ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVIII (2002)

C. Bagiński (Białystok)
M. Łuba (Białystok)

# O klasyfikacji skończonych grup prostych

**1. Wprowadzenie.** Jednym z najbardziej fascynujących osiągnięć matematyki XX wieku jest zakończenie klasyfikacji skończonych grup prostych (SGP). Całość klasyfikacji można ująć w jednym, pozornie nieskomplikowanym twierdzeniu:

Twierdzenie 1. *Grupa $G$ jest skończoną grupą prostą wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzna z jedną z następujących grup*:

(a) *cykliczną grupą $C_p$ zespolonych pierwiastków stopnia $p$ z jedynki, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą*;

(b) *grupą $A_n$ permutacji parzystych zbioru $n$-elementowego*, $n \geqslant 5$;

(c) *grupą prostą typu Liego*;

(d) *jedną z dwudziestu sześciu sporadycznych grup prostych.*

Dowód tego twierdzenia jest czymś wyjątkowym w całej historii matematyki. W obecnie znanym kształcie mieści się na 10–15 tysiącach stron rozrzuconych w około 500 artykułach ponad stu autorów. Jest on zatem nie tyle dowodem konkretnego twierdzenia, co całym obszernym działem współczesnej matematyki.

Zaraz po tym, gdy w lutym 1981 roku wąska grupa najwybitniejszych specjalistów zaangażowanych w klasyfikację uznała, że jest ona zakończona, ukazała się książka [6], której autor, Daniel Gorenstein, zapowiedział pełną „rewizję” całego dowodu, mającą rozwiać wątpliwości sceptyków. Dzięki wysiłkom Gorensteina ([1]) i innych, na początku lat 90-tych rozpoczęto realizację projektu, którego celem jest uporządkowanie całej teorii. W ramach projektu zapowiedziano ukazanie się dwunastu tomów zawierających pełny dowód klasyfikacji, o łącznej objętości szacowanej na 3–4 tysiące stron. W latach 1994–2001 ukazały się cztery pierwsze książki zapowiadanej serii [7].

Ogrom wykonanej pracy, piękne twierdzenia i płodne idee, jakich pełno w publikacjach poświęconych klasyfikacji SGP, wcześniej czy później odciśnie swoje piętno na innych działach matematyki, głównie algebry, teorii

([1]) Gorenstein zmarł w 1992 roku.

liczb i kombinatoryki. Na liście tych, którzy zostawili swój ślad w teorii skończonych grup prostych nie ma nazwisk matematyków polskich. Warto więc tę tematykę popularyzować, zwłaszcza wśród ludzi rozpoczynających swoją pracę naukową lub poszukujących nowych idei w obszarach dotykających teorii grup.

**2. Trochę historii.** Grupy proste spełniają analogiczną rolę do tej, jaką odgrywają liczby pierwsze w teorii liczb, albo cząstki elementarne w fizyce. Wyjaśnia to twierdzenie Jordana–Höldera, jeden z najstarszych wyników uzyskanych w teorii grup skończonych:

Twierdzenie 2. *Jeżeli $G$ jest grupą skończoną, to istnieje w niej skończony ciąg podgrup*

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$$

*taki, że dla* $0 \leqslant i \leqslant n-1$:

(a) *$G_i$ jest normalną podgrupą w $G_{i+1}$ oraz*

(b) *$G_{i+1}/G_i$ jest grupą prostą.*

*Ponadto, jeśli*

$$1 = H_0 < H_1 < \cdots < H_m = G$$

*spełnia również warunki* (a) *i* (b), *to $m = n$ i po ewentualnej zmianie numeracji $H_{i+1}/H_i$ jest izomorficzna z $G_{i+1}/G_i$.*

Skończone grupy proste są więc „materiałem”, z którego zbudowane są wszystkie inne grupy skończone i właśnie z tego powodu ich klasyfikacja jest tak istotna. Jej początki sięgają czasów E. Galois (1811–1832), który stworzył pojęciowe podstawy teorii grup, jako pierwszy sformułował pojęcie grupy prostej i zauważył, że taką grupą jest grupa $A_5$ wszystkich permutacji parzystych zbioru pięcioelementowego. Za początek systematycznej klasyfikacji należy jednak uznać rezultat C. Jordana (1838–1922) z 1870 roku. W swojej książce *Traité des Substitutions*, pierwszej jaką kiedykolwiek napisano z teorii grup, Jordan podaje pięć nieskończonych serii skończonych nieabelowych grup prostych. Pierwszą z nich jest seria grup alternujących $A_n$, $n \geqslant 5$, wszystkich permutacji parzystych zbioru $n$-elementowego. Druga, to rodzina specjalnych projektywnych grup liniowych $PSL_n(p)$ nad ciałem $p$-elementowym, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą oraz $(n,p) \notin \{(2,2),(2,3)\}$. Pozostałe serie, to grupy ortogonalne $O_n(p)$, unitarne $PSU_n(p)$ i symplektyczne $PSp_n(p)$ nad ciałem $p$-elementowym.

Pierwszymi znaczącymi wynikami, które do samego końca klasyfikacji były intensywnie wykorzystywane, są powszechnie znane twierdzenia Sylowa z 1872 roku. Ich niebanalny dowód wykorzystuje pojęcie działania grupy na zbiorze, a więc traktowanie grupy jako podgrupy grupy permutacji pewnego zbioru. W tamtym czasie grupy skończone były rozważane przede wszystkim w takim charakterze. Taką postać mają w szczególności niełatwe w konstrukcji grupy Mathieu, odkryte w latach sześćdziesiątych XIX wieku, które później okazały się być pierwszymi sporadycznymi grupami prostymi. Mimo tych wyników stan wiedzy z teorii grup skończonych był bardzo skromny, a problematyka jeszcze przez wiele późniejszych lat niedoceniana i daleka od modnych nurtów. Dość wspomnieć o artykule A. Cayleya ([2]) (patrz [9], str. 362–363), w którym wymienia trzy ([3]) nieizomorficzne grupy rzędu 6 oraz o artykule [5], w którym tylko marginalnie wspomniano o dokonaniach w teorii grup jednej z najznamienitszych postaci tej teorii, W. Burnside'a (patrz także [2]). Tematyką grup skończonych Burnside zainteresował się na początku lat dziewięćdziesiątych XIX wieku. Jego pierwsza praca opublikowana w 1893 roku zawierała dowód tego, że jedyną grupą prostą, której rząd jest iloczynem czterech (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych, jest $A_5$. Nawet dzisiaj jest to niełatwe zadanie, jeśli uświadomić sobie, że jedynym mocniejszym rezultatem, z którego Burnside korzystał, były twierdzenia Sylowa. W ciągu kilku dalszych lat pojawiła się cała seria ważnych dla klasyfikacji wyników Burnside'a, odnoszących się głównie do wpływu struktury podgrup Sylowa oraz znaczenia rzędu grupy dla jej prostoty. Odnotujmy kilka z nich, obecnie uważanych za elementarne.

