ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXV (1999)

Henryk Kotlarski (Siedlce, Warszawa)

O problemie miary, czyli kłopoty z matematyką

Wiele lat temu zostałem zapytany (przez przypadkowo spotkanych studentów matematyki), czy istnieje miara określona dla *wszystkich* podzbiorów prostej liczbowej. Odpowiedziałem coś w stylu takim: „miar niezmienniczych nie ma, natomiast jeśli nie zakładać niezmienniczości, to odpowiedź jest równoniesprzeczna z istnieniem liczby kardynalnej mierzalnej, więc nie da się udowodnić w teorii mnogości, chyba że ta jest sprzeczna". Odpowiedź taka (udzielona w czasie zachodu słońca w jednej z tatrzańskich dolin) była zwięzła, prawdziwa, ale oczywiście nie do zrozumienia dla niespecjalisty. Poniżej omówię te zagadnienia bardziej szczegółowo, z nadzieją, że zainteresuje to tych Czytelników, którzy mają ochotę przeczytać coś raczej dziwnego. Referowane tu rezultaty w żadnym sensie nie są nowe, wszystko co opisuję dalej jest doskonale znane od wielu lat w świecie specjalistów z podstaw matematyki.

Ustalmy terminologię. Niech X będzie dowolnym zbiorem i niech $\mathcal{B}$ będzie σ-ciałem podzbiorów zbioru X. *Miarą w algebrze* $\mathcal{B}$ nazywamy nieujemną funkcję μ określoną na $\mathcal{B}$, przyjmującą wartości w $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, nierówną tożsamościowo 0 ani ∞ i σ-addytywną, tzn. taką, że

dla dowolnego ciągu $A_n : n \in \mathbb{N}$ parami rozłącznych elementów ciała $\mathcal{B}$,

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Nas będzie interesowało zagadnienie istnienia miar *nietrywialnych*, tzn. takich, że $\mu(\{x\}) = 0$ dla każdego jednopunktowego zbioru $\{x\}$, określonych na algebrze *wszystkich* podzbiorów zbioru X i przyjmujących choć jedną wartość skończoną dodatnią.

W teorii całki wprowadza się miarę Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$ i przestrzeniach pokrewnych. Miara Lebesgue'a ma dodatkową własność *niezmienniczości.* Niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Wtedy mamy: jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ powstaje z B przez przesunięcie i $A \in \mathcal{B}$ to $B \in \mathcal{B}$ i $\mu(B) = \mu(A)$. Natomiast miara ta nie jest określona na wszystkich podzbiorach prostej liczbowej, przynajmniej jeśli się zakłada aksjomat wyboru. Konstrukcja miary Lebesgue'a umożliwia konstrukcję *całki Lebesgue'a*, która jest o tyle lepsza od zwykłej całki Riemanna, że uzyskuje się twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki, tj. postaci „jeśli $f_n \to f$ to $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$" przy dużo słabszych założeniach na temat zbieżności ciągu f_n do f niż w przypadku całki Riemanna.

Przeformułujmy pytanie na takie: „czy jest prawdą, że istnieje nietrywialna miara, określona dla wszystkich podzbiorów prostej?" Na temat tego zagadnienia udowodniono wiele twierdzeń, z których wynika, że nie wiemy i chyba nigdy nie będziemy wiedzieli jak jest. Jak zobaczymy, główny problem polega na pojęciu *prawdy.*

Zauważmy, że ponieważ nie żądamy niezmienniczości, istnienie takiej miary nie ma nic wspólnego ze szczególnymi własnościami zbioru liczb rzeczywistych, to tylko kwestia mocy. Przyjmijmy następującą definicję. Liczbę kardynalną α nazywamy $\mathbb{R}$-*mierzalną*, jeśli na dowolnym zbiorze X mocy α istnieje nietrywialna miara, określona dla wszystkich podzbiorów X. Wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie. Liczba kardynalna α jest 2-*mierzalna*, jeśli istnieje miara jak wyżej, ale o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$. W literaturze zamiast „2-mierzalna" używa się terminu „mierzalna".

Zanim zreferuję znane dziś twierdzenia o liczbach mierzalnych i $\mathbb{R}$-mierzalnych, opowiem trochę o historii tzw. podstaw matematyki.

W drugiej połowie ubiegłego stulecia Georg Cantor zajmował się następującym zagadnieniem. Niech f będzie funkcją określoną na odcinku $\langle 0, 2\pi\rangle$ i niech

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt \tag{1}$$

będą wzorami na współczynniki szeregu Fouriera

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

funkcji f.

Szeregi Fouriera były bardzo intensywnie badane, gdyż służą do opisu wielu procesów fizycznych. Właściwie wszystkie zjawiska odwracalne, np. procesy falowe i niektóre zjawiska nieodwracalne, np. rozchodzenie się ciepła, są opisywane za pomocą funkcji wyrażających się w naturalny sposób (z punktu widzenia naszych metod opisu zjawiska) w postaci szeregów Fouriera.

