ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLIV (2008)

Jarek Kędra (Aberdeen, Szczecin)

O symetrii*

1. Wstęp. W języku potocznym, symetria oznacza zazwyczaj odbicie względem prostej lub płaszczyzny. W szkole uczniowie poznają także symetrie środkowe oraz obroty. Ogólnie, symetrią nazywamy przekształcenie figury lub przestrzeni zachowujące pewne jej własności geometryczne, którymi mogą być tutaj odległość między punktami, miara kątów, pole, objętość i inne.

Symetrie można składać. To znaczy, że przekształcenie figury za pomocą jednej, a potem kolejnej symetrii także jest symetrią tej figury. Składanie symetrii jest *łączne*, tak jak mnożenie liczb rzeczywistych. Dla dowolnej symetrii istnieje symetria do niej *odwrotna*, to znaczy taka, że złożenie tych dwóch symetrii jest przekształceniem identycznościowym. Na zbiorze symetrii danej figury jest więc struktura algebraiczna, którą nazywamy *grupą*. O składaniu symetrii myślimy jak o mnożeniu. W odróżnieniu od mnożenia liczb, składanie symetrii *nie jest na ogół przemienne*, to znaczy, że kolejność składania ma znaczenie. Na przykład obrócenie monety w lewo o $90°$ i odwrócenie jej na druga stronę (odbicie względem poziomej prostej przechodzącej przez środek monety), to nie to samo co odwrócenie, a potem obrót.

Często zdarza się tak, że symetrii danej figury jest bardzo dużo i tworzą one interesującą przestrzeń. Na zbiorze symetrii mamy wiec zarówno strukturę grupy, jak i przestrzeni topologicznej. Są one zgodne, w tym sensie, że składanie symetrii oraz branie symetrii odwrotnej są operacjami ciągłymi. To znaczy, że symetrie tworzą *grupę topologiczną*.

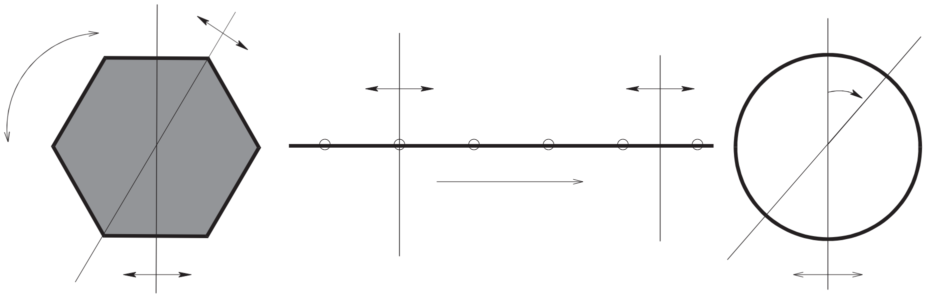
2. Symetrie wielokątów i sfery

2.1. *Symetrie wielokątów foremnych.* Grupa izometrii trójkąta równobocznego ma sześć elementów. Są to trzy symetrie osiowe i trzy obroty o kąty

* Referat wygłoszony na I Forum Matematyków Polskich w Gdańsku we wrześniu 2006 roku.

$0° =$ Identyczność, $120°$, $240°$. Ogólnie, grupa izometrii n-kąta foremnego ma $2n$ elementów; n odbić i n obrotów, z których jeden jest identycznością. Nazywamy ją *grupą dyhedralną*.

Popatrzmy teraz na oś liczbową z wyróżnionymi liczbami całkowitymi (wierzchołkami). Tutaj grupa izometrii ma nieskończenie wiele odbić (w wierzchołkach i środkach krawędzi) i nieskończenie wiele „obrotów" czyli przesunięć. Grupa ta nazywa się *nieskończoną grupą dyhedralną*.



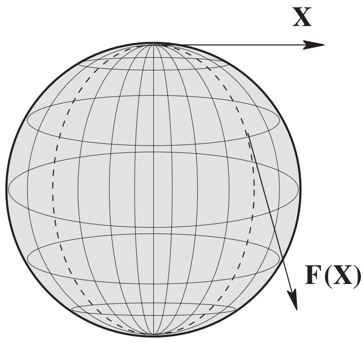
Rysunek 1: Symetrie wielokątów, osi liczbowej i okręgu

Pójdźmy dalej i rozważmy okrąg. Grupa izometrii ma continuum odbić i tyleż obrotów. Wygląda ona jak dwa okręgi, jeden tworzą obroty, a drugi przekształcenia będące złożeniami obrotu i odbicia.

