ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXIX (2003)

Adrian Langer (Warszawa)

Program Langlandsa według Lafforgue'a

Celem tego artykułu jest wytłumaczenie wyników, a w pewnym stopniu również metod, uzyskanych przez L. Lafforgue'a. W 2002 roku otrzymał on medal Fieldsa za swoje prace dotyczące programu Langlandsa, a dokładniej za dowód odpowiedniości Langlandsa dla ogólnej grupy liniowej nad ciałami funkcyjnymi krzywych w dodatniej charakterystyce. Odpowiedniość ta dotyczy związków między teorią liczb i teorią grup, a jej dowód używa geometrii algebraicznej.

Żeby wyjaśnić, na czym polegają uzyskane przez Lafforgue'a wyniki, posłużymy się prostą analogią z teorią liczb i teorią ciał klas.

Ciałem globalnym nazywamy albo skończone rozszerzenie ciała liczb wymiernych (tzw. *ciało liczbowe*) albo skończone rozszerzenie ciała $\mathbb{F}_p(x)$ funkcji wymiernych jednej zmiennej o współczynnikach w p-elementowym ciele skończonym (tzw. *ciało funkcyjne*).

Okazuje się, że „wszystkie" twierdzenia prawdziwe dla ciał liczbowych mają swoje odpowiedniki dla ciał funkcyjnych, i na odwrót, twierdzenia prawdziwe dla ciał funkcyjnych powinny być prawdziwe dla ciał liczbowych. Oczywiście, dowody dla ciał liczbowych są zazwyczaj dużo trudniejsze, jak widać na przykładzie Wielkiego Twierdzenia Fermata, które w przypadku funkcyjnym jest prostym ćwiczeniem.

Mimo że prace Lafforgue'a dotyczą właśnie ciał funkcyjnych, chciałbym jednak zacząć od omówienia ciał liczbowych, gdzie przynajmniej początkowe wyniki i sformułowania są bardziej intuicyjne.

1. Program Langlandsa dla ciał liczbowych. Historia programu Langlandsa zaczęła się wieki całe przed Langlandsem – od Fermata (XVII wiek), który zauważył, że nieparzysta liczba pierwsza daje się zapisać jako suma dwóch kwadratów liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy jej reszta z dzielenia przez 4 jest równa 1.

Za chwilę zinterpretujemy ten wynik, a na razie zmieńmy temat i rozważmy pewne skończone rozszerzenie Galois K ciała liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. W ciele tym można rozważać pierścień liczb całkowitych A, to jest takich liczb

a, które spełniają równanie $f(a) = 0$ dla pewnego wielomianu f o współczynnikach całkowitych, którego najwyższy współczynnik jest równy 1.

Wówczas każdy niezerowy ideał pierścienia A daje się jednoznacznie zapisać jako iloczyn ideałów pierwszych. W szczególności można tak zapisać ideał $p \cdot A$, gdzie p jest liczbą pierwszą w $\mathbb{Z}$. Oczywiście, grupa Galois $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ działa tranzytywnie na zbiorze ideałów pierwszych wchodzących w rozkład $p \cdot A$.

Chcąc otrzymać dokładniejszą informację o tym rozkładzie, dla ustalonego ideału $\mathcal{P}$ z rozkładu $p \cdot A$, rozważa się *grupę rozkładu* $D_{\mathcal{P}} = \{g \in G : g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}$ oraz *podgrupę bezwładu* $I_{\mathcal{P}} = \{g \in D_{\mathcal{P}} : g(x) \equiv x (\operatorname{mod} \mathcal{P})$ dla każdego $x \in A\}$. Iloraz $D_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}$ jest grupą cykliczną izomorficzną z grupą Galois $\mathrm{Gal}(A/\mathcal{P} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, a pewien jej generator $\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}$ nazywa się *elementem Frobeniusa*. Jeśli rozszerzenie $K/\mathbb{Q}$ jest abelowe (tj. grupa $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ jest abelowa), to $\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}$ zależy tylko od p.