W oczywisty sposób prawe strony wzorów (1) nie zmienią się, jeśli zmienimy funkcję f na małym zbiorze, np. jednopunktowym. Dla jakich jeszcze zbiorów tak jest? Aby uzyskać odpowiedź, Cantor odczuł potrzebę klasyfikacji zbiorów, w szczególności chciał zrozumieć, które zbiory $E \subseteq \langle 0, 2\pi\rangle$ są na tyle małe, by zmiana funkcji f na E nie powodowała zmiany współczynników Fouriera funkcji f. Stworzył w tym celu podwaliny teorii mnogości i topologii ogólnej oraz wydzielił pojęcia, z niejasnej wcześniej intuicji, ciągłego continuum. Następnie poświęcił się całkowicie teorii mnogości, badając zbiory w najogólniejszej sytuacji, nie tylko podzbiory prostej czy odcinka.

Wkrótce się okazało, że w teorii mnogości można odtworzyć całą matematykę. Stosunkowo najtrudniejszym krokiem jest konstrukcja liczb naturalnych. W sposób naprawdę zadowalający (ale mało intuicyjny) zostało to zrobione dopiero przez J. von Neumanna w latach dwudziestych naszego stulecia (por. Kuratowski, Mostowski [7], §7.9). Dalsze kroki, tj. konstrukcje (po kolei) liczb całkowitych z naturalnych, wymiernych z całkowitych, rzeczywistych z wymiernych, a potem przejście do produktów $\mathbb{R}^m$ itd. są (z dzisiejszego punktu widzenia) dość standardowymi konstrukcjami algebraicznymi. Z tego, że w teorii mnogości można *odtworzyć* całą matematykę, oczywiście nie wynika, że każdy matematyk w ten sposób o tym myśli. Ktoś zajmujący się, powiedzmy, równaniami różniczkowymi nie myśli o liczbach rzeczywistych jako o przekrojach Dedekinda czy klasach równoważnych ciągów Cauchy'ego. Ale to co on robi, można przetłumaczyć na pracę w teorii mnogości. Po to są między innymi definicje w matematyce. W teorii mnogości można *zdefiniować* liczby rzeczywiste np. jako klasy równoważnych ciągów Cauchy'ego i udowodnić ich podstawowe własności, a potem już myśleć w terminach wprowadzonych pojęć.

Nieszczęście przytrafiło się na przełomie stuleci: Russell wykrył znaną antynomię i teoria mnogości okazała się sprzeczna. Rozważmy własność: $x \notin x$. Czy ta własność wyznacza zbiór? Chodzi więc o $\{x : x \notin x\}$. Łatwo zauważyć, że istnienie tego zbioru prowadzi do sprzeczności. Jeśli ten zbiór oznaczymy, powiedzmy, x_0, to z jego definicji wynika, że $x_0 \in x_0 \equiv x_0 \notin x_0$. Cantor mniej lub bardziej jawnie przyjmował, że każda własność wyznacza zbiór obiektów, które mają tę własność.

Antynomii wykryto dużo; o ile wiem, choć jedną musiał znać już Cantor. Powstało więc pytanie: jak uratować to, co w teorii mnogości wartościowe, uzyskując równocześnie teorię niesprzeczną? Jak udowodnić tę niesprzeczność?

Pierwsze wyjście zaproponował wspomniany wyżej B. Russell. Jego idea była mniej więcej taka. Należy poklasyfikować zbiory ze względu na ich *typy* i przyjąć, że każda własność wyznacza zbiór obiektów danego typu, ale sam zbiór jest wyższego typu. Ta idea została konsekwentnie zrealizowana w dziele „Principia Mathematica" [10] (wspólnym z A. N. Whiteheadem). Ta koncepcja nie została przyjęta przez matematyków, ponieważ prowadzi do niesłychanie niewygodnej matematyki. Liczby naturalne są na pierwszym poziomie i na każdym innym jest ich kopia, liczby rzeczywiste pojawiają się na drugim poziomie i każdym następnym. W każdym razie nie mamy jednego zbioru liczb naturalnych, jednego zbioru liczb rzeczywistych, itd.

Inne wyjście zaproponował E. Zermelo. Podał on aksjomatyzację teorii mnogości. Ta aksjomatyzacja, ulepszana przez wielu matematyków, jest w literaturze oznaczana ZFC (Zermelo–Fraenkel, trzecia litera pochodzi od AC, tzn. aksjomatu wyboru, ang. *axiom of choice*). Opisuję ją poniżej.

1. $\forall x, y\, [x = y \equiv \forall z\, (z \in x \equiv z \in y)]$.
2. $\forall x\, \{(\exists z\, z \in x) \Rightarrow \exists z\, [z \in x \,\&\, \forall t\, (t \in z \Rightarrow t \notin x)]\}$.
3. $\exists z \forall t\, t \notin z$.
4. $\forall x, y \exists z \forall t\, [t \in z \equiv (t = x \vee t = y)]$.
5. $\forall x \exists z \forall t\, [t \in z \equiv \exists s\, (t \in s \,\&\, s \in x)]$.
6. $\forall x \exists y \forall z\, [z \in y \equiv \forall s\, (s \in z \Rightarrow s \in x)]$.
7. $\exists x\, [\emptyset \in x \,\&\, \forall e\, (e \in x \Rightarrow e \cup \{e\} \in x)]$.
8. $\forall x_1, \ldots, x_r\, \{(\forall u \exists! w\, \varphi(x_1, \ldots, x_r, u, w))$
   $\Rightarrow \forall a \exists b \forall t\, [t \in b \equiv \exists s \in a\, \varphi(x_1, \ldots, x_r, s, t)]\}$.