Twierdzenie 3. (a) *Jeśli* 2*-podgrupa Sylowa grupy* $G$ *jest cykliczna, to* $G$ *nie jest prosta.*

(b) *Jeśli* $p$*-podgrupa Sylowa* $P$ *grupy* $G$ *jest zawarta w centrum swojego normalizatora, to istnieje normalna podgrupa* $H$ *w* $G$ *taka, że* $H \cap P = \{1\}$ *i* $HP = G$.

(c) *Jeśli* $G$ *jest grupą prostą, której rząd jest iloczynem pięciu liczb pierwszych, to* $|G| \in \{2^3 \cdot 3 \cdot 7, 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11, 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13\}$.

Na dalsze badania Burnside'a znaczący wpływ miało odkrycie teorii charakterów dokonane w 1896 roku. Autor tego odkrycia, Ferdynand Georg Frobenius (1847–1917), zajął sie teorią grup skończonych już w 1880 roku publikując zręczny dowód twierdzenia Sylowa. Zainteresowania Frobeniusa teorią grup były motywowane pewnymi pytaniami z teorii liczb postawionymi w pracach Dedekinda i Kroneckera. Taką motywację miały także badania, które w końcu doprowadziły do odkrycia teorii charakterów grup skończonych, a w konsekwencji – teorii reprezentacji ([4]). Swoisty wyścig Burnside'a

([2]) Artykuł ukazał się w pierwszym numerze *American Journal of Mathematics* w 1878 roku.

([3]) Dowolna grupa rzędu 6 jest cykliczna albo izomorficzna z grupą izometrii trójkąta równobocznego.

([4]) Zaskakujący może wydać się fakt, iż podstawy teorii charakterów stworzone przez Frobeniusa nie wykorzystywały pojęcia liniowej czy macierzowej reprezentacji grupy i o co najmniej rok wyprzedziły pojawienie się teorii reprezentacji, co więcej, dopiero w 1900 roku Burnside'a wyprowadza obecnie znane naturalne zależności tych teorii (patrz [4]).

i Frobeniusa z przełomu XIX i XX wieku szybko ujawnił ogromne znaczenie tych teorii dla badania grup skończonych ([5]), a jej tzw. wersja modularna, rozwinięta przez Brauera kilkadziesiąt lat później, doprowadziła do zakończenia klasyfikacji SGP. Wśród wielu twierdzeń udowodnionych przed około stu laty istnieją takie, których do dziś nie udało się udowodnić z pominięciem teorii charakterów, a wiele z nich przez dziesiątki lat opierało się innym technikom, jak chociażby twierdzenie Burnside'a o rozwiązalności grup, których rząd dzieli się przez co najwyżej dwie różne liczby pierwsze.

Podsumowanie dokonań pierwszego okresu klasyfikacji zamyka drugie wydanie książki Burnside'a ([3]) z 1911 roku. Składają się na nie wyniki m.in. O. Höldera, F. N. Cole'a, E. H. Moore'a, L. E. Dicksona i oczywiście Burnside'a oraz Frobeniusa. Oprócz wyników o charakterze ogólniejszym, jak chociażby wyżej wymienione twierdzenia Burnside'a, czy dowód prostoty klasycznych grup liniowych nad dowolnymi ciałami skończonymi, podany w latach 1897–1905 przez Dicksona, sporo uwagi poświęcono klasyfikacji grup prostych małych rzędów. Jednakże do 1911 roku sklasyfikowano zaledwie te grupy proste, których rząd nie przekraczał 2 000. Poszerzenie tego przedziału szło dość opornie. Do 1924 roku sklasyfikowano grupy o rzędzie nie przekraczającym 6 232 (z pominięciem grup prostych rzędów 5 626 i 6 048 – patrz niżej twierdzenie 5). Po dalszych 20 latach przedział ten poszerzono do 20 000, stwierdzając, że nie istnieje grupa prosta o rzędzie należącym do przedziału od 6 232 do 20 000. Badania o takim charakterze kończy wynik M. Halla z 1975 roku zawierający klasyfikację grup o rzędach nie większych od 1 000 000, z pominięciem kilku przypadków uzupełnianych do roku 1980.

Badania prowadzone przez Burnside'a, a dotyczące tego, jakie liczby mogą być rzędami grup prostych, już w 1895 roku doprowadziły do sformułowania hipotezy głoszącej, że nie istnieją nieabelowe grupy proste nieparzystego rzędu. Sam Burnside dostarczył wielu argumentów potwierdzających tę hipotezę. Pokazał między innymi, że

Twierdzenie 4. (a) *Nie istnieje nieabelowa grupa prosta, której rząd jest liczbą nieparzystą mniejszą od* 40 000.

(b) *Jeśli* $|G|$ *jest liczbą nieparzystą podzielną przez* 3 *ale nie przez* 9, *to* $G$ *zawiera podgrupę normalną o indeksie* 3.

(c) *Jeśli* $G$ *jest grupą prostą nieparzystego rzędu i* $p$ *jest liczbą pierwszą dzielącą* $|G|$, *to albo* $p^4$, *albo* $p^3$ *i* $p^2+p+1$ *są dzielnikami* $|G|$.

Metody Burnside'a, oparte głównie na pojęciu transferu, kombinatorycznych spostrzeżeniach i raczej elementarnych własnościach reprezentacji, szybko wyczerpały swoją siłę, ale jego idee wyznaczyły kierunki badań

([5]) We wstępie do pierwszego wydania swojej książki [3] z 1897 roku Burnside wyraża poważne wątpliwości co do przydatności reprezentacji liniowych w badaniach grup skończonych.

na wiele lat, nie tylko w teorii grup skończonych. Jedną z nich było sięgnięcie do metod grup i algebr Liego, stworzonych głównie przez S. Liego, W. Killinga i E. Cartana. Burnside czerpał z nich przede wszystkim inspiracje dla rozwijania teorii reprezentacji. Jego naśladowcy w istotnym stopniu wykorzystali je do klasyfikacji SGP. Jak wspomnieliśmy wyżej, już na początku wieku L. E. Dickson dowiódł prostoty klasycznych grup liniowych. Ponadto, wykorzystując klasyfikację grup prostych Liego, podał dwie dalsze serie skończonych grup prostych, będące analogonami dwóch tzw. wyjątkowych prostych grup Liego.

