiem do Princeton. Na miejscu byli w drugiej połowie marca – podróż trwała więc prawie 7 tygodni.

Od 1940 roku był zatem Gödel znów w Institute for Advanced Study jako profesor wizytujący. W roku 1946 został stałym członkiem instytutu, a w 1953 mianowano go profesorem. Dziwić może, że nastąpiło to tak późno. Gödel sam nie zabiegał o mianowanie. Z drugiej strony koledzy z instytutu obawiali się, że jego skrajny legalizm i niemożność podjęcia decyzji sparaliżują pracę rady naukowej. O profesurę dla Gödla zabiegał mocno John von Neumann, który miał nawet stwierdzić: „How can any of us be a professor as long as Gödel isn't?"

W roku 1948 Gödel otrzymał obywatelstwo amerykańskie. Z tym ostatnim faktem związana jest anegdota pokazująca pewną cechę charakteru Gödla, a mianowicie jego skrajnie legalistyczną postawę w stosunku do urzędów i władzy państwowej. Otóż zgodnie z przyjętą w USA procedurą, ubiegający się o obywatelstwo musiał zdać przed sędzią egzamin ze znajomości konstytucji. Gödel podszedł do tego egzaminu bardzo serio i przez dłuższy czas gruntownie studiował konstytucję amerykańską. W drodze na egzamin towarzyszyli mu dwaj przyjaciele, Einstein i Morgenstern. Tuż przed wyjazdem Gödel, wyraźnie podekscytowany, zaskoczył ich uwagą, że znalazł pewną usterkę w konstytucji USA. Chcąc odwrócić uwagę Gödla od tego odkrycia, które mogło przynieść kłopoty w sądzie, Einstein przez całą drogę opowiadał dowcipy. Na niewiele się to jednak zdało. Gdy w końcu znaleźli się przed obliczem sędziego (urzędnicy sądowi rozpoznali oczywiście Einsteina i wyjątkowo pozwolono Einsteinowi i Morgensternowi towarzyszyć Gödlowi w czasie egzaminu), ten chcąc łagodnie zacząć egzamin, zaczął – zwracając się do Gödla – w te słowa: „Miał Pan do tej pory obywatelstwo niemieckie". „Przepraszam – odparł Gödel – austriackie". „No właśnie. Ta okropna dyktatura. Na szczęście coś takiego byłoby niemożliwe w USA". „Przeciwnie!" –

zarzutów", ale habilitował się pod kierunkiem „żydowskiego prof. Hahna"; zarzucano też Gödlowi, że „obracał się zawsze w kołach liberalno-żydowskich", choć dodawano (tytułem wyjaśnienia czy usprawiedliwienia?), że „matematyka była w tym okresie silnie zażydzona (verjudet)".

[4] Ponieważ spóźnili się o jeden dzień na statek, na który mieli wykupione bilety i rezerwację, musieli czekać kilka tygodni na kolejny rejs.

odrzekł natychmiast Gödel. „Wiem, jak mogłoby do tego dojść.” Sędzia i towarzyszący Gödlowi przyjaciele z przerażeniem zdali sobie sprawę, do czego może doprowadzić kontynuowanie rozpoczętego wątku. Na szczęście sędzia odparł Gödlowi: „Nie musi Pan wchodzić w szczegóły. Możemy przejść do właściwej części.” I wszystko skończyło się dobrze.

W czasie pobytu w Princeton Gödel był znacznie mniej twórczy niż wcześniej i rzadko publikował. Z jednej strony szła za nim sława związana z pracami z lat trzydziestych, z drugiej odczuwał coraz mniej bodźców, by ogłaszać coś nowego. Jego zainteresowania przesunęły się teraz z zagadnień technicznych logiki i podstaw matematyki na mniej techniczne (co nie znaczy, że łatwiejsze) i mniej „wydajne” problemy filozoficzne.

Gödel próbował wykazać niezależność aksjomatu wyboru i hipotezy kontinuum (co stanowiłoby dopełnienie wyników z lat trzydziestych o ich niesprzeczności), uzyskał jednak tylko pewne wyniki częściowe. W zakresie filozofii napisał ważną pracę o logice matematycznej Russella i zajmował się Leibnizem. Miał nadzieję, że stworzy system logiczno-kosmologiczny w duchu Leibniza; w tym celu zamierzał nawet sprowadzić z Hanoweru do Princeton kopie rękopisów Leibniza z jego spuścizny – nie udało się to jednak. Interesował się także fenomenologią i studiował Husserla.

Zajmował się również teorią względności – napisał dwie prace z zakresu fizyki, w których pokazał, że w rotującym uniwersum możliwe są w zasadzie podróże w przeszłość i podróże w przyszłość. Wyciągnął stąd wniosek natury filozoficznej, iż pojęcie czasu jest pojęciem zasadniczo subiektywnym, tzn. pojęciem idealnym w sensie Kantowskim, ponieważ odwołuje się i zależy od obserwatora i narzędzi pomiarowych. Wyniki te cieszyły się z czasem coraz większym uznaniem. Można je właściwie uznać za najważniejsze i najbardziej oryginalne wyniki Gödla z okresu jego pobytu w Ameryce w latach 1940–1978.