Aksjomat 1 to znany *aksjomat ekstensjonalności*. Głosi on, że zbiory mające te same elementy są równe. Techniczny aksjomat 2 jest znany w literaturze jako *aksjomat ufundowania* lub *aksjomat regularności*. Głosi on, że każdy niepusty zbiór x ma element z rozłączny z x. Taki element z ma pewną własność minimalności. Sama relacja $\in$ ma własności podobne do częściowego porządku (między zbiorami). Na mocy aksjomatu ufundowania, ta relacja trochę przypomina dobry porządek (można prowadzić indukcję pozaskończoną). Z mniej technicznego punktu widzenia, aksjomat ten wyklucza istnienie zbiorów o pewnych patologicznych własnościach, np. łatwo z niego wyprowadzić to, że nie ma zbioru x takiego, że $x \in x$. Pozostałe aksjomaty stwierdzają istnienie pewnych zbiorów i wykonalność pewnych operacji na zbiorach. I tak aksjomat 3 (tzw. *aksjomat zbioru pustego*) stwierdza istnienie zbioru pustego. Aksjomat 4 (tzw. *aksjomat pary*) stwierdza, że dla każdych dwóch obiektów x, y istnieje zbiór t, którego elementami są x, y i tylko one. Aksjomat 5 (znany jako *aksjomat sumy*) głosi, że dla każdej rodziny zbiorów x istnieje suma tej rodziny, $\bigcup x$. Dalej, aksjomat 6 (*aksjomat potęgowy*) głosi, że dla każdego zbioru x istnieje rodzina $\mathcal{P}(x)$, wszystkich podzbiorów zbioru x. Aksjomat 7 to tzw. *aksjomat nieskończoności.* W jego wysłowieniu użyłem zwykłych skrótów w teorii mnogości (aby uniknąć konieczności pisania bardzo długich i przez to trudno czytelnych formuł). Aksjomat ten głosi, że istnieje zbiór x, którego elementami są $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ Z intuicyjnego punktu widzenia jest jasne, że taki zbiór musi być nieskończony. W takim razie, w tym aksjomacie istotne jest to, że daje on istnienie choć jednego zbioru nieskończonego. W punkcie 8 jest nieskończenie wiele aksjomatów: dla każdej formuły φ mamy jeden aksjomat 8_φ. Jego treść jest następująca: dla każdych $x_1, \ldots, x_r$, jeśli dla każdego u istnieje dokładnie jedno w takie, że $\varphi(x_1, \ldots, x_r, u, w)$, to dla każdego a istnieje b, którego elementami są wszystkie t takie, że $\varphi(x_1, \ldots, x_r, s, t)$ dla pewnego $s \in a$. To znaczy, że jeśli $\varphi(x_1, \ldots, x_r, \cdot, \cdot)$ jest opisem przyporządkowania zbiorom zbiorów, to obraz zbioru przy tym przyporządkowaniu jest zbiorem. Zauważmy, że nie użyłem słowa „funkcja”, gdyż w teorii mnogości funkcja to *zbiór* par uporządkowanych, a na temat tego co jest opisane przez φ nie zakładamy, że jest zbiorem. Punkt 8 jest zwany w literaturze *schematem zastępowania*.

Warto może dodać, że tego schematu nieskończenie wielu aksjomatów nie da się zastąpić skończonym zbiorem aksjomatów. Teoria mnogości ZFC nie ma skończonej aksjomatyki.

W dzisiejszej teorii mnogości przyjmuje się zazwyczaj jeszcze *aksjomat wyboru*. Pozwolę sobie wypowiedzieć go słowami, by nie pisać bardzo długich formuł. Oto on: *dla każdej niepustej rodziny x zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór y, którego przecięcie z każdym $t \in x$ jest jednoelementowe*. Aksjomat ten był na początku stulecia bardzo mocno dyskutowany. Ma on bardzo dziwne konsekwencje (np. tzw. paradoksalny rozkład kuli), ale dziś jest powszechnie przyjmowany. Bez niego nie można udowodnić, na przykład, że suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna... Inna rzecz, że znam specjalistów od analizy matematycznej, którzy woleliby mieć tylko wersję aksjomatu wyboru dla zbiorów przeliczalnych. Ale nie sądzę, że jest to powszechne żądanie. Dlatego w naszych rozważaniach będziemy go przyjmowali. Oznaczany jest on w literaturze przez AC. Całą teorię, której aksjomatami są 1–8 oznaczamy ZF, zaś teoria ZFC to ZF+AC.

Ze schematu zastępowania (tj. 8 powyżej) bardzo łatwo wyprowadzić *schemat wyróżniania*:

$$\forall x_1, \ldots, x_r \forall a \exists b \forall t \, [t \in b \equiv (t \in a \,\&\, \varphi(x_1, \ldots, x_r, t))].$$

Głosi on więc, że istnieje zbiór postaci $b = \{t \in a : \varphi(x_1, \ldots, x_r, t)\}$. We wcześniejszej części mówiliśmy o wyznaczaniu zbiorów przez własności; tutaj mamy odpowiednik, ale jest dodatkowe ograniczenie $t \in a$.