Na powyższych przykładach widać jakościową różnicę: w pierwszych grupy symetrii są skończone lub nieskończone dyskretne (to znaczy, że są zbiorami izolowanych punktów), a w ostatnim jest ona nieskończona oraz ma nietrywialną topologię.

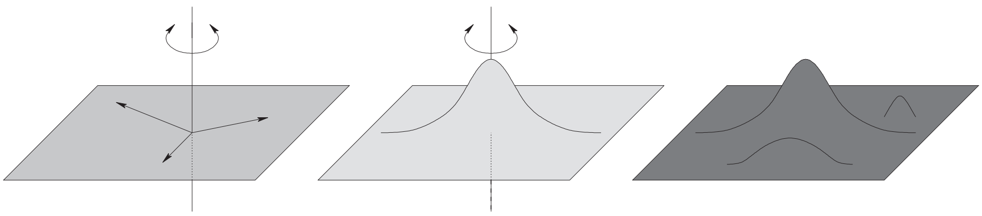
2.2. *Symetrie sfery.* Popatrzmy na grupę $\mathrm{Izo}_0(S^2)$ izometrii dwuwymiarowej sfery S^2 zachowujących orientację, tzn. takich, które nie wywracają sfery na lewą stronę, jak robi to np. odbicie w płaszczyźnie przechodzącej przez środek sfery. Takie izometrie to obroty sfery o różnych osiach. Założenie o zachowaniu orientacji jest tylko po to, by uprościć obraz bez utraty istoty rozumowania. Grupa $\mathrm{Izo}(S^2)$ wszystkich izometrii sfery to są dwie kopie grupy $\mathrm{Izo}_0(S^2)$ (ta druga, to obroty złożone z odbiciem w płaszczyźnie).

Wybierzmy jednostkowy wektor X styczny do sfery w biegunie północnym $p \in S^2$. Izometria F przeprowadza ten wektor na jednostkowy wektor styczny $F(X)$ do sfery w punkcie $F(p)$. W ten sposób otrzymujemy identyfikację grupy $\mathrm{Izo}_0(S^2)$ z przestrzenią jednostkowych wektorów stycznych do sfery. Zatem nasza grupa jest zwartą trójwymiarową przestrzenią o ciekawej topologii. Jest ona, jako grupa topologiczna, izomorficzna z grupą $SO(3)$ ortogonalnych przekształceń przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zachowujących orientację.



Rysunek 2: Symetrie sfery

2.3. *Jak zmiana geometrii zmienia symetrie.* Popatrzmy na następujący przykład. Grupa izometrii płaszczyzny składa się z obrotów, przesunięć, odbić i złożeń tychże. Topologicznie wygląda jak dwie kopie iloczynu kartezjańskiego okręgu (obroty) i płaszczyzny (przesunięcia). Mówiąc precyzyjnie, grupa izometrii płaszczyzny, to iloczyn półprosty $O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$, grupy obrotów i grupy przesunięć.



Rysunek 3: Symetrie różnych geometrii płaszczyzny

Zmieńmy teraz geometrię płaszczyzny tak, aby w środku było obrotowo symetryczne wzniesienie. Wówczas przesunięcia nie są już izometriami. Grupa symetrii takiej płaszczyzny, z górką w środku, to $O(2)$ czyli topologicznie dwa okręgi. Komplikując dalej geometrię otrzymujemy powykrzywianą płaszczyznę, której grupa izometrii jest trywialna.

Badanie geometrii przestrzeni oraz grupy przekształceń, tej geometrii odpowiadających, są ze sobą ściśle związane. Jest to związek symbiotyczny, to znaczy, informacje o geometrii przestrzeni otrzymuje się ze struktury grupy jej symetrii i odwrotnie, własności grupy można poznać patrząc na geometrię przestrzeni, na której ta grupa działa.

3. Różne struktury geometryczne i ich symetrie

3.1. *Struktura metryczna.* Grupa izometrii zwartej rozmaitości Riemanna jest zawsze zwartą grupą Liego, najczęściej trywialną. Można to zobaczyć tak: niech (M, g) oznacza naszą rozmaitość riemannowską; wybierzmy punkt $p \in M$ i bazę B_p wektorów ortonormalnych stycznych do M w tym punkcie; wszystkie takie pary tworzą tzw. *wiązkę reperów ortonormalnych* P nad rozmaitością M.