Życie Gödla w Princeton było niezwykle uregulowane, nic z zewnątrz go nie zakłócało, świat zewnętrzny dostarczał niewielu bodźców. Prowadził wraz z żoną Adelą spokojny tryb życia. Żona czuła się w Ameryce niezbyt dobrze, nie miała tu żadnych przyjaciół. Oboje byli znacznie bardziej wyizolowani i wyobcowani towarzysko niż w Wiedniu. Ich dom by skromny i, jak opisują naoczni świadkowie, dość kiczowato urządzony. W Institute for Advanced Study nie było z założenia żadnych studentów (a jedynie doktoranci), nie istniało więc w konsekwencji życie akademickie – było to coś na kształt klasztoru intelektualnego. Mimo że mieszkańcy byli dobrze sytuowani, samo miasto, poza kilkoma znanymi restauracjami, pozbawione właściwie było miejsc takich jak kawiarnie, które oferowałyby możliwość spotkań towarzyskich. Niewątpliwie stanowiło to wielki kontrast w zestawieniu z Wiedniem i jego bogatym życiem towarzyskim i kawiarnianym. Gödel spędzał czas przeważnie w domu i coraz rzadziej pojawiał się w instytucie. Z kolegami (nawet tymi zza ściany) kontaktował się telefonicznie (bardzo lubił rozmawiać przez telefon i prowadził długie rozmowy).

Do przyjaciół Gödla w Princeton należeli przede wszystkim Albert Einstein, Oskar Morgenstern i Paul Oppenheim. Gödel poznał Einsteina już w roku 1933, jednak dopiero od 1942 r. spotykali się regularnie i prowadzili – na ogół w drodze między instytutem a ich leżącymi niedaleko od siebie domami – długie rozmowy. Einstein powiedział podobno nawet kiedyś (a było to w bardzo deszczowy dzień!), że przyszedł do instytutu tylko po to, by móc wrócić z Gödlem do domu i porozmawiać z nim po drodze. Obaj byli do siebie zupełnie niepodobni, właściwie całkowicie różni: Einstein towarzyski, pogodny, dowcipny i obdarzony zdrowym rozsądkiem, Gödel – na zewnątrz zawsze bardzo formalny i wręcz uroczysty, zawsze poważny, zupełnie samotny i sceptyczny w stosunku do zdrowego rozsądku jako środka poszukiwania prawdy. Obaj jednak podążali prosto i bezkompromisowo w poszukiwaniu istoty rzeczy. Einstein nieustannie próbował poprzez coraz to nowe pomysły, opowiadanie dowcipów czy przekomarzanie się poprawić humor zawsze poważnego i wrażliwego Gödla. Uratował mu nawet kiedyś życie: gdy lekarz polecił cierpiącemu na wrzody dwunastnicy i znajdującemu się w poważnym stanie Gödlowi poddanie się zabiegowi w szpitalu, tylko urokowi i sile przekonywania Einsteina należy zawdzięczać to, że w końcu udało mu się przekonać przyjaciela i zawieźć go do kliniki.

Niezwykle ważną rolę odgrywała w życiu Gödla jego żona Adela. Ożenił się z nią wbrew woli rodziny, która nigdy jej nie zaakceptowała – do końca stosunki rodziny Gödla i Adeli pozostały chłodne i pełne dystansu. W oczach matki Gödla Adela miała kilka zasadniczych wad: przede wszystkim była kobietą rozwiedzioną, sześć lat starszą od Kurta, do tego katoliczką, miała niewłaściwy wygląd (znamię na twarzy), a nade wszystko – niewłaściwy zawód; była mianowicie tancerką kabaretową (w istocie fordanserką), choć sama podawała się za tancerkę baletową.

Adela pełniła w życiu Gödla rolę „life-line”. Stan zdrowia powodował, że wymagał on stałej opieki i troski ze strony zaradnej i „chodzącej po ziemi” żony. Ich wzajemne stosunki były jednak pełne napięć. Adela czuła się w Princeton nieszczęśliwa – daleko od swego umiłowanego Wiednia, nie potrafiła się odnaleźć i zintegrować w nowym miejscu. Była osobą niewykształconą, nigdy nie nauczyła się dobrze angielskiego. W przeciwieństwie do Kurta bardzo lubiła życie towarzyskie. Wydaje się, że jej narzekania na nieszczęśliwe życie w Princeton mogły być jedną z przyczyn choroby wrzodowej Gödla. Po otrzymaniu przez Kurta w 1953 roku stanowiska profesora, co oznaczało w praktyce także wyższe zarobki, zaczęła mniej się skarżyć i wydawała się bardziej zadowolona. Kilka razy wyjeżdżała do Europy, m.in. do sanatoriów w Austrii.

Adela była dumna z Gödla i jego osiągnięć. Po wygłoszonym przez niego wykładzie Gibbsa (w roku 1951) powiedziała: „Kurtele, wenn ich deinen

Vortrag mit den anderen vergleiche, warst du unverglechlich!" (Kurcie, kiedy porównuję twój wykład z innymi, to nie ma porównania!).

Adela była także znakomitą kucharką i starała się spełniać kulinarne kaprysy męża. Było to o tyle ważne, że od czasu ślubu nie jadł on niczego, czego nie przyrządziła żona – był to skutek chorobliwych podejrzeń, że ktoś chce go otruć. Z czasem jednak nawet najsmaczniejsze potrawy Adeli przestały znajdować jego akceptację, jadł coraz mniej, co w końcu doprowadziło do tragedii.

Wszyscy, którzy znali Gödlów, zgodnie potwierdzają energiczne starania i troskę Adeli o męża i jej dumę z jego sławy i osiągnięć. Porozumienie między nimi było jednak bardzo trudne, a zainteresowania i stosunek do życia odmienne. Adela podchodziła do wszystkiego w sposób emocjonalny, porywczy, nierefleksyjny, „lokalnie", podczas gdy Kurt abstrakcyjnie, ostrożnie, z namysłem i w jakimś sensie globalnie.