W opisanej teorii ZFC można powtórzyć wzmiankowaną wyżej konstrukcję całej matematyki. W związku z tym aż prosi się, by przyjąć następującą definicję. Zdanie φ jest *prawdziwe*, jeśli jest twierdzeniem ZFC, i jest *fałszywe*, jeśli jego negacja jest twierdzeniem tej teorii. Niestety, jak zobaczymy dalej, to jest bardzo zły kandydat na pojęcie prawdy w matematyce (i dlatego nie jest przyjmowany, w szczególności nie przyjmuje go autor tych słów) i to jest to, z czym nie możemy sobie poradzić, kiedy padają niektóre pytania. Pierwszym, które rozważę, jest *hipoteza continuum* (oznaczana w literaturze CH, z angielskiego *continuum hypothesis*), a drugim – sformułowane wyżej zagadnienie istnienia miary na $\mathbb{R}$. Wolę taką kolejność, bo przy tym drugim zagadnieniu pojawia się nowe zjawisko, o ile wiem, mało znane poza wąskim środowiskiem specjalistów z podstaw matematyki. Hipotezę continuum sformułuję w dalszej części niniejszych rozważań.

Jak widzieliśmy wyżej, istnieje niebezpieczeństwo, że teoria ZFC jest sprzeczna. Antynomii Russella (ani żadnej znanej) nie da się odtworzyć (przynajmniej wprost), ale oczywiście nie wyklucza to istnienia innego dowodu sprzeczności tej teorii. Na mocy bardzo elementarnej logiki, gdyby ta teoria była sprzeczna, to każde zdanie byłoby (w opisanym wyżej sensie) prawdziwe i fałszywe równocześnie. To oczywiście nonsens. Niesprzeczność tej teorii jest więc pierwszą rzeczą, którą tu sobie należy gwarantować. Ten problem został zaatakowany przez D. Hilberta i jego szkołę. Idea była mniej więcej taka. Rozważmy konkret, jakim są matematyczne teksty. Znajdźmy własność $W(\cdot)$ napisów, o której da się udowodnić: (i) aksjomaty mają własność W, (ii) jeśli przesłanki mają własność W, to konkluzje reguł wnioskowania także mają tę własność, (iii) zdanie $0 = 1$ nie ma własności W. Mając taką własność W widzimy, że zbiór twierdzeń teorii ZFC jest zawarty w zbiorze zdań mających własność W, więc $0 = 1$ nie jest twierdzeniem i na mocy elementarnej logiki, nie ma zdania φ takiego, że φ i jego negacja są twierdzeniami. Chodziło więc mniej więcej o to, by rozważyć oddzielną teorię, w której mówi się nie o zbiorach, jak w teorii mnogości, tylko o teorii mnogości, jej formułach, zdaniach, dowodach itd. Hilbert i jego szkoła usiłowali w ten sposób podchodzić do problemu niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych. Udało się to tylko dla istotnie słabszych teorii, ale dalsza część wydawała się wtedy tylko kwestią techniki. Jednym z najciekawszych rezultatów było następujące twierdzenie (Presburger [8]): arytmetyka samego dodawania jest niesprzeczna. W ogólnej sytuacji, nie tylko w odniesieniu do ZFC, teorię, w której badamy teorię T, nazywamy *metateorią* teorii T.

Chyba najambitniejszym celem Hilberta było żądanie mechanicznej (w dzisiejszym żargonie: programowalnej na komputer) procedury sprawdzania, czy dane zdanie jest twierdzeniem teorii T. Dowód Presburgera dawał taką procedurę dla arytmetyki samego dodawania. Jedną z konkluzji wzmiankowanej niżej pracy Gödla jest nieistnienie takiej procedury dla żadnej teorii zawierającej arytmetykę.

W 1930 r. K. Gödel [4] udowodnił, że naszkicowana wyżej idea Hilberta nie da się zrealizować. Za pomocą pewnej procedury, zwanej arytmetyzacją języka, przetłumaczył on zdanie „T jest niesprzeczna", tj. zdanie z metateorii T, na zdanie Con_T samej teorii T. Następnie pokazał, że to tłumaczenie nie ma dowodu w teorii T, chyba że ta jest sprzeczna. W pracy Gödla T była teorią typów Russella, ale jego dowód przenosił się na zwykłą arytmetykę liczb naturalnych i teorię mnogości. Gödel udowodnił też, że przy pewnym dodatkowym założeniu tzw. ω-niesprzeczności T, T jest niezupełna. Założenie ω-niesprzeczności T zostało wyeliminowane przez J. B. Rossera [9] w 1936 r.

Może trochę dokładniej o założeniach twierdzeń Gödla i Rossera. Zakładamy, że T jest teorią zawierającą arytmetykę liczb naturalnych (zawierającą w intuicyjnym sensie, co precyzuje się za pomocą pojęcia *interpretacji* arytmetyki w T) i że ma stosunkowo prostą aksjomatykę. W dzisiejszym żargonie można to żądanie wypowiedzieć tak: istnieje program komputerowy sprawdzający, czy dane zdanie jest aksjomatem. Normalnie teorie buduje się w ten sposób, że wypisuje się jawnie aksjomaty; wtedy ten warunek jest automatycznie spełniony. Ale w logice (np. w teorii modeli) rozważa się teorie daleko bardziej skomplikowane, np. zbiory zdań spełnionych w danej strukturze. Teorie mające prostą aksjomatykę w opisanym wyżej sensie nazywamy *rekurencyjnymi.* Twierdzenia Gödla i Rossera zachodzą dla dowolnej rekurencyjnej teorii zawierającej arytmetykę liczb naturalnych. Zauważmy jeszcze, że jednym z decydujących punktów w dowodzie Gödla jest wyrażalność pojęcia *ciągu skończonego* w rozważanej teorii. W przypadku arytmetyki Gödel zastosował do tego tzw. chińskie twierdzenie o resztach. Natomiast nie da się kodować ciągów skończonych w arytmetyce samego dodawania, bo wtedy by zachodziło twierdzenie Gödla dla tej teorii, wbrew wzmiankowanemu wyżej rezultatowi Presburgera.