Do tych idei powrócono w latach pięćdziesiątych. W 1955 roku ukazała się ważna praca Chevalleya, w której przedstawił głęboką analizę półprostych algebr Liego nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych, dzięki czemu znalazł ogólne analogie między grupami prostymi Liego i SGP, i podał kilka nowych, nieznanych dotąd, nieskończonych serii grup prostych. Klasyfikacja prostych grup Liego jest znana od lat dziewięćdziesiątych XIX wieku. Istnieją cztery nieskończone rodziny takich grup: $A_n(\mathbb{C})$, $B_n(\mathbb{C})$, $C_n(\mathbb{C})$ i $D_n(\mathbb{C})$ odpowiadające kolejno specjalnym grupom liniowym $SL_n(\mathbb{C})$, grupom ortogonalnym nieparzystego stopnia $O_{2n+1}(\mathbb{C})$, symplektycznym $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ i ortogonalnym stopnia parzystego $O_{2n}(\mathbb{C})$. Ponadto istnieje pięć wyjątkowych grup prostych Liego oznaczonych symbolami $G_2(\mathbb{C})$, $F_4(\mathbb{C})$, $E_6(\mathbb{C})$, $E_7(\mathbb{C})$ i $E_8(\mathbb{C})$. Chevalley dowiódł istnienia całkowito-liczbowej bazy w prostej algebrze Liego, co pozwoliło mu zastąpić ciało $\mathbb{C}$ dowolnym ciałem skończonym i w konsekwencji uzyskał SGP będące odpowiednikami wszystkich wymienionych wyżej grup Liego. Cztery pierwsze serie oraz $G_2(q)$ i $E_6(q)$ były już znane od czasów Dicksona. Chevalley dał ich pełną jednolitą prezentację. Wszystkie dziewięć serii znanych jest pod nazwą grup Chevalleya lub nieskręconych skończonych grup prostych typu Liego.

W 1959 roku R. Steinberg przeprowadził dalszą analizę metody Chevalleya. Dla niektórych grup prostych Liego istnieją ich analogony nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. Steinberg dostrzegł odpowiedniki tych analogii dla grup Chevalleya i skonstruował dalsze serie SGP – analogony grup Chevalleya: ${}^2D_n(q)$ – druga rodzina grup ortogonalnych parzystego stopnia, ${}^2E_6(q)$ i ${}^3D_4(q)$. W ten schemat Steinberga wpisują się odkryte przez Dicksona grupy unitarne, oznaczane od tego czasu symbolem ${}^2A_n(q)$.

W 1961 roku R. Ree zauważył dalsze analogie konstruując serie ${}^2G_2(3^n)$ i ${}^2F_n(2^n)$. Zwrócił również uwagę, że skonstruowane w 1957 roku grupy Suzuki (patrz poniżej) są także wariacjami grup Chevalleya $B_n(q)$, stąd ich obecne oznaczenie ${}^2B_2(2^n)$. Wszystkie siedem serii odkrytych przez Suzuki, Steinberga i Ree noszą nazwę skręconych grup prostych typu Liego.

W 1968 roku Steinberg dał jednolitą charakteryzację wszystkich szesnastu serii grup typu Liego. Zauważył mianowicie, że każda z nich może być przedstawiona jako grupa punktów stałych odpowiedniego automorfizmu grupy algebraicznej nad algebraicznym domknięciem ciała skończonego.

Połowa lat pięćdziesiątych była przełomową dla klasyfikacji SGP jeszcze z jednego powodu, nie mniej istotnego, niż prace Chevalleya. Podłożem dla nowych idei stały się wyniki R. Brauera dotyczące modularnych reprezentacji grup skończonych, tzn. reprezentacji liniowych nad ciałami, których charakterystyka dzieli rząd grupy. Pierwsze prace Brauera poświęcone reprezentacjom modularnym powstały w latach 1937–1940. Zapowiedzią skuteczności idei Brauera były wyniki opublikowane na początku lat czterdziestych, dotyczące m.in. charakteryzacji skończonych grup prostych, których rząd dzieli się przez pewną liczbę pierwszą $p$ i nie dzieli się przez $p^2$ oraz grup prostych, których rząd dzieli się przez dokładnie trzy różne liczby pierwsze. Wymienimy niektóre z elementarnie brzmiących rezultatów Brauera z tamtego okresu:

Twierdzenie 5. *Niech $G$ będzie grupą prostą.*
(a) *Jeżeli* $|G| = 5\,616$, *to* $G \cong PSL_3(3)$.
(b) *Jeżeli* $|G| = 6\,048$, *to* $G \cong PSU_3(3)$.

Twierdzenie 6. *Jeśli $G$ jest grupą prostą i $|G| = pqr^m$, gdzie $p$, $q$ i $r$ są liczbami pierwszymi, to $|G| = 60$ lub $|G| = 168$.*

Twierdzenie 7. *Niech $G$ będzie grupą prostą i $|G| = pq^m t$, gdzie $p$ i $q$ są liczbami pierwszymi, natomiast $m$ i $t$ liczbami naturalnymi, przy tym $t < p - 1$. Wówczas $G \cong PSL_2(p)$, gdzie $p = 2^n \pm 1$, $p > 3$ lub $G \cong PSL_2(2^n)$, i $p = 2^n + 1, p > 3$.*

Cała seria znaczących prac Brauera, zarówno o charakterze ogólnym, jak i odnoszących się bezpośrednio do klasyfikacji SGP, znalazła podsumowanie na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1954 roku w Amsterdamie, gdzie w wygłoszonym wtedy wykładzie Brauer wyznaczył kierunki poszukiwań, które mogłyby przybliżyć klasyfikację. Do najważniejszych faktów, na których oparł swoje sugestie, należą następujące twierdzenia, pierwsze z nich udowodnione przez niego wspólnie z jego uczniem K. A. Fowlerem.