Ostatnie lata życia Gödla upłynęły pod znakiem ciągle pogarszającego się stanu zdrowia, zarówno jeśli chodzi o kondycję fizyczną, jak i psychiczną. Od roku 1969 jego stan pogarszał się w sposób gwałtowny. W roku 1970 udało się Morgensternowi, po pokonaniu oporu Gödla, skłonić go do poddania się leczeniu w szpitalu. Nie zgodził się on jednak na operację (i przez sześć lat chodził z cewnikiem w brzuchu!). Żona Adela z czasem coraz mniej mogła się nim opiekować, była bowiem częściowo sparaliżowana i poruszała się na wózku.

Okres pomiędzy lipcem a grudniem 1977 r. Adela spędziła w szpitalu, gdzie musiała poddać się poważnej operacji. Podczas jej nieobecności w domu choroba Gödla uległa znacznemu zaostrzeniu – cierpiał na depresję, nie chciał się z nikim kontaktować. Niczego też nie jadł; jego podejrzenia, że ktoś chce go otruć, wzmacniały się (ważył w tym czasie około 31 kilogramów). Krótko przed Bożym Narodzeniem zabrano go do szpitala. Zmarł tam 14 stycznia 1978. W świadectwie zgonu jako przyczynę śmierci wpisano: niedożywienie.

Lekarz opiekujący się Gödlem – niejaki dr Rampona[5] – twierdził, że: „Gödel nie był właściwie chory, był tylko człowiekiem bardzo kruchej konstrukcji. Nie sądzę, by kiedykolwiek w swoim życiu zdobył się na jakiś wysiłek fizyczny. Jako młody człowiek nigdy też nie dbał o wzmocnienie swoich sił. Po prostu rósł i rozwijał się, prawdopodobnie w dobrym zdrowiu, aż się zestarzał [...] Nigdy tak naprawdę nie był chory, po prostu nic nie jadł. Żył bazując na budulcu i zapasach własnego organizmu."

Gödel był przez całe życie nieśmiały i stronił od ludzi, był osamotniony i odseparowany od świata, jego stan zdrowia był chwiejny. Rodzina obawiała

[5] Był on właściwie lekarzem Einsteina; dzięki zabiegom Einsteina Gödel zaakceptował przejściowo Ramponę i zgodził się poddać jego opiece.

się, że popełni samobójstwo. On sam odczuwał lęk przed otruciem (jak pisaliśmy, nigdy nie zjadł niczego, czego nie ugotowałby sam – robił to czasami! – albo czego nie przygotowała Adela). Przez długie lata poddawał się też psychoanalizie – prowadził go dr George Hulbeck z Nowego Jorku. Gödel był człowiekiem przewrażliwionym i kultywował tę swoją cechę. Skarżył się na przykład często, że w instytucie z centralnego ogrzewania wydobywa się jakiś szkodliwy gaz. Trzykrotnie musiano też wymieniać zakupioną przez niego lodówkę, utrzymywał bowiem, że ulatnia się z niej gaz.

Choć Gödel był ekscentrykiem i do tego kapryśnym, w istocie jego poglądy były bardzo tradycyjne, a gust mieszczański. W czasach, gdy mieszkał w Wiedniu, często bywał z matką w teatrze, interesował się też literaturą (czytał Goethego, Kafkę, Zweiga) i muzyką (zwłaszcza operą włoską i operetkami wiedeńskimi). Później lubił amerykańską muzykę pop. W Princeton chętnie chadzał do kina, gdzie z upodobaniem oglądał filmy z Myszką Mickey, Bambim, królewną Śnieżką, filmy z Ingrid Bergmann, także filmy surrealistyczne. Interesował się również ... damskim boksem (w jego spuściźnie znaleziono cały stos wycinków gazetowych poświęconych takim meczom). Często też odwiedzał Museum of Modern Art w Nowym Jorku.

Gödel był skrajnym legalistą, człowiekiem niepraktycznym, upartym, z trudem podejmującym ostateczną decyzję, odwlekającym każde rozstrzygnięcie. Nigdy nie dążył do żadnego wyższego czy lepszego stanowiska, uważał, że zarabia wystarczająco dużo. W tym należy też m.in. upatrywać przyczyn faktu, że stosunkowo późno został profesorem.

Zauważmy, że Gödel nie był nigdy nawet asystentem na uniwersytecie w Wiedniu. Nie zabiegał o to, gdyż miał wystarczająco dużo środków do życia odziedziczonych po ojcu. Był tam tylko docentem prywatnym i nie otrzymywał żadnej regularnej pensji. Dopiero w roku 1939, gdy wyczerpał się odziedziczony majątek, uznał za konieczne i stosowne staranie się o posadę (zanim jednak ją otrzymał, wyjechał do USA – por. wyżej).

Wykłady prowadzone przez Gödla nie były najlepsze. Wykładał mało komunikatywnie, cały czas zwrócony twarzą do tablicy. Do tego mówił bardzo szybko.