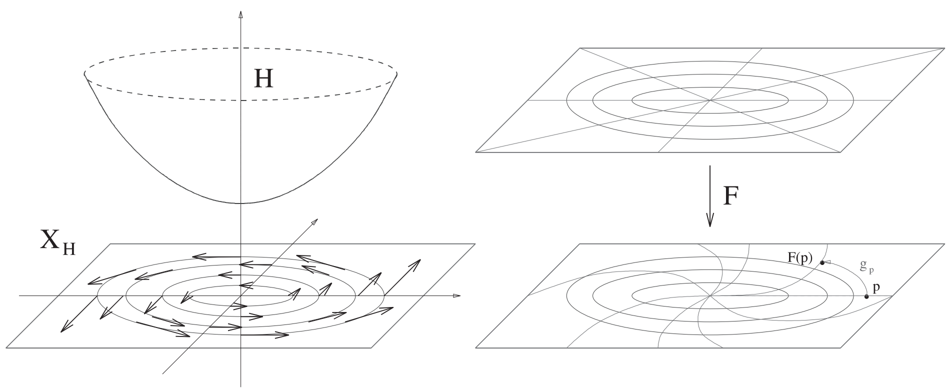
Odwzorowanie *ewaluacji*, które izometrii ψ przypisuje obraz reperu B_p względem ψ, jest ciągłym włożeniem grupy izometrii rozmaitości (M, g) w jej wiązkę reperów

$$ew : \mathrm{Izo}(M, g) \hookrightarrow P.$$

Zatem, nasza grupa izometrii jest homeomorficzna z domkniętym podzbiorem zwartej przestrzeni, a więc jest zwarta. Wykazanie, że jest grupą Liego jest trudniejsze. Zauważmy, że szczególny przypadek powyższego rozumowania mieliśmy na przykładzie sfery (2.2). To, że grupa izometrii jest zazwyczaj trywialna, widzimy podobnie jak w przykładzie 2.3, gdzie komplikowaliśmy geometrię płaszczyzny.

Założenie zwartości jest istotne, bo jak widzieliśmy wyżej, izometrie płaszczyzny nie są grupą zwartą, gdyż zawierają wszystkie przesunięcia.

3.2. *Pole.* Rozważmy wszystkie przekształcenia płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, które zachowują pole. Grupa takich symetrii jest nieskończeniewymiarowa. Można to zobaczyć tak: każdej funkcji $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ odpowiada przekształcenie zachowujące pola figur, czyli, że wymiar przestrzeni takich symetrii jest co najmniej taki, jak wymiar przestrzeni funkcji określonych na płaszczyźnie, a więc nieskończony.



Rysunek 4: Dyfeomorfizm hamiltonowski

Funkcja H wyznacza pole wektorowe X_H na płaszczyźnie, określone wzorem $X_H(p) = [\frac{\partial H}{\partial y}(p), -\frac{\partial H}{\partial x}(p)]$. Wektory tego pola są styczne do poziomic funkcji H, a ich długość jest proporcjonalna do szybkości jej wzrostu. Niech $g_p : \mathbb{R} \to M$ będzie krzywą całkową pola X_H zaczynającą się w punkcie

$p \in \mathbb{R}^2$. To znaczy, że $g_p(0) = p$ oraz $\frac{d}{dt} g_p(t) = X_H(g_p(t))$. Określmy teraz przeształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $F(p) := g_p(1)$.

Można wykazać (patrz 3.5 poniżej), że F zachowuje pole, oraz że przekształcenia tej postaci tworzą grupę nieskończenie wymiarową. Tak skonstruowane przekształcenie F nazywa się *dyfeomorfizmem hamiltonowskim*, a funkcja H *hamiltonianem*.

3.3. *Objętość.* Niech (M, vol) oznacza rozmaitość gładką wraz z formą objętości. W przypadku dwuwymiarowym oznacza to, że możemy mierzyć pola figur. Podobnie jak w przypadku pola, tak i tutaj, grupa $\mathrm{Diff}(M, \mathrm{vol})$ dyfeomorfizmów zachowujących objętość jest nieskończenie wymiarową grupą Liego, której algebrę Liego tworzą pola wektorowe zachowujące formę objętości.

Złożoność tej grupy można sobie wyobrazić mieszając herbate w szklance. Ruch herbaty jest opisany przez rodzinę dyfeomorfizmów zachowujących objętość (zakładamy nieściśliwość cieczy). Możemy to skontrastować z grupą izometrii, którą wyobrażamy sobie jako obracanie szklanką z zamarzniętą herbatą.

Składowa spójności $\mathrm{Diff}_0(M, \mathrm{vol})$ grupy $\mathrm{Diff}(M, \mathrm{vol})$ zawierająca identyczność jest grupą prostą. To znaczy, że nie zawiera właściwych podgrup normalnych. Jest to (trudne) twierdzenie Thurstona [2, Twierdzenie 5.1.3] z lat siedemdziesiątych XX wieku.