Twierdzenie 8. *Istnieje tylko skończona liczba skończonych grup prostych, które zawierają inwolucję o centralizatorze izomorficznym z wcześniej ustaloną grupą.*

Twierdzenie 9. *Niech $G$ będzie skończoną grupą prostą zawierającą inwolucję, której centralizator jest izomorficzny z $GL_2(q)$, gdzie $q$ jest potęgą nieparzystej liczby pierwszej. Wówczas $G \cong PSL_3(q)$, lub $q = 3$ i $G$ jest izomorficzna z grupą prostą Mathieu rzedu* $7\,912$.

Idea Brauera, która z czasem przekształciła się w tzw. lokalną analizę, znalazła wielu zwolenników i ostatecznie doprowadziła do zakończenia klasyfikacji. W 1957 roku M. Suzuki, prowadząc analizę grup prostych, w których centralizator dowolnej inwolucji jest 2-grupą, skonstruował nieskończoną serię SGP. Udowodnił także, że grupa prosta, w której centralizator dowolnego elementu $\neq 1$ jest abelowy, musi mieć parzysty rząd. Trzy lata później W. Feit, M. Hall Jr. i J. Thompson pokazali, że w twierdzeniu Suzuki można zastąpić słowo przemienny słowem nilpotentny, a dalsze wysiłki W. Feita i J. Thompsona doprowadziły do udowodnienia w 1962 roku hipotezy Burnside'a o rozwiązalności grupy nieparzystego rzędu. Dowód o długości 257 stron, opublikowany w 1963 roku, zajął cały numer czasopisma *Pacific Journal of Mathematics.* Lata sześćdziesiąte i początek lat siedemdziesiątych przyniosły całą serię bardzo ważnych i bardzo długich prac poświęconych klasyfikacji. Dla przykładu J. Thompson w serii sześciu prac opublikowanych w latach 1968–74, o łącznej objętości 416 stron, sklasyfikował m.in. SGP, których każda właściwa podgrupa jest rozwiązalna ([6]).

TWIERDZENIE 10. *Jeśli każda właściwa podgrupa skończonej grupy prostej $G$ jest rozwiązalna, to $G$ jest izomorficzna z jedną z następujących grup*:
(a) $PSL_2(p)$, *gdzie $p$ jest liczbą pierwszą, $p > 3$ i $p^2 - 1$ nie dzieli się przez* 5;
(b) $PSL_2(2^p)$, *gdzie $p$ jest liczbą pierwszą*;
(c) $PSL_2(3^p)$, *gdzie $p$ jest nieparzystą liczbą pierwszą*;
(d) $PSL_3(3)$;
(e) $Sz(2^p)$, *gdzie $p$ jest nieparzystą liczbą pierwszą.*

Z tej klasyfikacji wynika w szczególności, że

TWIERDZENIE 11. *Jeśli rząd skończonej grupy prostej $G$ dzieli się przez dokładnie* 3 *różne liczby pierwsze $p, q, r$, $p < q < r$, to $p = 2$, $q = 3$ i $r \in \{5, 7, 13, 17\}$.*

Prace Brauera, a następnie Suzuki, Thompsona i innych dały możliwość identyfikacji grup o określonej wewnętrznej budowie według następującego toku myślenia. Jeśli dowolna podgrupa pewnej ustalonej rodziny podgrup grupy prostej $G$ ma określoną własność, to $G$ należy do jednej ze znanych rodzin grup prostych albo ma takie czy inne reprezentacje permutacyjne lub liniowe, co z kolei daje możliwość jej konstrukcji jako podgrupy pewnej grupy liniowej, podgrupy grupy permutacji o pewnych dodatkowych własnościach lub automorfizmów swoistych obiektów kombinatorycznych. Np. w dwóch obszernych pracach D. Gorenstein i J. H. Walter udowodnili, że

TWIERDZENIE 12. *Jeżeli* 2-*podgrupy Sylowa skończonej grupy prostej $G$ są grupami dihedralnymi, to $G$ jest izomorficzna z $PSL_2(q)$ dla nieparzystego $q$ lub $G \cong A_7$.*

([6]) Za tę serię prac J. Thompson otrzymał Medal Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1974 roku.

Taka analiza pozwoliła także na uzupełnienie listy skończonych grup prostych listą tzw. sporadycznych grup prostych, tzn. takich grup, które nie występują w żadnej z nieskończonych serii SGP.

W 1895 Cole, w czasie prac nad opisem tranzytywnych grup permutacji, odkrył nieznaną wcześniej grupę prostą. Okazało się jednak, że była to jedna z pięciu tranzytywnych grup permutacji odkrytych w 1861 roku przez E. Mathieu. Pozostałe cztery grupy również okazały się grupami prostymi. Ustalił to na przełomie lat 1899–1900 Miller. Najmniejsza z grup Mathieu $M_{11}$ ma rząd 7 920, natomiast rząd największej $M_{24}$ przekracza 240 milionów. Grupy Mathieu okazały się pierwszymi, których nie dało się zaliczyć do żadnej nieskończonej rodziny grup prostych. Następną grupę sporadyczną znalazł dopiero w 1966 roku Zvonimir Janko analizując lokalną strukturę grup prostych, których każda 2-podgrupa Sylowa jest abelowa, a pewna inwolucja ma centralizator izomorficzny z $\mathbb{Z}_2 \times PSL_2(q)$. W ciągu następnych dziesięciu lat listę tą uzupełniono o kolejnych dwadzieścia grup. Ostatnią z grup sporadycznych, jakie znaleziono, okazała się grupa o monstrualnym rzędzie równym $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$. Z tego powodu nazwano ją grupą Monstrum (Monster group). Jej konstrukcja oraz dowód jednoznaczności zakończył klasyfikację SGP.

Kwestia jednoznaczności grup ustalonego rzędu stanowiła istotny fragment klasyfikacji. Już Dickson pokazał, że istnieje nieskończenie wiele par nieizomorficznych grup prostych o równych rzędach. Najmniejszą z takich par jest $(PSL_3(4), A_8)$ rzędu 20 160, a wspólny rząd grup następnej pary jest równy 4 585 351 680. Poniższe twierdzenie podaje nieskończoną listę takich par.

Twierdzenie 13. *Dla dowolnej liczby naturalnej $n$ mamy $|PSp_{2n}(q)| = |P\Omega_{2m+1}(q)|$. Ponadto, jeśli $m \geqslant 3$, to $PSp_{2n}(q) \not\cong P\Omega_{2m+1}(q)$* (7).

Lista par nieizomorficznych grup prostych tego samego rzędu, podana przez Dicksona, okazała się kompletna, wraz z zakończeniem klasyfikacji.