Jeśli teraz mamy reprezentację $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V)$, to $\sigma(\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}})$ jest dobrze zdefiniowanym przekształceniem liniowym podprzestrzeni $V_{\mathcal{P}}$ wektorów niezmienniczych ze względu na obraz $\sigma(I_{\mathcal{P}})$.

Dla prawie wszystkich liczb pierwszych p ideały występujące w rozkładzie nie powtarzają się (tzw. *przypadek nierozgałęziony*), podgrupa bezwładu jest trywialna i $V_{\mathcal{P}} = V$.

Rozważmy teraz *czynnik Eulera*:

$$L_p(\sigma, s) = [\det((\mathrm{Id} - \sigma(\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}})p^{-s})|_{V_{\mathcal{P}}})]^{-1}.$$

Biorąc produkt tych czynników po wszystkich liczbach pierwszych otrzymujemy *L-funkcję Artina* stowarzyszoną z σ:

$$L(\sigma, s) = \prod_p L_p(\sigma, s).$$

Produkt ten jest zbieżny, jeśli $\operatorname{Re} s > 1$ i rozszerza się do funkcji meromorficznej na $\mathbb{C}$.

Wróćmy teraz do twierdzenia Fermata o rozkładzie liczby pierwszej na sumę kwadratów. Jeśli $K = \mathbb{Q}(i)$, to $A = \mathbb{Z}[i]$ i wszystkie ideały pierwsze w A są postaci (n) lub $(n + mi)$. Zatem pytanie o rozkład $p \cdot A$ jest pytaniem kiedy $p = (n + mi)(n - mi) = n^2 + m^2$, czyli kiedy p jest sumą dwóch kwadratów. Oczywiście, bez straty ogólności możemy założyć, że $p > 2$.

Rozważymy reprezentację $\sigma : G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ posyłającą sprzężenie w -1. Oczywiście, σ jest włożeniem G na dwuelementową podgrupę $\mathbb{C}^*$. Żeby znaleźć obraz automorfizmu Frobeniusa Fr_p rozważymy następujące dwa przypadki.

(1) Jeśli p jest generuje ideał pierwszy w A, to ciało reszt $A/\mathcal{P} = A/(p \cdot A)$ jest izomorficzne z $\mathbb{F}_{p^2}$, a zatem automorfizm Frobeniusa jest nietrywialny. Stąd $\sigma(\mathrm{Fr}_p) = -1$.

(2) Jeśli p się rozpada, czyli $p = (n + mi)(n - mi)$, to ciało reszt $A/\mathcal{P}$ jest izomorficzne z $\mathbb{F}_p$ i automorfizm Frobeniusa jest trywialny. Zatem w tym przypadku $\sigma(\mathrm{Fr}_p) = 1$.

Z drugiej strony wiadomo, że automorfizm Frobeniusa spełnia dla każdego $a \in A$ kongruencję $\mathrm{Fr}_p(a) \equiv a^p \pmod p$. W szczególności, $\mathrm{Fr}_p(i) \equiv i^p \pmod p$, skąd

$$\sigma(\mathrm{Fr}_p) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } p \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{jeśli } p \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Porównując te dwa różne sposoby wyznaczenia automorfizmu Frobeniusa widzimy, że p jest sumą dwóch kwadratów wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 1 \pmod 4$.

Jeśli zdefiniujemy charakter $\chi_\sigma : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ przez $\chi_\sigma(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, to nasze rozważania można też podsumować następującym wzorem:

$$\sigma(\mathrm{Fr}_p) = \chi_\sigma(p).$$

W latach dwudziestych XX wieku E. Artin uogólnił powyższy przykład pokazując tzw. *prawo wzajemności*. Mówi ono, że dla dowolnego abelowego rozszerzenia K ciała liczb wymiernych i dowolnej jednowymiarowej reprezentacji $\sigma : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ istnieje pewna liczba naturalna N_σ i charakter Dirichleta $\chi_\sigma : (\mathbb{Z}/N_\sigma\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ takie, że $\sigma(\mathrm{Fr}_p) = \chi_\sigma(p)$. Ponadto L-funkcja Artina stowarzyszona z σ jest równa L-funkcji dla charakteru Dirichleta, zdefiniowanej przez

$$L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} = \sum \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Dopiero jednak Langlands, 40 lat później, sformułował to prawo wzajemności i odpowiednie hipotezy dla n-wymiarowej reprezentacji grupy Galois i to w przypadku nieabelowym.