Topologia tych grup jest bardzo słabo znana. Twierdzenie Mosera [11] mówi, że włożenie grupy $\mathrm{Diff}_0(M, \mathrm{vol})$ w składową identyczności wszystkich dyfeomorfizmów jest homotopijną równoważnością. Poniżej przedstawiamy twierdzenie, które opisuje typy homotopii pewnych grupy dyfeomorfizmów.

TWIERDZENIE 3.4.
(*1*) $\mathrm{Diff}(S^2) \simeq \mathrm{Izo}(S^2) \cong O(3)$;
(*2*) $\mathrm{Diff}(T^2) \simeq SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes T^2$;
(*3*) *Jeśli* Σ *jest powierzchnią rodzaju większego od jeden*, *to* $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ *jest ściągalna*;
(*4*) $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq O(4)$.

Grupa ilorazowa $\mathrm{Diff}(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$, zwana *grupą klas odwzorowań* jest intensywnie badana i wiele o niej już wiadomo [5].

3.5. *Struktura symplektyczna. Struktura symplektyczna* ω na rozmaitości M, to zamknięta i niezdegenerowana 2-forma różniczkowa. Z niezdegenerowania wynika, że rozmaitość M jest parzystowymiarowa, oraz że istnieje izomorfizm między przestrzenią pól wektorowych i przestrzenią 1-form różniczkowych zadany wzorem $X \mapsto \iota_X \omega$.

Mówiąc bardziej obrazowo, struktura symplektyczna mierzy zorientowane pole dwuwymiarowych figur w rozmaitości M. Jeśli M jest powierzchnią, to struktura symplektyczna jest po prostu zorientowanym polem powierzchni.

Grupa symetrii rozmaitości symplektycznej jest zawsze (za wyjątkiem rozmaitości 0-wymiarowej) nieskończenie wymiarową grupą topologiczną. Wykazuje się to tak: funkcji (hamiltonianowi) $H : M \to \mathbb{R}$ przypisuje się pole wektorowe X_H takie, że $\iota_{X_H}\omega = dH$. Następujący krótki rachunek:

$$L_{X_H}\omega = d\iota_{X_H}\omega + \iota_{X_H}d\omega = ddH + 0 = 0$$

pokazuje, że potok $\psi_H : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ pola X_H zachowuje formę symplektyczną. Ostatecznie, grupa symplektycznych dyfeomorfizmów rozmaitości (M, ω) jest nieskończenie wymiarową grupą Liego, której algebra Liego jest przestrzenią pól wektorowych na M zachowujących formę symplektyczną.

Nie wszystkie przekształcenia zachowujące formę symplektyczną są tej postaci. Te opisane powyżej, to tzw. *dyfeomorfizmy hamiltonowskie* i tworzą one spójną podgrupę normalną $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ w grupie $\mathrm{Symp}_0(M, \omega)$. Banyaga [2] udowodnił, że dla zamkniętej rozmaitości symplektycznej (M, ω), grupa $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ hamiltonowskich dyfeomorfizmów jest prosta.

Przedstawimy teraz kilka rezultatów dotyczących topologii grup symplektycznych dyfeomorfizmów. Niech ω_λ będzie formą symplektyczną na $S^2 \times S^2$ taką, że $S^2 \times \{p\}$ ma pole równe 1 (czyli $\int_{S^2\times\{p\}} \omega = 1$), a $\{p\} \times S^2$ ma pole $\lambda \geq 1$ (czyli $\int_{\{p\}\times S^2} \omega = \lambda$) dla dowolnego punktu $p \in S^2$. Każda forma symplektyczna na $S^2 \times S^2$ jest równoważna powyższej (Twierdzenie 13.42 w [9]). To znaczy, że jeśli ω jest formą symplektyczną na $S^2 \times S^2$, to istnieje dyfeomoerfizm $f : S^2 \times S^2 \to S^2 \times S^2$ taki, że $f^*\omega = k \cdot \omega_\lambda$ dla pewnej stałej $r \in \mathbb{R}$.