W trakcie prac nad klasyfikacją SGP postawiono wiele innych uzupełniających pytań, na które odpowiedź znaleziono wraz z jej zakończeniem. Oto odpowiedzi na niektóre z nich.

Twierdzenie 14. *Grupa automorfizmów zewnętrznych skończonej grupy prostej jest rozwiązalna.*

Twierdzenie 15. *Jeśli skończona grupa $G$ ma automorfizm bez punktów stałych $\neq 1$, to $G$ jest rozwiązalna.*

Twierdzenie 16. *Każda skończona grupa prosta ma 2-elementowy zbiór generatorów.*

(7) Znaczenie symboli jest podane w następnym rozdziale.

TWIERDZENIE 17. *Jeśli $G$ jest 4-tranzytywną prostą grupą permutacji, to $G$ jest izomorficzna z $A_n$, $n \geqslant 5$, lub z jedną z grup prostych Mathieu różnych od $M_{22}$.*

Wiele nowych wyników uzyskiwanych w teorii grup skończonych odwołuje się do twierdzenia klasyfikacyjnego, jak choćby rozwiązanie Osłabionego Problemu Burnside'a ([2]), za które E. Zelmanov otrzymał Medal Fieldsa w 1994 roku. Jednakże istnieje całkiem spora grupa specjalistów, którzy z rezerwą odnoszą się do klasyfikacji sugerując, że jeśli nawet Twierdzenie 1 zawiera pełną listę SGP, to istnieją luki w dowodzie. Trudno tych wątpliwości nie podzielać, skoro od zapowiedzi przedstawienia zwartej prezentacji dowodu upłynęło już dwadzieścia lat, a z zapowiadanej serii monografii ukazała się zaledwie jedna trzecia. Więcej na temat historii klasyfikacji SGP, w nieco bardziej specjalistycznym języku, można znaleźć w artykule [11], który ukazał się już po wysłaniu niniejszego opracowania do Redakcji *Wiadomości Matematycznych.* Na początku artykułu R. Solomon zapowiada ukazanie się pracy M. Aschbachera i S. D. Smitha wyjaśniającej ostatnie merytoryczne wątpliwości. Solomon uznaje ją za ostateczne zakończenie klasyfikacji SGP.

**3. Skończone grupy proste.** W miarę przejrzysta prezentacja skończonych grup prostych w krótkim artykule przeglądowym adresowanym do szerszego odbiorcy nie jest łatwa, jeżeli w ogóle możliwa. Nie udało się nam znaleźć zadowalającego sposobu na taką prezentację, dlatego ograniczymy się do pobieżnego przedstawienia tylko niektórych aspektów na podstawie [6] i [7].

**3.1.** *Nieskończone serie grup prostych.* Tabela 1 zawiera pełną listę nieskończonych serii SGP wraz z rzędami poszczególnych grup. Dwie pierwsze serie nie wymagają przedstawiania, ponieważ w kursowych wykładach algebry na ogół podawany jest opis ich podstawowych własności. Następne szesnaście serii to grupy typu Liego. Parametrami decydującymi o rzędzie grupy są stopień $n$ oraz moc $q$ skończonego ciała $\mathbb{F}_q$. Dla grup oznaczonych symbolami $F$ i $G$ parametr $n$ przyjmuje tylko jedną wartość (odpowiednio 4 i 2), a dla grup oznaczonych symbolem $E$ – trzy wartości: 6, 7 lub 8. Wszystkie grupy typu Liego można skonstruować jako grupy ilorazowe odpowiedniej podgrupy grupy macierzy stopnia $n$ nad ciałem $\mathbb{F}_q$. Grupy wymienione w pierwszych dziewięciu seriach nazywają się grupami Chevalleya lub nieskręconymi grupami prostymi typu Liego. Jednolity opis tych grup jako analogonów prostych grup Liego nad ciałem $\mathbb{C}$ jest podany w [12].

Grupa $SL_n(q)$ jest zbiorem wszystkich macierzy stopnia $n$ nad ciałem $q$-elementowym, których wyznacznik jest równy 1. Ma ona na ogół nietrywialne centrum, złożone z macierzy skalarnych o wyznaczniku 1. Grupa $A_{n-1}(q) = PSL_n(q)$ jest grupą ilorazową grupy $SL_n(q)$ przez jej centrum.

Tabela 1. Nieskończone serie skończonych grup prostych

| Oznaczenie grupy | Inne używane oznaczenia | Rząd |
|---|---|---|
| $Z_p$ | | $p$ |
| $A_n$, $n \geqslant 5$ | $Alt_n$ | $\frac{1}{2}n!$ |
| $A_{n-1}(q)$, $n \geqslant 2$ | $PSL_n(q)$, $L_n(q)$, $L_n^+(q)$ | $\frac{1}{(n,q-1)(q-1)} \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ |
| $B_n(q)$, $n \geqslant 2$ | $P\Omega_{2n+1}(q)$, $\Omega_{2n+1}(q)$ | $\frac{1}{(2,q-1)} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)$ |
| $C_n(q)$, $n \geqslant 2$ | $PSp_{2n}(q)$ | $\frac{1}{(2,q-1)} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)$ |
| $D_n(q)$, $n \geqslant 3$ | $P\Omega_{2n}^+(q)$, $D_n^+(q)$ | $\frac{1}{(4,q^n-1)} q^{n(n-1)}(q^n - 1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)$ |
| $E_6(q)$ | $E_6^+$ | $\frac{1}{(3,q-1)} q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)$ $\cdot (q^9-1)(q^{12}-1)$ |
| $E_7(q)$ | | $\frac{1}{(2,q-1)} q^{63}(q^2-1)(q^6-1)$ $\cdot (q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)$ $\cdot (q^{14}-1)(q^{18}-1)$ |
| $E_8(q)$ | | $q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$ $\cdot (q^{14}-1) \cdot (q^{18}-1)$ $\cdot (q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)$ |
| $F_4(q)$ | | $q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$ |
| $G_2(q)$ | | $q^6(q^2-1)(q^6-1)$ |
| ${}^2A_n(q)$, $n \geqslant 2$ | $PSU_{n+1}(q)$, $U_{n+1}(q)$, $L_{n+1}^-(q)$ | $\frac{1}{(n+1,q+1)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=2}^{n+1}(q^i - (-1)^i)$ |
| ${}^2B_2(q)$, $q = 2^{2n+1}$ | $Sz(q)$, ${}^2B_2(\sqrt{q})$ | $q^2(q-1)(q^2+1)$ |
| ${}^2D_n(q)$, $n \geqslant 2$ | $P\Omega_{2n}^-(q)$, $D_n^-(q)$ | $\frac{1}{(4,q^n+1)} q^{n(n-1)}(q^n+1)$ $\cdot \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$ |
| ${}^3D_4(q)$ | | $q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$ |
| ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1}$ | $R(q)$, ${}^2G_2(\sqrt{q})$ | $q^3(q-1)(q^3+1)$ |
| ${}^2F_4(q)$, $q = 2^{2n+1}$ | ${}^2F_4(\sqrt{q})$ | $q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)$ |
| ${}^2E_6(q)$ | $E_6^-(q)$ | $\frac{1}{(3,q+1)} q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)$ $\cdot (q^9+1)(q^{12}-1)$ |