Liczba jego publikacji nie jest zbyt duża[6] (przy czym są to na ogół prace krótkie – w sumie wszystkie liczą około 100 stron!), każde jednak z jego dzieł otwierało całkiem nowe drogi i perspektywy w logice i filozofii! Zawarte w nich idee i pomysły do dziś inspirują badaczy. Jego prace to przykłady i wzorce precyzji, a jednocześnie zwięzłości. W spuściźnie Gödla na

[6] Jedną z przyczyn tego, że Gödel publikował niewiele, mogła być – wedle Hao Wanga – obawa przed niezrozumieniem i odrzuceniem jego idei i pomysłów (por. [20]). Inną przyczyną mogły być trudności z podejmowaniem decyzji i uznaniem pracy za gotową do publikacji.

pewno jest jeszcze wiele ukrytych skarbów. Niemożność podejmowania decyzji skutkowała też tym, że pisał po kilka coraz to nowych wersji pracy nie mogąc się zdecydować, która ma być tą ostateczną, którą można wysłać do redakcji. W efekcie nie wysyłał żadnej (po jego śmierci znaleziono po kilka wersji rozmaitych, nigdy nie opublikowanych prac), a nieszczęśni redaktorzy tomów zbiorowych czy specjalnych, którzy prosili Gödla o pracę do przygotowywanego dzieła monitowali, prosili, czekali, a w końcu dawali za wygraną i rezygnowali z zamówionego artykułu.[7]

Gödel był uczonym cenionym i szanowanym, wyróżnianym i nagradzanym. Otrzymał m.in. następujące nagrody i wyróżnienia: Nagrodę Alberta Einsteina (1951; była to pierwsza nagroda tego imienia), doktorat honorowy Uniwersytetu Yale (1951) i Uniwersytetu Harvarda (1952), członkostwo National Academy of Science (1953), członkostwo American Philosophical Society (1961), członkostwo honorowe London Mathematical Society (1967), doktorat honorowy Amherst College (1967), doktorat honorowy Rockefeller University (1972), National Medal of Science (1975).

W roku 1965 Oskar Morgenstern napisał list do ówczesnego ministra spraw zagranicznych Austrii Bruno Kreisky'ego z sugestią mianowania Gödla członkiem zwyczajnym Austriackiej Akademii Nauk. List ten wywołał lawinę podobnych próśb, które szerokim strumieniem płynęły do Wiednia. Niestety, nie odniosły one żadnego skutku – w głosowaniu nad tym członkostwem dla Gödla był jeden (!) głos przeciwny i zgodnie z regulaminem wniosek upadł. Zamiast tego zaoferowano Gödlowi godność członka korespondenta – ten jednak odrzucił taką ofertę. Pośmiertnie nadano mu doktorat honorowy Uniwersytetu Wiedeńskiego.

* * *

Przejdźmy teraz do omówienia głównych osiągnięć naukowych Gödla (por. też [16]). Do najważniejszych jego osiągnięć w zakresie logiki matematycznej i podstaw matematyki należą:

- twierdzenie o pełności,
- twierdzenia o niezupełności,
- dowód (względnej) niesprzeczności aksjomatu wyboru i hipotezy kontinuum.

Twierdzenie o pełności, które było treścią rozprawy doktorskiej Gödla (por. [2] i [3]), głosi, że logika pierwszego rzędu jest systemem pełnym, tzn. że każde zdanie, które jest uniwersalnie (czyli przy każdej interpretacji) prawdziwe, może być udowodnione w rachunku predykatów pierwszego rzędu.

[7] Oxford University Press wydało niedawno 5 tomów *Collected Works* Gödla: tomy I i II zawierają prace opublikowane, tom III – prace niepublikowane za życia Göda i znalezione w spuściźnie, tomy IV i V zaś – wybrane listy.

W postaci semantycznej można to twierdzenie sformułować tak: dowolna teoria pierwszego rzędu jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy ma model (przeliczalny). Twierdzenie to pokazywało, że program Hilberta ugruntowania matematyki klasycznej na bazie finitystycznej zmierza we właściwym kierunku i nadzieje na jego realizację są uzasadnione.

Mianem twierdzeń Gödla o niezupełności obejmuje się dwa twierdzenia. Pierwsze z nich powiada, że żadna niesprzeczna teoria pierwszego rzędu zawierająca arytmetykę liczb naturalnych i oparta na rekurencyjnym (a więc efektywnie rozpoznawalnym) zbiorze aksjomatów nie jest zupełna, tzn. zawsze istnieć będą zdania wyrażone w języku tej teorii, które są na jej gruncie nierozstrzygalne. Co więcej, własności tej nie można usunąć poprzez dodanie nowych aksjomatów – wtedy bowiem pojawią się nowe zdania nierozstrzygalne w tej bogatszej już teorii. I tak będzie zawsze. Twierdzenie to wskazuje więc na pewną cechę (słabość) metody aksjomatycznej. Pokazywało ono też, że program Hilberta w jego oryginalnej postaci nie może zostać zrealizowany.

Gödel udowodnił swoje twierdzenie posługując się w sposób wysoce wyrafinowany metodą arytmetyzacji składni. Dzięki temu mógł przetłumaczyć pewne własności metateoretyczne dotyczące arytmetyki liczb naturalnych (jako systemu dedukcyjnego) na język samej tej arytmetyki i w ten sposób (wykorzystując starożytny paradoks kłamcy i modyfikując go) zbudować zdanie nierozstrzygalne, które głosiło samo o sobie: „Ja nie jestem twierdzeniem". Zdanie to – będąc zdaniem arytmetycznym – miało treść metamatematyczną i powstało w wyniku rozważań metalogicznych[8]. Zauważmy też, że – jako nierozstrzygalne, a więc w szczególności niedowodliwe – było ono prawdziwe (w modelu standardowym arytmetyki): mówiło bowiem samo o sobie, że jest właśnie niedowodliwe! Pokazywało ono zatem (swoim istnieniem), iż dowodliwość to własność inna (dokładniej: słabsza) niż prawdziwość. Należy więc w konsekwencji wyraźnie odróżniać syntaktykę i semantykę systemu dedukcyjnego. Nie można też adekwatnie wyrazić semantyki za pomocą (skończonych) środków syntaktycznych (jak chciał Hilbert w swoim programie i ku czemu zmierzało Koło Wiedeńskie).