Zauważmy, że z twierdzeń Gödla i Rossera wynika, że zaproponowane pojęcie prawdy w matematyce ma wadę, która czyni je nie do przyjęcia. Nawet jeśli wierzymy, jak to jest powszechnie przyjęte, że teoria ZFC jest niesprzeczna, istnieją zdania, które w tym sensie nie są ani prawdziwe ani fałszywe… Ale patrząc czysto praktycznie (z punktu widzenia matematyka), twierdzenia Gödla i Rossera jeszcze nie powodują zbyt nieznośnych konsekwencji. Ich dowody dają zdania niezależne niesłychanie sztuczne. W końcu kilkadziesiąt lat doświadczeń daje chyba podstawę do wiary, że teoria mnogości jest niesprzeczna, więc fakt, że to zdanie nie jest twierdzeniem, nie ma specjalnego znaczenia. Tym bardziej każdy wierzy, że arytmetyka jest niesprzeczna. Niestety, w przypadku teorii mnogości sprawa jest dużo poważniejsza.

Rozważmy teraz hipotezę continuum. Głosi ona: każdy nieskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest równoliczny albo ze zbiorem liczb naturalnych albo ze zbiorem liczb rzeczywistych (nie ma mocy pośrednich). Takie sformułowanie (dostępne tylko dla tych Czytelników, którzy znają trochę teorii mnogości: pojęcie funkcji, pojęcie równoliczności itp.) jest dosyć intuicyjne. Bo jeśli napisać jawnie definicję jakiegoś zbioru liczb rzeczywistych, to łatwo pokazać, że jest on albo skończony albo przeliczalny albo równoliczny z $\mathbb{R}$. Ale na gruncie teorii mnogości ta hipoteza jest równoważna sformułowaniu takiemu: istnieje dobry porządek $\prec$ na $\mathbb{R}$ taki, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x \prec a\}$ jest przeliczalny. A to jest dla odmiany chyba zupełnie nieoczywiste. Zauważmy, że w teorii mnogości dowodzi się, że każdy zbiór daje się dobrze uporządkować (jest to twierdzenie Zermeli). Ale dobry porządek na $\mathbb{R}$, o którym mowa, ma mieć własność dodatkową, która jest chyba bardzo dziwna.

Intuicja nie mówi więc „jak być powinno”. Matematycy przez wiele lat usiłowali rozstrzygnąć hipotezę continuum. W drugiej połowie lat trzydziestych K. Gödel zrozumiał, że tu może nie być ostatecznej odpowiedzi. Opisał on w pracy [5] tzw. *zbiory konstruowalne* i pokazał, że w świecie zbiorów konstruowalnych zachodzą wszystkie aksjomaty teorii mnogości i hipoteza continuum. Zauważmy, że (na mocy wypowiedzianego wcześniej twierdzenia tegoż K. Gödla) nie miał on szans, by w teorii mnogości udowodnić, że ZFC+CH jest niesprzeczna. Ale jego rozumowanie dało (już w bardzo słabej metateorii) implikację $\mathrm{Con}_{\mathrm{ZF}} \Rightarrow \mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC+CH}}$. Inaczej mówiąc, udowodnił on, że jeśli ZFC jest niesprzeczna, to nie dowodzi negacji hipotezy continuum.

Jeśli teoria mnogości jest niesprzeczna, to pozostały dwie możliwości: albo sama hipoteza continuum da się udowodnić, albo jest niezależna, tzn.

teoria mnogości nie dowodzi również samej hipotezy. To drugie pokazał P. J. Cohen w 1963 r., por. [2]. Jego metoda, to *wymuszanie* (ang. *forcing*). Razem mamy stosunkowo istotne pytanie, na które teoria mnogości nie daje odpowiedzi.

Teraz przedstawię sytuację, z którą mamy do czynienia w przypadku oryginalnego pytania o istnienie nietrywialnej miary, gdzie pojawia się nowe zjawisko.

Zacznijmy od uwagi, że Banach i Kuratowski [1] udowodnili, że jeśli istnieje nietrywialna σ-addytywna miara określona na wszystkich podzbiorach prostej, to nie zachodzi hipoteza continuum. Razem z wypowiedzianym powyżej rezultatem Gödla otrzymujemy więc: jeśli teoria mnogości jest niesprzeczna, to nie dowodzi istnienia takiej miary (bo gdyby dowodziła, to dowodziłaby też $\neg$CH).

W tym momencie, jeśli teoria mnogości jest niesprzeczna, to są dwie możliwości: albo dowodzi ona, że takich miar nie ma, albo istnienie takiej miary jest niezależne od teorii mnogości. Tej pierwszej możliwości nie możemy wykluczyć (jedyne co mamy, to wiele lat zakończonych niepowodzeniem prób przeprowadzenia dowodu tego faktu). Natomiast druga możliwość prowadzi do istotnie nowych zjawisk.