TWIERDZENIE 3.6.
(*1*) $\mathrm{Symp}(S^2 \times S^2, \omega_1) \simeq \mathbb{Z}/2 \ltimes SO(3) \times SO(3)$ (Gromov [4]); *czyli grupa symplektomorfizmów produktu sfer o równych polach jest iloczynem półprostym grup*, *gdzie* $\mathbb{Z}/2$ *działa na* $SO(3)\times SO(3)$ *zamieniając czynniki.*
(*2*) $\mathrm{Symp}(\mathbb{CP}^2) \simeq PU(3)$ (Gromov [4]); *tutaj zespolona płaszczyzna rzutowa jest wyposażona w standardową formę symplektyczną.*
(*3*) $H^*(\mathrm{Symp}(S^2 \times S^2, \omega_\lambda); \mathbb{Q}) \cong \Lambda(a, x, y) \otimes \mathbb{Q}[w]$, *gdzie* $\deg(a) = 1$, $\deg(x) = \deg(y) = 3$ *oraz* $\deg(w) = 4\lfloor\lambda\rfloor$, (Abreu-McDuff [1]) $\Lambda(a, x, y)$ *oznacza algebrę zewnętrzną* (*nad* $\mathbb{Q}$) *generowaną przez elementy* a, x, y, *natomiast* $\mathbb{Q}[w]$ *oznacza algebrę wielomianów.*

3.7. *Zależności między różnymi strukturami.* Rozważmy rozmaitość M, na której jest kilka zgodnych struktur geometrycznych. Zgodność oznacza, że zachodzą zawierania między odpowiednimi grupami symetrii. Na przykład, weźmy sferę S^2 i na niej standardową metrykę g, strukturę symplektyczną (czyli w tym przypadku pole), strukturę gładką i topologiczną. Mamy wówczas ciąg podgrup:

$$\mathrm{Izo}_0(S^2) \subset \mathrm{Symp}(S^2) \subset \mathrm{Diff}(S^2) \subset \mathrm{Homeo}(S^2) \subset \mathrm{HE}(S^2),$$

gdzie Homeo(S^2) jest grupą homeomorfizmów, a HE(S^2) topologicznym monoidem (nie każdy element ma odwrotny) homotopijnych równoważności.

W Twierdzeniu 3.4 widzieliśmy, że włożenie grupy izometrii sfery S^2 lub S^3 w grupę wszystkich dyfeomorfizmów jest homotopijną równoważnością. Oznacza to, że dowolny dyfeomorfizm (a nawet rodzinę) można w sposób ciągły „wyprostować" do izometrii. Twierdzenie Mostowa [12] mówi, że każdą homotopijną równoważność hiperbolicznej rozmaitości (M, g) (wymiaru co najmniej 3) można zdeformować do izometrii. Jak zobaczymy w Paragrafie 4.2, dla pewnych rozmaitości symplektycznych, włożenie grupy izometrii w grupę symplektycznych dyfeomorfizmów indukuje włożenie na grupach wymiernych homotopii.

Z drugiej strony mamy przykład włożenia

$$\mathrm{Symp}(\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m) \hookrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m),$$

który, jak udowodnił Seidel [14], nie indukuje na grupach homotopii ani injekcji, ani surjekcji.

Podobną kwestię porusza się w pytaniu, czy dla dowolnej zamkniętej asferycznej rozmaitości M włożenie Homeo(M) $\to$ HE(M) indukuje surjekcje na π_0 (grupach składowych spójności)? Innymi słowy, czy dowolną homotopijną równoważność asferycznej rozmaitości można w sposób ciągły poprawić do homeomorfizmu? Jest to szczególny przypadek tzw. *hipotezy Borela.*

4. Sposoby badania topologii grup dyfeomorfizmów

4.1. *Przestrzeń klasyfikująca.* Niech $\mathcal{G}$ będzie grupą topologiczną. Istnieje ściągalna przestrzeń $E\mathcal{G}$, na której grupa $\mathcal{G}$ działa w sposób wolny. Przestrzeń ilorazowa $B\mathcal{G} := E\mathcal{G}/\mathcal{G}$ nazywa się *przestrzenią klasyfikującą* grupy $\mathcal{G}$. Nazwa pochodzi stąd, że klasy izomorfizmu wiązek $M \to E \to B$ z grupą strukturalną $\mathcal{G}$ i włóknem M są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z klasami homotopii odwzorowań $B \to B\mathcal{G}$. Badanie topologii $B\mathcal{G}$, to badanie topologii wiązek z włóknem M i grupą strukturalną $\mathcal{G}$.