Drugie twierdzenie Gödla o niezupełności – zaanonsowane tylko przez Gödla wraz z obietnicą opublikowania później jego pełnego dowodu, której to obietnicy zresztą Gödel nigdy nie spełnił[9] – głosi, że w żadnej niesprzecznej teorii pierwszego rzędu zawierającej arytmetykę liczb naturalnych i opartej na rekurencyjnym zbiorze aksjomatów nie można udowodnić jej własnej niesprzeczności. W konsekwencji nie ma więc w matematyce absolutnych

[8] Później skonstruowano nowe zdania nierozstrzygalne w arytmetyce liczb naturalnych o treści wprost matematycznej czy teorioliczbowej – por. [25], [15], patrz także [18].

[9] Dodajmy, że wskazówka do dowodu podana przez Gödla okazała się niepoprawna. Pierwszy poprawny dowód drugiego twierdzenia Gödla o niezupełności podali Hilbert i Bernays w tomie drugim monografii *Grundlagen der Mathematik* z roku 1939 – por. [13].

dowodów niesprzeczności i skazani jesteśmy jedynie na dowody względnej nieprzeczności, tzn. na stwierdzenia typu: jeśli teoria T jest niesprzeczna, to teoria S jest także niesprzeczna. To w sposób istotny godziło w oryginalną postać programu Hilberta i jego zamiar wykazania niesprzeczności matematyki klasycznej metodami finistycznymi[10].

Zauważmy też, że Gödel w dowodzie twierdzeń o niezupełności posługiwał się wprowadzonym przez siebie pojęciem funkcji rekurencyjnej (w istocie wprowadzona przez niego klasa funkcji odpowiada – w stosowanej dziś terminologii – klasie funkcji pierwotnie rekurencyjnych). Tak więc Gödel jest też (obok Churcha i Turinga, którzy zaproponowali inne, choć równoważne precyzacje pojęcia efektywnej obliczalności) autorem pojęcia, które odgrywa fundamentalną rolę w informatyce!

Dowody Gödla niesprzeczności aksjomatu wyboru i hipotezy kontinuum związane są ze starym pytaniem o prawdziwość tych stwierdzeń i o to, czy można w oparciu o nie rozwijać matematykę. Problem kontinuum postawił już twórca teorii Georg Cantor, spory o aksjomat wyboru żywe były od czasu, gdy matematycy uświadomili sobie tę zasadę i fakt odwoływania się do niej w wielu dowodach matematycznych[11]. Kwestia ta jest tym ważniejsza, że z jednej strony aksjomat wyboru jest wykorzystywany w wielu sytuacjach i teoriach, a z drugiej ma on także konsekwencje sprzeczne z intuicją – choćby twierdzenie o paradoksalnym rozkładzie kuli udowodnione przez Banacha i Tarskiego. Gödel, wprowadziwszy pojęcie zbioru konstruowalnego[12] i aksjomat konstruowalności głoszący, że wszystkie zbiory są konstruowalne, wykazał, że aksjomat wyboru i (uogólniona) hipoteza kontinuum są względnie niesprzeczne z teorią mnogości ZF Zermela-Freankla[13], tzn. jeśli ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest też teoria ZF + aksjomat wyboru oraz teoria ZF + (uogólniona) hipoteza kontinuum. Oznacza to, że w samej ZF nie można dowieść ani negacji aksjomatu wyboru, ani negacji (uogólnionej) hipotezy kontinuum, czyli, innymi słowy, nie można ich w ZF obalić. Wynik Gödla był chyba pierwszym wynikiem metamatematycznym dotyczącym teorii mnogości.

---

[10] Istnieje bogata literatura na temat twierdzeń Gödla o niezupełności, na temat ich konsekwencji, także konsekwencji filozoficznych, na temat kontekstu, w jakim zostały one udowodnione i na temat ich recepcji. Por. na przykład: [21], [22], [23]. Dodajmy, że pierwsze twierdzenie Gödla próbuje się interpretować także w duchu sztucznej inteligencji używając go jako argumentu w sporze o siłę i moc komputerów i programów komputerowych czy ogólnie w sporze na temat problemu *mind–body* – por. [19] i [17].

[11] Por. [24], Dodatek I.

[12] Chodzi tu o konstruowalność za pomocą kilku prostych operacji, przy czym mogą one być iterowane pozaskończoną ilość razy.

[13] Gödel posługiwał się systemem teorii mnogości zwanym dziś systemem von Neumanna-Gödla-Bernaysa, w którym obok pojęcia zbioru występuje też pojęcie klasy. Dla prostoty wysłowienia, która nie zmienia istoty wyniku Gödla, posługujemy się tu bardziej dziś znanym i szerzej używanym systemem teorii mnogości Zermela-Fraenkla.