Powyżej opisałem aksjomatykę teorii mnogości. W szczególności mieliśmy schemat zastępowania (tj. schemat 8) i wyprowadzalny z niego schemat wyróżniania. Powstaje pytanie, czy ze schematu wyróżniania da się wyprowadzić schemat zastępowania. Odpowiedź jest negatywna. W teorii mnogości wprowadza się pojęcie zbioru dobrze uporządkowanego i dowodzi się twierdzenia o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną (tzn. przez indukcję po zbiorze dobrze uporządkowanym). Niech $\omega + \omega$ oznacza porządek taki „kopia liczb naturalnych, za którą jest druga kopia liczb naturalnych". Przez indukcję po tym porządku określamy $R_0 = \emptyset$, $R_{\alpha+1} = \mathcal{P}(R_\alpha)$ i $R_\omega = \bigcup_{n<\omega} R_n$. Rozważmy sumę tak określonej rodziny zbiorów, tj. $R_{\omega+\omega} = \bigcup_{\alpha<\omega+\omega} R_\alpha$. Wtedy ta suma (wraz ze zwykłą relacją przynależności $\in$) spełnia wszystkie aksjomaty teorii mnogości oprócz zastępowania, spełnia natomiast schemat wyróżniania. Oczywiście z tego wynika, że ze schematu wyróżniania nie da się wyprowadzić schematu zastępowania.

Przedstawiona wyżej idea sugeruje, by spróbować znaleźć dobry porządek κ taki, że jeśli powyższą indukcję poprowadzić po κ, to w ten sam sposób uzyska się model dla teorii ZFC. Liczbę kardynalną κ nazywamy *mocno nieosiągalną*, jeśli (i) $\kappa > \aleph_0$, (ii) $\forall \beta < \kappa\, 2^\beta < \kappa$, (iii) dla każdej rodziny $\{A_i : i \in I\}$, jeśli $\mathrm{card}(I) < \kappa$ i dla każdego $i \in I$, $\mathrm{card}(A_i) < \kappa$, to $\mathrm{card}(\bigcup_{i\in I} A_i) < \kappa$. Inaczej mówiąc, κ jest nieprzeliczalna i nie da się osiągnąć z liczb mniejszych przez potęgowanie i branie kresów górnych (chodzi o kresy górne mocy rodzin zbiorów, przy czym rodzina ma być mocy mniejszej od κ i wszystkie jej elementy mają mieć moc $< \kappa$). Konstrukcja bardzo podobna do powyższej daje: *jeśli κ jest mocno nieosiągalna, to R_κ jest modelem dla pełnej teorii* ZFC. Co więcej, to rozumowanie daje się przeprowadzić wewnątrz teorii ZFC. Konkluzja jest wtedy następująca: $\mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC}}$ jest twierdzeniem teorii ZFC+„istnieje liczba mocno nieosiągalna". Na mocy twierdzenia Gödla, ZFC nie dowodzi istnienia liczby mocno nieosiągalnej (bo wtedy ZFC udowodniłaby swoją własną niesprzeczność). S. Ulam [14] udowodnił, że najmniejsza liczba mierzalna (tj. 2-mierzalna), jeśli istnieje, to jest mocno nieosiągalna. A. Tarski [13] pokazał, że najmniejsza liczba mocno nieosiągalna (jeśli istnieje, to) nie jest mierzalna. Znacznie mocniej: *jeśli κ jest mierzalna, to $\{\alpha < \kappa : \alpha$ jest mocno nieosiągalna$\}$ jest mocy κ.* (Znane są istotnie mocniejsze rezultaty w tym kierunku, ale ich wysłowienie wymaga dodatkowych definicji.)

Zobaczmy, co się tu stało. Mamy „naturalne" pojęcie inkluzji pomiędzy teoriami (jako zbiorami twierdzeń), można je nieco uogólnić do wspomnianego wcześniej pojęcia interpretowalności. Ale twierdzenie Gödla sugeruje, by je zmienić na następujące. Niech T i S będą teoriami spełniającymi założenia twierdzenia Gödla. Mówimy, że teoria S jest *silniejsza* od T, jeśli S dowodzi Con_T. Jak zauważyliśmy wyżej, teoria ZFC+„istnieje liczba mocno nieosiągalna" jest w tym sensie silniejsza od ZFC. Okazuje się, że jest mocniej. Teoria ZFC+„istnieją dwie liczby mocno nieosiągalne" jest silniejsza niż ZFC+„istnieje liczba mocno nieosiągalna", itd. W takim razie teoria ZFC+„istnieje liczba mierzalna" jest o niebo silniejsza od teorii ZFC, bo pomiędzy nimi jest bardzo dużo teorii pośrednich. Co więcej, są rezultaty, które z grubsza głoszą, że żadna prosta iteracja istnienia liczb nieosiągalnych jeszcze nie implikuje istnienia liczby mierzalnej (ani niesprzeczności istnienia liczby mierzalnej). W każdym razie nie ma mowy o dowodzie istnienia liczby mierzalnej w teorii mnogości (chyba, że ta jest sprzeczna). O tym zjawisku można myśleć w ten sposób: niektóre zdania (np. istnienie liczby mocno nieosiągalnej, liczby mierzalnej) prowadzą do teorii *mocniejszej* niż sama ZFC.