Przestrzenie klasyfikujące wyglądają różnie. Przestrzenią klasyfikującą dla grupy $\mathbb{Z}^2$ jest dwuwymiarowy torus, gdyż $\mathbb{Z}^2$ działa w sposób wolny na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, która jest ściągalna. Popatrzmy teraz na grupę S^1 liczb zespolonych o module 1. Działa ona w sposób wolny na nieparzystowymiarowych sferach $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ przez mnożenie zespolone. Ilorazem jest tutaj zespolona przestrzeń rzutowa $\mathbb{CP}^n$. Sfery nie są ściągalne, ale biorąc ich granicę $S^3 \subset S^5 \subset \ldots \subset S^\infty$ dostajemy wolne działanie grupy S^1 na ściągalnej nieskończenie wymiarowej sferze. Ilorazem jest nieskończenie wymiarowa zespolona przestrzeń rzutowa $\mathbb{CP}^\infty$ i to jest właśnie przestrzeń klasyfikująca BS^1.

Związek między topologią grupy $\mathcal{G}$, a przestrzenią $B\mathcal{G}$ jest na poziomie grup homotopii, gdzie zachodzą izomorfizmy

$$\pi_k(\mathcal{G}) \cong \pi_{k+1}(B\mathcal{G}).$$

Zatem z punktu widzenia grup homotopii, badanie przestrzeni klasyfikującej jest tak samo wartościowe jak badanie grupy. Sytuacja jest inna dla pierścienia kohomologii. Kohomologie grupy topologicznej są zawsze, na mocy twierdzenia Hopfa, algebrą wolną. Z drugiej strony, jak wykazał Milnor [10], każda „rozsądna” przestrzeń (np. CW-kompleks) jest przestrzenią klasyfikującą dla pewnej grupy topologicznej.

4.2. *Działania zwartych grup Liego.* Grupy homotopii i pierścień kohomologii zwartej grupy Liego G oraz jej przestrzeni klasyfikującej są (z dokładnością do torsji) znane i nietrudne do wyliczenia. Mając homomorfizm $G \to \mathcal{G}$ zwartej grupy Liego do grupy topologicznej, o której chcemy się czegoś dowiedzieć, pytamy co indukuje on na grupach homotopii i pierścieniu kohomologii. Zauważmy, że gdy $\mathcal{G}$ jest grupą dyfeomorfizmów rozmaitości gładkiej, to jest to pytanie które stawialiśmy w Rozdziale 3.7, gdyż zwarta grupa Liego zawsze działa przez izometrie względem pewnej metryki riemannowskiej.

TWIERDZENIE 4.3 ([Reznikov [13]). *Działanie* $\Psi{:}SU(n+1) \to \mathrm{Symp}_0(\mathbb{CP}^n)$ *indukuje włożenie na wymiernych grupach homotopii.*

D o w ó d. Niech $\mathbb{CP}^n \to E \to \mathbb{S}^{2k}$, gdzie $k > 1$, będzie $SU(n+1)$-wiązką, której odwzorowanie klasyfikujące reprezentuje niezerowy element $\alpha \in \pi_{2k}(BSU(n+1)) \otimes \mathbb{Q}$. Wykażemy, że $B\Psi_*[\alpha] \neq 0$ w $\pi_{2k}(\mathrm{BSymp}_0(\mathbb{CP}^n))$ $\otimes\, \mathbb{Q}$. Popatrzmy na poniższy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{CP}^n_{\mathrm{Symp}} \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\big\downarrow \\ \mathbb{S}^{2k} & \xrightarrow{B\Psi\circ\alpha} & \mathrm{BSymp}_0(\mathbb{CP}^n) \end{array}$$

Niech $\Omega \in H^2(\mathbb{CP}^n_{\mathrm{Symp}})$ będzie klasą sprzęgającą, czyli taką klasą, która cofa się do klasy formy symplektycznej na włóknach i całka po włóknie $\pi_!(\Omega^{n+1}) = 0$.

Przypomnijmy, że (dla orientowalnej wiązki $F \to E \xrightarrow{f} B$ ze zwartym włóknem) całka po włóknie $f_! : H^*(E) \to H^{*-\dim F}(B)$, to pewien homomorfizm spełniający $f_!(a \cup f^*(b)) = f_!(a) \cup b$. Definicję i własności można znaleźć w książce Botta i Tu [3].