Gödel próbował także pokazać, że aksjomat wyboru i (uogólniona) hipoteza kontinuum są niezależne od teorii mnogości ZF, tzn., że nie można ich udowodnić w ZF. Wynik taki rozwiązywałby całkowicie problem statusu tych stwierdzeń w teorii mnogości. Niestety, jego wysiłki nie przyniosły rezultatu. Dopiero w roku 1963 udało się to Paulowi Cohenowi, który za pomocą nowej, wprowadzonej przez siebie metody, mianowicie metody *forcingu* udowodnił niezależność. Gödel bardzo cenił ten wynik.

Wyniki Gödla i Cohena pokazywały zatem, że na gruncie aksjomatów teorii mnogości Zermela-Fraenkla nie wiemy i wiedzieć nie będziemy, czy aksjomat wyboru i (uogólniona) hipoteza kontinuum zachodzą. Gödel, jako platonik (por. poniżej), był przekonany, iż istnieje obiektywna rzeczywistość obiektów matematyki, w której rozważane stwierdzenia mają jednoznacznie wyznaczoną wartość logiczną, tzn. są prawdziwe lub fałszywe. Głosił więc konieczność wzmocnienia aksjomatyki Zermela-Fraenkla o nowe aksjomaty (czyli o nowe własności zbiorów), które pozwolą rozstrzygnąć, która z tych dwu możliwości ma miejsce. Szukał tych nowych aksjomatów wśród zdań postulujących istnienie dużych liczb kardynalnych. Był też przekonany, że w platońskim uniwersum matematyki hipoteza kontinuum jest prawdziwa. Dodajmy, że jak dotąd nie udało się znaleźć aksjomatów, na które zgodziliby się specjaliści od teorii mnogości i które pozwoliłyby rozstrzygnąć rozważane zdania.

Oprócz tych wyżej opisanych głównych wyników i prac, Gödel napisał też i opublikował pewną liczbę prac, które nazwijmy pomniejszymi[14]. Otóż Gödel udowodnił m.in. twierdzenie, które nazywa się twierdzeniem typu *speed-up* ([6]). Głosi ono, że przejście do wyższych typów pozwala dowieść zdań nierozstrzygalnych w systemach niższego typu (np. pozwala dowieść niesprzeczności). Co więcej, istnieją formuły dowodliwe w systemach S_n i S_{n+1}, odpowiednio typu n i $n+1$, takie, że ich najkrótszy dowód w S_{n+1} jest znacznie krótszy niż najkrótszy dowód w S_n.

Gödel zajmował się również problemem rozstrzygalności, badał także logikę i arytmetykę intuicjonistyczną. W szczególności udowodnił, że nie można adekwatnie scharakteryzować logiki intuicjonistycznej za pomocą matryc skończenie wartościowych (czyli że logika intuicjonistyczna jest logiką nieskończenie wielowartościową) oraz pokazał interpretację arytmetyki klasycznej w arytmetyce intuicjonistycznej.

Uczestnicząc w seminarium Karla Mengera Gödel zajmował się też pewnymi technicznymi kwestiami związanymi z aksjomatyką geometrii rzutowej i różniczkowej. Opublikował swe wyniki w kilku krótkich notkach ogłoszonych w wydawanym przez Mengera czasopiśmie *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, które pomagał także redagować.

[14] Nie twierdzimy bynajmniej, że są one nieważne i że zawierają nieistotne wyniki, przeciwnie, są w nich wyniki ważne – chcemy je tylko odróżnić od opisanych wyżej najważniejszych prac Gödla.

Ostatnią ważną pracą Gödla z logiki i podstaw matematyki była opublikowana w roku 1958 (ale oparta na pomysłach z roku 1941) praca poświęcona tzw. interpretacji funkcjonałowej (zwanej, od miejsca publikacji tej pracy, interpretacją „Dialectica" – por. [10]).[15] Gödel rozszerzył tam pojęcie finitystyczności wprowadzając funkcjonały obliczalne skończonego typu i argumentując za ich konstruktywnością. Podał też interpretację funkcjonałową arytmetyki intuicjonistycznej Heytinga (a więc i klasycznej arytmetyki Peana). Później Ernst Specker rozszerzył tę interpretację do analizy. Wprowadzona przez Gödla metoda jest szeroko stosowana i używana.

Gödel interesował się – na co wskazywaliśmy już wyżej – także filozofią[16], w tym – choć nie tylko – filozofią matematyki (jak pisaliśmy wyżej, studiował na przykład dzieła Leibniza, w późniejszym okresie interesował się fenomenologią i pracami Husserla). Opublikował tylko dwie prace o treści filozoficznej, a mianowicie pracę o logice matematycznej Russella ([8]) i o hipotezie kontinuum Cantora ([9]).[17] Jego poglądy filozoficzne pozostawały w ścisłym związku z jego wynikami formalnymi w logice i podstawach matematyki. Zachodziła jednak także zależność odwrotna, tzn. jego poglądy filozoficzne stanowiły inspirację do badań formalnych.

Stanowisko filozoficzne Gödla można określić jako realizm, dokładniej: platonizm. Twierdził, że przedmioty matematyki istnieją realnie poza czasem i przestrzenią, niezależnie od poznającego podmiotu, aczkolwiek nigdzie nie wyjaśnił, czym one są i jak istnieją. Teza taka jest według niego niezbędna, by otrzymać zadowalający system matematyki, tak samo jak przyjęcie realnego istnienia obiektów fizycznych jest potrzebne do wyjaśnienia wrażeń zmysłowych. Mocno podkreślał też analogię między logiką i matematyką a naukami przyrodniczymi.