Przejdźmy wreszcie do właściwego pytania o liczby $\mathbb{R}$-mierzalne. S. Ulam [14] udowodnił, że najmniejsza taka liczba (jeśli istnieje, to) albo jest mierzalna, albo nie większa od $2^{\aleph_0}$. Wprowadźmy pojęcie liczby słabo nieosiągalnej. Liczbę kardynalną κ nazywamy *słabo nieosiągalną*, jeśli jest nieprzeliczalna, ma własność (iii) z definicji mocnej nieosiągalności i $\forall \alpha < \kappa\, \alpha^+ < \kappa$. Tutaj α^+ oznacza najmniejszą liczbę kardynalną większą od α. Zauważmy, że znana w teorii mnogości *uogólniona hipoteza continuum* głosi: $\forall \alpha \geqslant \aleph_0$ $\alpha^+ = 2^\alpha$, więc jeśli zakładać uogólnioną hipotezę continuum, to to pojęcie jest równoważne mocnej nieosiągalności. Uogólnioną hipotezę continuum oznacza się GCH (z angielskiego: *generalized continuum hypothesis*). Ulam udowodnił, że najmniejsza liczba $\mathbb{R}$-mierzalna jest słabo nieosiągalna. Z tego wynika, że z istnienia liczby $\mathbb{R}$-mierzalnej $\leqslant 2^{\aleph_0}$ wynika bardzo mocne zaprzeczenie hipotezy continuum: *jeśli κ jest najmniejszą liczbą $\mathbb{R}$-mierzalną* *i nie jest mierzalna, to zbiór liczb kardynalnych mniejszych niż κ sam jest mocy κ.* Przypomnijmy, że przy opisanych założeniach, $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$. Co więcej, przy tych samych założeniach, zbiór $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ jest słabo nieosiągalna}\}$ jest sam mocy κ. A w oczywisty sposób κ jest nieprzeliczalna.

Do liczb słabo nieosiągalnych stosują się te same uwagi, co do liczb mocno nieosiągalnych. A więc ZFC+„istnieje liczba słabo nieosiągalna” jest mocniejsza niż ZFC, bo dowodzi $\mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC}}$, ZFC+„istnieją dwie liczby słabo nieosiagalne” jest jeszcze mocniejszym wzmocnieniem ZFC, itd. (Wynika to z faktu, że jeśli κ jest słabo nieosiągalna, to we wzmiankowanym wyżej świecie zbiorów konstruowalnych jest ona mocno nieosiągalna.) W każdym razie, jeśli teoria mnogości jest niesprzeczna, to nie dowodzi istnienia liczb $\mathbb{R}$-mierzalnych.

R. Solovay [12] (w drugiej połowie lat sześćdziesiątych) udowodnił, że jeśli chodzi o siłę teorii, to istnienie liczby $\mathbb{R}$-mierzalnej $\leqslant 2^{\aleph_0}$ jest takim samym wzmocnieniem teorii ZFC, co istnienie liczby mierzalnej. Z punktu widzenia twierdzenia Gödla jest to to samo wzmocnienie teorii mnogości. To też jest powód, dla którego nie mamy szans udowodnić w teorii mnogości istnienia liczb $\mathbb{R}$-mierzalnych, chyba że ta teoria jest sprzeczna.

Warto tu zauważyć, że niektóre własności zbiorów liczb rzeczywistych, których nie da się udowodnić w samej teorii mnogości, można udowodnić w teorii mnogości wzmocnionej dodatkowym aksjomatem istnienia liczby mierzalnej. To dziwne, ale niektóre własności liczb rzeczywistych zależą od istnienia jakiegoś zbioru bardzo dużego (w sensie mocy).

Jak więc widzimy, zaproponowane pojęcie prawdy jest bardzo złe (ale nikt nie umie zaproponować nic bardziej sensownego). Nawet jeśli teoria mnogości jest niesprzeczna (w co wszyscy wierzą), nie uzyskujemy odpowiedzi na stosunkowo naturalne pytania. Przy czym niektóre zagadnienia (np. hipoteza continuum) są po prostu niezależne, zaś inne prowadzą do istotnego wzmocnienia rozważanej teorii. Jak z tego dylematu wybrnąć?

Jedna ze szkół myślenia jest taka: odmówić matematyce posiadania rzeczywistej treści. Uważać matematykę *tylko* za metodę konstrukcji algorytmów (w bardzo luźnym sensie tego słowa); wtedy pytanie o prawdziwość zdań matematycznych w ogóle nie pada. Ale dlaczego po polsku mówi się, że coś jest tak pewne jak $2 \cdot 2 = 4$? Pytałem o to, takie samo wyrażenie funkcjonuje w większości języków europejskich (we wszystkich, o które pytałem). Przecież to jest miara, jak bardzo rozpowszechniona jest wiara w absolutną prawdziwość matematyki! Co więcej, świat liczb naturalnych wydaje się być czymś nieomal tak konkretnym jak świat, powiedzmy, cząstek elementarnych w fizyce. Odmawiać prawdziwości twierdzeniom teorii liczb? Nie chce mi się wierzyć, że takie rozwiązanie opisanego wyżej problemu zostanie przyjęte.