Grupę ortogonalną można zdefiniować jako podgrupę ogólnej grupy liniowej $GL_n(q)$, złożoną z tych macierzy, które działając na $n$-wymiarowej przestrzeni liniowej nad $F_q$ nie zmieniają wartości ustalonej niezdegenerowanej formy kwadratowej. Wszystkie formy kwadratowe nad ciałem liczb zespolonych są równoważne i dlatego dla dowolnej liczby naturalnej $n$ grupa $SO_n(\mathbb{C})$ macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1 jest określona jednoznacznie. Nad ciałami skończonymi $F_q$ istnieją zawsze dwie nierównoważne formy kwadratowe, wyznaczające dwie grupy macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1 oznaczane symbolami $SO_n^+(q)$ i $SO_n^-(q)$. Dla parzystych wartości $n$ te grupy są nieizomorficzne, dla nieparzystych wartości $n$ – pokrywają się i są oznaczane symbolem $SO_n^+(q)$ (lub $SO_n(q)$). Grupy te na ogół nie są proste. Ich komutanty oznaczamy symbolami $\Omega^+(q)$ i $\Omega^-(q)$, przy czym $|SO_n^\pm(q) : \Omega^\pm(q)| = 1$, 2 lub 4. Centrum grupy $\Omega^\pm(q)$ jest trywialne lub dwuelementowe. Jej grupa ilorazowa przez centrum jest oznaczana symbolami, odpowiednio, $P\Omega^+(q)$ i $P\Omega^-(q)$, i jest grupą prostą. Otrzymujemy zatem trzy różne serie:

$$B_n(q) = P\Omega_{2n+1}(q), \qquad D_n(q) = P\Omega^+_{2n}(q), \qquad {}^2D_n(q) = P\Omega^-_{2n}(q).$$

Pierwsze dwie serie należą do nieskręconych grup typu Liego, a ostatnia – do skręconych grup typu Liego, do których nawiążemy nieco dalej.

Grupy $C_n(q) = PSp_n(q)$ definiowane są analogicznie. W ogólnej grupie liniowej rozważamy podgrupę $Sp_n(q)$ wszystkich macierzy symplektycznych, tzn. takich, które działając na przestrzeni symplektycznej, tzn. przestrzeni liniowej wraz z określoną na niej niezdegenerowaną dwuliniową formą alternującą, nie zmieniają wartości tej formy. Grupa ilorazowa grupy $Sp_n(q)$ przez jej centrum jest grupą $C_n(q)$.

Pozostałe pięć serii grup Chevalleya, to analogony wyjątkowych grup prostych Liego nad $\mathbb{C}$.

Dla dowolnego ciała skończonego $\mathbb{F}_{q^2}$, mającego $q^2$ elementów, odwzorowanie $\varphi : x \to x^q$ jest automorfizmem rzędu 2. W grupie $GL_n(q^2)$ rozważmy podgrupę $GU_n(q)$ elementów stałych ze względu na działanie automorfizmu $\alpha$ tej grupy zdefiniowanego wzorem

$$\alpha(X) = ((\overline{X})^t)^{-1}, \tag{1}$$

gdzie $\overline{X}$ jest macierzą, której wyrazy są obrazami odpowiednich wyrazów macierzy $X$ ze względu na działanie automorfizmu $\varphi$, natomiast $Y \to Y^t$ jest operacją transponowania macierzy. Nazywamy ją grupą unitarną. Niech $SU_n(q) = GU_n(q) \cap GL_n(q^2)$ i ${}^2A_n(q) = PSU_n(q)$ będzie jej grupą ilorazową przez jej centrum. Jest to grupa prosta należąca do skręconych grup prostych typu Liego. Analogiczne postępowanie pozwala otrzymać wspomniany wcześniej skręcony wariant ${}^2D_n(q)$ grupy ortogonalnej z grupy $D_{2n}(q)$ oraz grupę ${}^2E_6(q)$ z grupy $E_6(q)$. Tą samą drogą otrzymujemy również grupę ${}^3D_4(q)$ z grupy $D_4(q)$ zastępując automorfizm $\varphi$ automorfizmem rzędu 3 ciała $F_{q^3}$ danego wzorem $x \to x^3$.

Skręcone warianty grup $B_n(q)$, $F_4(q)$ i $G_2(q)$ istnieją tylko dla szczególnych wartości $n$ i $q$. Odpowiedni automorfizm zadany wzorem (1) można znaleźć tylko w przypadkach $n = 2$, $q = 2^{2k+1}$ dla grupy $B_n(q)$, $q = 2^{2k+1}$

dla grupy $F_4(q)$ i $q = 3^{2k+1}$ dla grupy $G_2(q)$. W pierwszym przypadku otrzymujemy grupy Suzuki $Sz(2^{2k+1}) =^2 B_2(\sqrt{2^{2k+1}})$, a w dwóch pozostałych – grupy Ree ${}^2F_4(2^{2n+1})$ i $R(3^{2k+1}) =^2 G_2(\sqrt{3^{2k+1}})$. Odnotujmy, że grupę Suzuki $Sz(2^{2k+1})$ można zdefiniować jako podgrupę grupy $B_2(2^{2k+1})$ generowaną przez wszystkie macierze postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^{1+\theta}+b & a^\theta & 1 & 0 \\ a^{2+\theta}+ab+b^\theta & b & a & 1 \end{bmatrix}$$

oraz macierze do nich transponowane, gdzie $a, b, c \in \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$, natomiast $\theta$ jest automorfizmem ciała $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ takim, że $\theta^2 = 2$ (tzn. $x^{\theta^2} = x^2$ dla $x \in \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$).