Obiekty matematyczne są według Gödla czymś różnym od swej reprezentacji w teoriach matematycznych, są w stosunku do nich transcendentne. Wynika to z ich obiektywnego istnienia. W odróżnieniu od Kanta, twierdził jednak, że podmiot poznający nie dodaje niczego do poznawanych obiektów.

Podstawowym źródłem wiedzy matematycznej jest intuicja. Wystarcza ona do wyjaśnienia i ugruntowania prostych pojęć i aksjomatów. Nie musi być jednak pojmowana jako dająca nam wiedzę matematyczną bezpośrednią. Dane intuicji mogą być rozwijane poprzez głębsze badanie obiektów,

---

[15] W roku 1972 miała się ukazać rozszerzona wersja tej pracy. Nie została ona jednak nigdy opublikowana za życia Gödla – w jego spuściźnie znaleziono jej odbitki szczotkowe.

[16] Źródłem jego zainteresowań filozofią były m.in. wykłady z historii filozofii profesora Heinricha Gomperza, których słuchał na Uniwersytecie w Wiedniu i które w późniejszym okresie wymieniał – obok wykładów Philipa Furtwänglera z teorii liczb – jako czynniki, które wywarły największy wpływ na niego.

[17] W spuściźnie Gödla znajdują się i inne jego prace poświęcone filozofii matematyki, opublikowane pośmiertnie w tomie III *Collected Works*.

które może doprowadzić do przyjęcia nowych stwierdzeń jako aksjomatów. Na skutek tego wiedza matematyczna nie jest tylko wynikiem biernej kontemplacji danych intuicyjnych, a jest rezultatem aktywności umysłu, która ma charakter dynamiczny i kumulatywny.

Założenia bardziej teoretyczne mogą być usprawiedliwione z zewnątrz, tzn. poprzez swoje konsekwencje (czyli przez to, że pozwalają rozwiązywać problemy dotąd nie rozwiązane, że pozwalają na wyciąganie różnych interesujących wniosków). Gödel ma tu na myśli konsekwencje zarówno w samej matematyce, jak i w fizyce. To oraz fakt, że istnieją hipotezy uzasadniane za pomocą środków pozaintuicyjnych, zewnętrznych w stosunku do matematyki, powoduje, że przestaje ona być wiedzą *a priori*.

Gödel interesował się nie tylko filozofią matematyki, ale zajmowały go także inne problemy filozoficzne, w szczególności problem istnienia Boga. Próbował za pomocą środków formalnych wykazać istnienie Absolutu. W roku 1970 pokazał swój dowód Dan Scottowi i dyskutował go z nim (sam dowód powstał więc przed rokiem 1970, w spuściźnie Gödla odkryto kilka wersji wcześniejszych). Ujawnienie dowodu Scottowi wiązać można z żywionymi naówczas przez Gödla obawami przed śmiercią. Nie chciał, by jego dowód zaginął. Z drugiej strony nie zgadzał się na jego opublikowanie. Jak wyjaśniał O. Morgensternowi, opublikowanie dowodu mogłoby spowodować, że zaczęto by sądzić, iż wierzy on w Boga, podczas gdy w rzeczywistości interesują go jedynie badania logiczne związane z problemem istnienia Boga.

Gödla dowód istnienia Boga powiązany jest z dowodem Leibniza (natomiast nie z dowodem ontologicznym Anzelma czy dowodem Kartezjusza). Należy tu podkreślić dwie sprawy: (1) Leibniz uważał, że dowód Kartezjusza jest niepełny, gdyż pokazał on tylko, że jeśli istnienie Boga jest możliwe, to Bóg istnieje, (2) według Leibniza dowód ontologiczny należy uzupełnić poprzez wykazanie, że istnienie Boga jest możliwe. Aby to pokazać, przyjął Leibniz, że Bóg jest to *Ens perfectissimum*, tzn. byt, którego atrybutami są wszystkie doskonałości, gdzie doskonałość rozumie się jako jakość prostą, czysto pozytywną.

Przytoczmy w skrócie rozumowanie Gödla: Niech $P(\varphi)$ oznacza, że φ jest własnością pozytywną, niech $\Box$ będzie funktorem konieczności (jest konieczne, że), a $\Diamond$ funktorem możliwości (jest możliwe, że).

Aksjomat 1: $P(\varphi) \wedge P(\psi) \rightarrow P(\varphi \wedge \psi)$ i tak dla dowolnej liczby składników.

Aksjomat 1°: $P(\varphi) \vee P(\neg\varphi)$.

Ponieważ chodzi tu o alternatywę rozłączną, więc:

Aksjomat 1*: $\neg(P(\varphi) \wedge P(\neg\varphi))$.

Definicja 1: $G(x) \leftrightarrow \forall\varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$, gdzie $G(x)$ znaczy: x jest Bogiem.

Definicja 2 (istota x'a): $\varphi Ess.x \leftrightarrow \forall\psi(\psi(x) \rightarrow \Box\forall y(\varphi(y) \rightarrow \psi(y)))$,

Aksjomat 2a: $P(\varphi) \to \Box P(\varphi)$,
Aksjomat 2b: $\neg P(\varphi) \to \Box\neg P(\varphi)$,
Twierdzenie 1: $G(x) \to GEss.x$,
Definicja 3 (istnienie konieczne): $E(x) \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi Ess.x \to \Box\exists y\varphi(y))$,
Aksjomat 3: $P(E)$,
Twierdzenie 2: $G(x) \to \Box\exists y G(y)$,
Aksjomat 4: $P(\varphi) \wedge \Box(\varphi \to \psi) \to P(\psi)$,
Twierdzenie 3: $\Diamond\exists x G(x)$.
Twierdzenie 4: $\Box x G(x)$.