Być może pogłębienie naszego zrozumienia pojęcia *zbioru* doprowadzi do lepszej odpowiedzi na powyżej opisane dylematy. To, co by się chciało, to uznać, że świat zbiorów jest czymś konkretnym, a aksjomaty teorii mnogości (a więc i jej twierdzenia) służą do opisu świata wszystkich zbiorów. Niestety, w ogóle nie widać na czym oprzeć takie pogłębione pojęcie zbioru.

Pracując w teorii mnogości można określić pojęcie prawdy dla zdań arytmetyki liczb naturalnych. Znanych jest sporo rezultatów, które pokazują, że w tej sytuacji prawdziwość zdań arytmetyki jest innym pojęciem niż ich wyprowadzalność. Na przykład, zbiór zdań wyprowadzalnych w arytmetyce, tj. twierdzeń arytmetyki, jest o wiele prostszy niż zbiór zdań prawdziwych (w zwykłym modelu). W szczególności te dwa zbiory zdań są różne. Jeśli można posłużyć się analogią, to z punktu widzenia teorii mnogości w jej dzisiejszym wydaniu nie mamy szans, by uzyskać coś, co by pełniło rolę pojęcia prawdy i nie miało aż takich wad.

Powyżej opisałem sytuację tak jakby ZFC był jedynym wartym rozważenia wariantem teorii mnogości. Tak nie jest. Przede wszystkim znam poważnych matematyków, którzy nie uznają aksjomatu wyboru w jego pełnej sile. Woleliby pracować z jakąś słabą wersją, na przykład ograniczyć go do przeliczalnych rodzin zbiorów. Po drugie istnieją w literaturze alternatywy dla tego aksjomatu, np. tzw. *aksjomat determinacji.*

Znane są też rezultaty dowodzone w ten sposób (z grubsza): jeśli zakładamy, że nie ma jakiejś dużej liczby kardynalnej, to potrzebny fakt się dowodzi; jeśli zaś zakładamy, że taka liczba istnieje, to też zdanie się dowodzi, ale dowód jest zupełnie inny (myślę tu o twierdzeniu Shelaha [11]). Na mocy elementarnej logiki uzyskujemy razem dobry dowód, ale... chyba to nie powinno być tak.

W dzisiejszej literaturze bada się konsekwencje różnych wzmocnień teorii, dajmy na to, ZF, tak jak gdyby ludzie pogodzili się z tym, że nasz świat, świat matematyki, *nie jest jednoznacznie wyznaczony.* Być może to jest punkt widzenia, który zostanie w końcu przyjęty: nie mamy możliwości uzyskania w miarę adekwatnego opisu świata wszystkich zbiorów (jeśli w ogóle to zdanie ma jakiś sens) i należy się z tym pogodzić, że taka jest natura tych zagadnień. Ale nie potrafię siebie samego przekonać, czy tu chodzi o nieadekwatność naszych metod opisu tego świata, czy o samą naturę tego świata. Bo historia matematyki pokazuje, że ta druga możliwość wchodzi w rachubę. Grecy pogodzili się z istnieniem liczb niewymiernych, a algebraicy z niemożliwością podwojenia sześcianu, trysekcji kąta itd.

Zauważmy na koniec, że aksjomatyka teorii mnogości musi być pierwszego rzędu (bo inaczej już do opisu jej samej trzeba mieć trochę teorii mnogości), więc zachodzi dla niej twierdzenie Gödla. Istnieją więc zdania niezależne. Natomiast trudno mówić, że dla każdej aksjomatyki teorii mnogości istnieją matematycznie interesujące zdania niezależne, bo pojęcie zdania matematycznie interesującego chyba nie da się wyprecyzować.

Cytowana literatura

Niektóre pozycje na poniższej liście są historyczne, inne to podręczniki i monografie, które umożliwią bardziej dociekliwemu Czytelnikowi poszerzenie wiedzy na tematy omówione powyżej. Klasyczną pozycją jest [7]. Drake [3] i niedawno wydana monografia Kanamori [6] zawierają bardzo obszerny materiał.

[1] S. Banach, K. Kuratowski, *Sur une généralisation de la mesure*, Fund. Math. **14** (1929), 127–131.
[2] P. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, 1966.
[3] F. Drake, *Set Theory*, North-Holland, 1974.
[4] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), 173–198.
[5] K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Ann. Math. Stud., Princeton Univ. Press, 1940.
[6] A. Kanamori, *The Higher Infinite*: *Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Springer, 1997.
[7] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, 1978.
[8] M. Presburger, *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen in Welchem die Addition als einzige Operation hervortit*, w: *Sprawozdanie z pierwszego kongresu matematyków krajów słowiańskich*, Książnica Atlas, Warszawa, 1930.
[9] J. B. Rosser, *Extensions of some theorems of Gödel and Church*, J. Symbolic Logic **1** (1936), 87–91.
[10] B. Russell, A. Whitehead, *Principia mathematica*, Cambridge Univ. Press, 1910.
[11] S. Shelah, *The number of non-isomorphic models of an ustable first-order theory*, Israel J. Math. **9** (1971), 473–487.
[12] R. Solovay, *Real valued measurable cardinals*, w: *Axiomatic Set Theory* (edited by D. Scott), Proc. Sympos. Pure Math., Providence, 1971, 397–428.
[13] A. Tarski, *Some problems and results connected with foundations of set theory*, w: *Logic*, *Methodology and Philosophy of Science* (edited by E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski), Stanford, 1962, 125–135.
[14] S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. **16** (1930), 140–150.