Klasa Ω cofa się nietrywialnie do $H^2(E)$, gdyż po obcięciu do włókien musi dalej reprezentować klasę formy symplektycznej. Cofnięcie to, które dalej będziemy oznaczać także przez Ω, jest generatorem $H^2(E) = \mathbb{Q}$ (bo

$\dim H^2(E) = 1$, gdyż baza jest co najmniej 4-wymiarowa). Zatem na mocy twierdzenia Leray'a-Hirscha otrzymujemy, że dla niezerowej stałej $C \in \mathbb{R}$

$$\Omega^{n+k} = C \cdot \Omega^n \cup p^*(\sigma) \neq 0.$$

Powyższa klasa jest niezerowa, bo prawa strona jest klasą formy objętości na E. Ostatecznie, na mocy naturalności całkowania po włóknie, mamy

$$0 \neq \left\langle p_!(\Omega^{n+k}), [\mathbb{S}^{2k}] \right\rangle = \left\langle \pi_!(\Omega^{n+k}), (B\Psi \circ \alpha)_*[\mathbb{S}^{2k}] \right\rangle .$$

Czyli złożenie $B\Psi \circ (\alpha)$ jest homotopijnie nietrywialne, co dowodzi niezerowości klasy $B\Psi_*[\alpha]$. □

Przedstawiony powyżej dowód pochodzi z pracy Kędra-McDuff [6], gdzie udowodniono twierdzenie Reznikova dla rozmaitości uogólnionych flag.

4.4. *Działanie na ściągalnej przestrzeni.* Niech (M, ω) będzie rozmaitością symplektyczną. Niezdegenerowanie formy symplektycznej implikuje redukcję grupy strukturalnej wiązki stycznej TM do grupy $Sp(2n; \mathbb{R})$ macierzy zachowujących liniową formę symplektyczną. Maksymalną podgrupą zwartą w $Sp(2n; \mathbb{R})$ jest grupa $U(n)$ zespolonych macierzy unitarnych. Każda redukcja grupy strukturalnej z $Sp(2n; \mathbb{R})$ do $U(n)$ wyznacza strukturę prawie zespoloną J na (M, ω) i przestrzeń $\mathcal{J}(M, \omega)$ takich struktur jest ściągalna. Ostatnie stwierdzenie wynika z faktu, że powyższa redukcja, to cięcie wiązki stowarzyszonej z wiązką styczną ze ściągalnym włóknem $Sp(2n; \mathbb{R})/U(n)$.

Grupa $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ symplektycznych dyfeomorfizmów działa na przestrzeni $\mathcal{J}(M, \omega)$. Łatwo stwierdzić, że podgrupy izotropii są zwarte. Wynika to stąd, że struktura symplektyczna ω i zgodna z nią struktura prawie zespolona J określają metrykę riemannowską g na M. Zatem podgrupa izotropii $\mathrm{Symp}(M, \omega)_J$ jest grupą izometrii metryki g, a stąd, na mocy 3.1, jest zwartą grupą Liego.

Badając powyższe działanie, Gromov, a później Abreu i McDuff udowodnili Twierdzenie 3.6.

4.5. *Rozwłóknienie ewaluacji.* Niech grupa $\mathcal{G}$ działa na rozmaitości M i $ew : \mathcal{G} \quad M$ będzie odwzorowaniem ewaluacji, tzn. $ew(\psi) := \psi(p)$, gdzie $p \in M$ jest ustalonym na początku punktem. Dostajemy w ten sposób rozwłóknienie

$$\mathcal{G}_p \xrightarrow{i} \mathcal{G} \xrightarrow{ew} M,$$

które nazywamy *rozwłóknieniem ewaluacji.*

Ważną własnością ewaluacji jest to, że obraz odwzorowania indukowanego na wymiernych homotopiach jest mały. Bardziej precyzyjnie, jeśli M jest jednospójna, to

$$\dim ew_*(\pi_*(\mathcal{G}) \otimes \mathbb{Q}) \leq \dim M = n.$$

Wynika stąd, że wymiar wymiernej grupy homotopii $\pi_*(\mathcal{G}_p) \otimes \mathbb{Q}$ jest z dokładnością do n, co najmniej taki, jak $\dim \pi_*(M) \otimes \mathbb{Q}$. Poniższe twierdzenie kontrastuje z Twierdzeniem 3.6, w którym pierścień kohomologii grupy symplektomorfizmów był skończenie generowany.

Twierdzenie 4.6 (Kędra [7]). *Pierścień* $H^*(\mathrm{Symp}(\mathbb{CP}^2\#3\overline{\mathbb{CP}}^2);\mathbb{Q})$ *jest nieskończenie generowany.*

Dowód. Dowód składa się z dwóch kroków. Pierwszy z nich, to zauważenie, że grupa symplektycznych dyfeomorfizmów rozdmuchania $M\#\overline{\mathbb{C}}\mathbb{P}^2$ jest słabo homotopijnie równoważna z grupą $\mathrm{Symp}(M,p)$ symplektycznych dyfeomorfizmów (M,ω) zachowujących punkt $p \in M$. Nie wiadomo w jakiej ogólności jest to prawda, ale Lalonde i Pinsonnault [8] wykazali to dla rozmaitości, w których dla dowolnej zgodnej struktury prawie zespolonej J dywizor wyjątkowy jest reprezentowany przez J-holomorficzną włożoną sferę. To jest dość duża klasa czterowymiarowych rozmaitości symplektycznych.