Istnieje bogata literatura dotycząca tego dowodu. Dokładną jego analizę znaleźć można na przykład w [1]. Powiedzmy tu tylko, że w dowodzie tym stosuje się logikę modalną drugiego rzędu.

* * *

Zakończmy nasze rozważania o dziele Gödla i jego wkładzie do logiki i podstaw matematyki następującym spostrzeżeniem. Wszystkie udowodnione przez niego twierdzenia (było ich właściwie tylko kilka!) albo dawały początek nowej dyscyplinie, albo gruntownie zmieniały dyscyplinę już istniejącą. W szczególności dotyczy to teorii dowodu, teorii modeli, teorii rekursji, teorii mnogości i logiki intuicjonistycznej. Był więc chyba Gödel osobą, która wycisnęła największe piętno na logice i podstawach matematyki.

Literatura

[1] J. C z e r m a k, *Abriss des ontologischen Arguments*, w: [14], Band II, 309–324.
[2] K. G ö d e l, *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*, rozprawa doktorska, opublikowana wraz z tłumaczeniem angielskim 'On the completeness of the calculus of logic' w: [11], vol. I, 60–101.
[3] K. G ö d e l, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik **37** (1930), 349–360; przedruk wraz z tłumaczeniem angielskim 'The completeness of the axioms of the functional calculus of logic' w: [11], vol. I, 102–123.
[4] K. G ö d e l, *Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme. I*, Monatshefte für Mathematik und Physik **38** (1931), 173–198; przedruk wraz z tłumaczeniem angielskim 'On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems' w: [11], vol. I, 144–195.
[5] K. G ö d e l, *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems* (mimeographed lecture notes, taken by S.C. Kleene and J.B. Rosser), Princeton; przedruk z poprawkami w: M. Davis (Ed.) *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett, N.Y., 1965, 39–74; także w: [11], vol. I, 346–371.
[6] K. G ö d e l, *Über die Länge von Beweisen*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums **7** (1936), 23–24; przedruk wraz z tłumaczeniem angielskim 'On the length of proofs' w: [11], vol. I, 396–399.

[7] K. G ö d e l, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Annals of Mathematical Studies, No. 3, Princeton University Press, Princeton 1940.

[8] K. G ö d e l, *Russell's mathematical logic*, w: P.A. S c h i l p p (Ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University, Evanston, 123–153; przedruk w: [11], vol. II, 119–141.

[9] K. G ö d e l, *What is Cantor's continuum problem?*, The American Mathematical Monthly **54** (1947), 515–525. Wersja rozszerzona w: P. Benacerraf, H. Putnam (Eds.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, 258–273. Przedruk w: [11], vol. II, 176–187.

[10] K. G ö d e l, *Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes*, Dialectica **12** (1958), 280–287. Przedruk wraz z tłumaczeniem angielskim 'On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint' w: [11], vol. II, 240–251. Wersja rozszerzona i poprawiona, która miała się ukazać w roku 1972, została opublikowana w: [11], vol. II, 271–280.

[11] K. G ö d e l, *Collected Works*, vol. I–V, eds. Feferman S. *et al.*, Oxford University Press, New York and Oxford, 1986–2003.

[12] D. H i l b e r t, W. A c k e r m a n n, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Verlag von Julius Springer, Berlin 1928.

[13] D. H i l b e r t, P. B e r n a y s, *Grundlagen der Mathematik*, Bd. I 1934, Bd. II 1939, Springer Verlag, Berlin.

[14] E. K ö h l e r *et al.* (Eds.), *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbarkeit*, Bd. I–II, öbv et hpt VerlagsgmbH & Co. KG, Wien 2002.

[15] L. K i r b y, J. P a r i s, *Accessible independence results for Peano Arithmetic*, Bulletin of London Mathematical Society **14** (1982), 285–293.

[16] S. K r a j e w s k i, *Kurt Gödel i jego dzieło*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne **23**, nr 2 (1981), 161–187.

[17] S. K r a j e w s k i, *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa 2003.

[18] R. M u r a w s k i, *Matematyczna niezupełność arytmetyki*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne **26** (1984), 47–58.

[19] R. M u r a w s k i, *Gödel's incompleteness theorems and computer science*, Foundations of Science **2** (1997), 123–135.

[20] R. M u r a w s k i, *Undefinability of truth. The problem of the priority: Tarski vs. Gödel*, History and Philosophy of Logic **19** (1998), 153–160.

[21] R. M u r a w s k i, *Recursive Functions and Metamathematics. Problems of Completeness and Decidability, Gödel's Theorems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1999.

[22] R. M u r a w s k i, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, wydanie III, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2000.

[23] R. M u r a w s k i, *Kontekst historyczny i recepcja twierdzeń Gödla o niezupełności*, w: *Filozofia i logika*, red. J. Hartman, Aureus, Kraków 2000, 414–426.

[24] R. M u r a w s k i, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, wydanie II, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

[25] J. Paris, L. Harrington, *A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic*, w: J. Barwise (Ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1977, 1133–1142.

Roman Murawski
Wydział Matematyki i Informatyki UAM
ul. Umultowska 87
61–614 Poznań
e-mail: rmur@amu.edu.pl