**3.2.** *Sporadyczne grupy proste.* Prezentacja dwudziestu sześciu sporadycznych grup prostych jest nie mniej trudna, niż grup typu Liego. Dlatego także ograniczymy się do ich pobieżnego scharakteryzowania. Chętnych do zapoznania się z jednolitym opisem wszystkich sporadycznych SGP odsyłamy do [1].

Wszystkie sporadyczne grupy proste, oprócz grup Mathieu, były odkrywane w kilku etapach. Najpierw, na podstawie pewnej konkretnej własności już znanych grup prostych, próbowano rozstrzygnąć problem opisu wszystkich grup prostych mających tę własność. To prowadziło czasami do obserwacji sugerujących istnienie, oprócz znanych grup, jeszcze innych grup prostych. Konkretyzacja tych obserwacji doprowadzała do opisu kluczowych wewnętrznych własności ewentualnej nowej grupy prostej, w tym własności $p$-podgrup Sylowa, rzędu grupy, czasami jej tablicy charakterów itd. Te własności z kolei stanowiły podstawę do konstrukcji grupy, tzn. jej realizacji jako grupy automorfizmów pewnej struktury, podgrupy ogólnej grupy liniowej, czy też podgrupy grupy permutacji. Ostatnim aktem odkrycia był dowód tego, że własności opisane jeszcze przed konstrukcją jednoznacznie określają nową grupę prostą.

W latach 1860–61 E. Mathieu odkrył pięć $k$-tranzytywnych grup permutacji, $k > 2$, nieizomorficznych ani z grupami symetrycznymi $S_n$ ani alternującymi $A_n$. Przypomnijmy, że podgrupa $G$ grupy $S(X)$ wszystkich permutacji zbioru $X$ jest $k$-tranzytywna, jeśli dla dowolnych różnowartościowych ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ elementów zbioru $X$ istnieje element $g \in G$, który przeprowadza element $x_i$ na element $y_i$, $i = 1, \ldots, k$. Oczywiście grupa symetryczna $S_n$ jest $k$-tranzytywna dla dowolnego $k \leqslant n$. Można także łatwo dowieść, że dla dowolnego $k \leqslant n-2$, $k$-tranzytywna jest także grupa alternująca $A_n$.

Na przełomie XIX i XX wieku okazało się, że grupy te są proste i nie należą do żadnej ze znanych wtedy, nieskończonych serii skończonych grup

Tabela 2. Sporadyczne grupy proste

| Oznaczenie | Nazwa | Rząd | Data odkrycia |
|---|---|---|---|
| $M_{11}$ | Mathieu | $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ | 1861 |
| $M_{12}$ | Mathieu | $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$ | 1861 |
| $M_{22}$ | Mathieu | $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ | 1861 |
| $M_{23}$ | Mathieu | $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$ | 1861 |
| $M_{24}$ | Mathieu | $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$ | 1861 |
| $J_1$ | Janko | $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$ | 1966 |
| $J_2$ | Janko | $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ | 1967 |
| $J_3$ | Janko | $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$ | 1969 |
| $J_4$ | Janko | $2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41$ | 1975 |
| $HS$ | Higman–Sims | $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ | 1968 |
| $Mc$ | McLaughlin | $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ | 1969 |
| $Suz$ | Suzuki | $2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ | 1969 |
| $Ly$ | Lyons | $2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$ | 1971 |
| $He$ | Held | $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$ | 1969 |
| $Ru$ | Rudvalis | $2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$ | 1972 |
| $ON$ | O'Nann | $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$ | 1973 |
| $Co_3$ | Conway | $2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$ | 1969 |
| $Co_2$ | Conway | $2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$ | 1969 |
| $Co_1$ | Conway | $2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$ | 1969 |
| $M(22)$ | Fischer | $2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ | 1969 |
| $M(23)$ | Fischer | $2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$ | 1969 |
| $M(24)'$ | Fischer | $2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$ | 1969 |
| $F_3$ | Thompson | $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$ | 1974 |
| $F_5$ | Harada | $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$ | 1974 |
| $F_2$ | Baby Monster | $2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$ | 1974 |
| $F_1$ | Monster | $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$ $\cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$ | 1974 |

prostych. Oznaczono je symbolami $M_{11}$, $M_{12}$, $M_{22}$, $M_{23}$ i $M_{24}$, gdzie wskaźnik oznacza najmniejszy ze stopni grupy symetrycznej, w której dana grupa jest zawarta.

Grupy $M_{11}$ i $M_{23}$ są grupami 4-tranzytywnymi, natomiast grupy $M_{12}$ i $M_{24}$ są grupami 5-tranzytywnymi. Grupy Mathieu są jedynymi znanymi grupami 4- i 5-tranzytywnymi. Nie wiadomo, czy dla $k > 5$ istnieją grupy $k$-tranzytywne nieizomorficzne ani z grupami symetrycznymi ani z alternującymi.

Grupy Mathieu można opisać na wiele sposobów. W [6] i [10] podane są permutacje odpowiednich grup symetrycznych generujące poszczególne grupy Mathieu. Np.

Twierdzenie 18. *$M_{23} = \langle d, e\rangle$ i $M_{24} = \langle d, e, f\rangle$, gdzie $d, e, f$ oznaczają następujące permutacje*:

$$\begin{aligned} d &= (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23),\\ e &= (3,17,10,7,9)(5,4,13,14,19)(11,12,23,8,18)(21,16,15,20,22),\\ f &= (1,24)(2,23)(3,12)(4,16)(5,18)(6,10)(7,20)(8,14)(9,21)(11,17)\\ &\qquad (13,22)(19,15). \end{aligned}$$

Inny opis tych grup wykorzystuje pojęcie systemu trójek Steinera. Systemem Steinera $S(k, m, n)$ na zbiorze $n$-elementowym $\Omega$ nazywamy taką rodzinę $m$-elementowych podzbiorów zbioru $\Omega$, złożoną z $\binom{n}{k}/\binom{m}{k}$ podzbiorów takich, że każdy $k$-elementowy podzbiór zbioru $\Omega$ zawiera się w dokładnie jednym z podzbiorów tej rodziny.

Twierdzenie 19. *Istnieją jednoznacznie określone systemy trójek Steinera*

$$S(5,6,12), \qquad S(5,8,24), \qquad S(4,5,11), \qquad S(4,7,23), \qquad S(3,6,22)$$

*takie, że*

$$\begin{gathered} Aut(S(5,6,12)) = M_{12}, \qquad Aut(S(5,8,24)) = M_{24},\\ Aut(S(4,5,11)) = M_{11}, \qquad Aut(S(4,7,23)) = M_{23},\\ Aut(S(3,6,22)) = Aut(M_{22}). \end{gathered}$$

Odnotujmy, że $M_{22}$ ma w grupie $\mathrm{Aut}(M_{22})$ indeks 2.