Drugi krok, to znalezienie takiej jednospójnej rozmaitości symlektycznej (M,ω), dla której wymiar jej wymiernych grup homotopii jest nieskończony, $\dim \pi_*(M) \otimes \mathbb{Q} = \infty$. Wtedy, na mocy faktu opisanego przed twierdzeniem i tego co mamy powyżej, wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}\dim \pi_*(\mathrm{Symp}(M\#\overline{\mathbb{C}}\mathbb{P}^2)) \otimes \mathbb{Q} &= \dim \pi_*(\mathrm{Symp}(M,p)) \otimes \mathbb{Q} \\ &= \dim \pi_*(M) = \infty.\end{aligned}$$

Większość rozmaitości ma nieskończenie wymiarowe wymierne homotopie. Mówiąc precyzyjniej, każda czterowymiarowa jednospójna rozmaitość M, której wymiar $\dim H^2(M;\mathbb{Q}) \geq 3$, ma tę własność. Oczywiście, $\mathbb{CP}^2\#2\overline{\mathbb{C}}\mathbb{P}^2$ jest taką rozmaitością.

Teraz pozostaje wykorzystać znany fakt, który mówi, że pierścień wymiernych kohomologii grupy topologicznej $\mathcal{G}$ jest generowany przez bazę wymiernej grupy homotopii $\pi_*(\mathcal{G}) \otimes \mathbb{Q}$. To kończy dowód. $\square$

Powyższe twierdzenie jest prawdziwe dla dość szerokiej klasy czterowymiarowych rozmaitości symplektycznych. Tutaj rozpatrujemy szczególny przypadek, aby nie podawać wymagających wyjaśnienia założeń.

Podziękowania. Dziękuję organizatorom I Forum Matematyków za zaproszenie do wygłoszenia referatu plenarnego oraz mojej żonie Kasi za uwagi dotyczące tekstu.

Literatura

[1] Miguel Abreu and Dusa McDuff, *Topology of symplectomorphism groups of rational ruled surfaces*, J. Amer. Math. Soc., **13** (2000), 971–1009.

[2] Augustin Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, **400**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1997).

[3] Raoul B o t t and Loring W. T u, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, **82**, Springer-Verlag, New York, (1982).
[4] M. G r o m o v, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds,* Invent. Math., **82** (1985), 307–347.
[5] Nikolai V. I v a n o v, *Mapping class groups*, w *Handbook of Geometric Topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.
[6] Jarek K ę d r a and Dusa M c D u f f, *Homotopy properties of Hamiltonian group actions*, Geom. Topol., **9** (2005), 121–162.
[7] Jarosław K ę d r a, *Evaluation fibrations and topology of symplectomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 305–312.
[8] François L a l o n d e and Martin P i n s o n n a u l t, *The topology of the space of symplectic balls in rational 4-manifolds*, Duke Math. J., **122** (2004), 347–397.
[9] Dusa M c D u f f and Dietmar S a l a m o n, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.
[10] John M i l n o r, *Construction of universal bundles. I*, Ann. of Math., **63** (1956), 272–284.
[11] Jürgen M o s e r, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., **120** (1960), 286–294.
[12] G. D. M o s t o w, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Annals of Mathematics Studies, **78** (1973).
[13] Alexander G. R e z n i k o v, *Characteristic classes in symplectic topology*, Selecta Math. (N.S.), **3** (1997), 601–642.
[14] Paul S e i d e l, *On the group of symplectic automorphisms of* $\mathbf{C}\mathrm{P}^m \times \mathbf{C}\mathrm{P}^n$, w *Northern California Symplectic Geometry Seminar*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **196**, 237–250. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

Summary

The present paper is a survey on the topology of diffeomomorphism groups of smooth manifolds. We start with a very mild introduction of the concept of symmetry. We show that symmetries of a space form a topological group.

We present some classical results about the topology of diffeomorphism groups of surfaces and four dimensional symplectic manifolds. Then we survey on author's results about the topology of symplectic diffeomorphisms, Hamiltonian actions of compact Lie groups and characteristic classes.

Jarek Kędra

Mathematical Sciences
University of Aberdeen
Meston Building
AB243UE Aberdeen
Scotland, UK

Instytut Matematyki
Uniwersytet Szczeciński
ul. Wielkopolska 15
70-451 Szczecin
Poland

e-mail: kedra@maths.abdn.ac.uk