W 1965 roku Z. Janko, analizując rodzinę grup prostych odkrytych przez Ree, odkrył pierwszą po grupach Mathieu sporadyczną grupę prostą. Każda grupa typu Ree ma centralizator pewnej inwolucji izomorficzny z $Z_2 \times PSL_2(3^n)$, a jej 2-podgrupa Sylowa jest izomorficzna z elementarną grupą abelową rzędu 8. Janko zbadał wszystkie grupy proste, które zawierają centralizator inwolucji izomorficzny z $Z_2 \times PSL_2(p^n)$, a ich 2-podgrupy Sylowa są izomorficzne z $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$. W rezultacie ustalił, że albo $p = 3$ i grupa jest typu Ree, albo $p^n = 5$, grupa ma rząd 175 560 i ma jednoznacznie określoną tablicę charakterów. Wynikiem jego rozważań jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 20. *Jeżeli $G$ jest grupą prostą z abelowymi 2-podgrupami Sylowa rzędu 8 i centralizator pewnej iwolucji w $G$ jest izomorficzny z $Z_2 \times L_2(5)$, to*

(a) *$G$ jest jednoznacznie określoną grupą prostą rzędu* 175 560.

(b) *$G$ jest izomorficzna z podgrupą grupy $GL_7(11)$ generowaną przez macierze $Y$ i $Z$ rzędu 7 i 5:*

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & -3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla dowodu istnienia opisanej grupy należało jeszcze pokazać, że grupa $\langle Y, Z\rangle$ ma własności opisane w punkcie (a) powyższego twierdzenia. Nie było to łatwe zadanie. Dowiódł ich M. A. Ward jeszcze w 1966 roku.

Dzięki idei wykorzystanej przez Z. Janko, polegającej na opisie własności grup prostych, w których centralizator pewnej inwolucji ma z góry zadaną postać, odkryto jeszcze 10 dalszych sporadycznych grup prostych: pozostałe grupy Janko $J_2$, $J_3$ i $J_4$, grupy Helda $He$, Lyonsa $Ly$, O'Nanna $ON$, Thompsona $F_3$, Harady $F_5$, Fishera $F_2$ (Baby Monster) i Griessa–Fishera $F_1$ (Monster). Opis własności nowej grupy prostej, utożsamiany w literaturze z jej odkryciem, wyprzedzał jej konstrukcję i dowód jednoznaczności nawet o kilka lat. Dla przykładu opis grupy $J_4$ został podany w 1975 roku, a dowód jednoznaczności w 1980. Podobnie było z grupą Monster, która wśród wszystkich sporadycznych grup prostych charakteryzuje się największym rzędem i zawiera izomorficzne kopie dziewiętnastu pozostałych grup sporadycznych w charakterze podgrup lub grup ilorazowych jej podgrup. Są to: pięć grup Mathieu, trzy grupy Conway'a, $Suz$, $J_2$, $HS$, $Mc$, $He$, $F_2$, $F_3$, $F_5$ oraz trzy grupy Fischera. Pierwsze ślady istnienia grupy Monster zostały odkryte niezależnie przez Amerykanina R. L. Griessa i Niemca B. A. Fischera w 1974 roku. Zaraz potem dowiedziono, że każda nietrywialna reprezentacja liniowa tej grupy ma stopień nie mniejszy niż 196 883, przy czym jest bardzo prawdopodobne, że reprezentacja o takim stopniu istnieje. W 1980 roku Griess skonstruował grupę Monster jako grupę automorfizmów pewnej przemiennej algebry o tym wymiarze. Jak wspomnieliśmy w poprzednim rozdziale, dowód jednoznaczności grupy Monster zakończył klasyfikację SGP.

Grupy $J_2$ i $HJ$ skonstruowali M. Hall i D. Wales jako prymitywne grupy permutacji rangi 3 (tzn. grupy permutacji pewnego skończonego zbioru $\Omega$, której stabilizator dowolnego punktu należącego do $\Omega$ jest podgrupą maksymalną działającą tranzytywnie na trzech rozłącznych podzbiorach, na które rozpada się $\Omega$). Intensywne badania, wywołane przez te konstrukcje, doprowadziły do odkrycia grup Higmana–Simsa $HS$, Suzuki $Suz$, McLaughlina $Mc$ i Rudvalisa $Ru$.

Grupy Fischera $M(22)$, $M(23)$ i $M(24)'$ zostały odkryte w ramach charakteryzacji grup skończonych generowanych przez klasę sprzężoności inwolucji taką, że iloczyn dwóch dowolnych elementów tej klasy ma rząd 1, 2 lub 3. Warto dodać, że grupa Fischera $F_2$, zwana Baby Monster, może być otrzymana w ramach podobnej charakteryzacji nieco szerszej klasy grup, a mianowicie grup generowanych przez klasę sprzężoności inwolucji, dla której iloczyn dwóch dowolnych elementów ma rząd 1, 2, 3 lub 4.

Odnotujmy na koniec, że J. Conway odkrył swoje trzy sporadyczne grupy proste analizując grupę automorfizmów tzw. kraty Leecha o wymiarze 24.

## Bibliografia


[1] M. Aschbacher, *Sporadic Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[2] C. Bagiński, *O problemach Burnside'a*, Wiadom. Mat. 33 (1997), 53–74.

[3] W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1911.

[4] C. W. Curtis, *Pioniers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer*, Amer. Math. Soc., London Math. Soc., 1999.

[5] A. R. Forsyth, *William Burnside*, J. London Math. Soc. 3 (1928), 64–80.

[6] D. Gorenstein, *Finite Simple Groups. An Introduction to Their Classification*, Plenum Press, New York, London, 1982.

[7] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups I, II, III*, Amer. Math. Soc. Surveys and Monographs 40, Providence, Rhode Island (1994–2001).

[8] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[9] T. Y. Lam, *Representations of finite groups: a hundred years, Part I, II*, Notices Amer. Math. Soc. 45 (1998), no. 3-4, 361–372.

[10] J. Mozrzymas, *Zastosowania teorii grup w fizyce*, PWN, Wrocław, 1976.

[11] R. Solomon, *A brief history of the classification of the finite simple groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (2001), no. 3, 315–352.

[12] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley Groups*, Yale Univ., 1967.