Dokładniej, zdefiniował on tzw. automorficzne reprezentacje grupy GL_n nad adelami $\mathbb{Q}$ (odpowiada to uogólnieniu charakterów Dirichleta), stowarzyszył z nimi L-funkcje i postawił hipotezę, że każda n-wymiarowa L-funkcja Artina jest L-funkcją pewnej reprezentacji automorficznej π_σ grupy GL_n.

Odpowiedniość $\sigma \leftrightarrow \pi_\sigma$ nazywa się odpowiedniością Langlandsa i właśnie za jej dowód w przypadku funkcyjnym Lafforgue otrzymał medal Fieldsa. Jest to pierwsze ogólne prawo wzajemności w przypadku nieabelowym. Do tej pory były znane jedynie szczególne przypadki dotyczące niskowymiarowych reprezentacji. Na przykład dwuwymiarowy przypadek ciał liczbowych (przy założeniu, że grupa $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ jest rozwiązalna) był jednym z ważnych elementów dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata.

Za dowód dwuwymiarowego przypadku dla ciał funkcyjnych medal Fieldsa otrzymał w 1990 roku Drinfeld, który wprowadził tzw. „sztuki” i zasugerował, że ich użycie powinno w ogólnym przypadku doprowadzić do dowodu odpowiedniości Langlandsa dla ciał funkcyjnych. Ten krok został zrealizowany właśnie przez Lafforgue'a.

2. Odpowiedniość Langlandsa dla ciał funkcyjnych. Zanim spróbujemy wyjaśnić odpowiedniość Langlandsa w przypadku ciał funkcyjnych (a także dla wyżej wymiarowych reprezentacji w przypadku ciał liczbowych) musimy wprowadzić kilka nowych pojęć. Przy okazji z powodów technicznych popełnię parę nadużyć, które mam nadzieję zostaną mi wybaczone ze względu na „popularno-naukowy" charakter artykułu.

Waluacją dyskretną w ciele F nazywamy taki surjektywny homomorfizm grup $v : F^* \to \mathbb{Z}$, że dla dowolnych $a, b \in F^*$ mamy $v(a+b) \geqslant \min(v(a), v(b))$. Dla uproszczenia notacji przyjmijmy też $v(0) = \infty$.

Niech F będzie teraz skończonym rozszerzeniem ciała $\mathbb{F}_p(x)$. Wówczas rozważa sie rodzinę Φ wszystkich waluacji dyskretnych $v : F^* \to \mathbb{Z}$ (które automatycznie muszą zerować się na $\mathbb{F}_p^*$). Z każdą taką waluacją można stowarzyszyć pierścień lokalny $\mathcal{O}_v = \{x \in F : v(x) \geqslant 0\}$ z ideałem maksymalnym $m_v = \{x \in F : v(x) \geqslant 1\}$. Zbiór X wszystkich takich pierścieni tworzy gładką krzywą rzutową nad ciałem $\mathbb{F}_p$, której ciałem funkcji wymiernych jest ciało F. Na odwrót, każdą krzywą rzutową nad $\mathbb{F}_p$ (która jest gładka i spójna nad algebraicznym domknięciem ciała $\mathbb{F}_p$) można uzyskać w ten sposób.

Dla każdego domkniętego punktu $x \in X$ odpowiadającego waluacji v wprowadza się stopień $\deg(x)$ równy wymiarowi ciała reszt $\kappa(x) = \mathcal{O}_v/m_v$ nad ciałem $\mathbb{F}_p$. Z waluacją v można stowarzyszyć normę $\varphi = e^{-\deg(x)v}$. Niech teraz F_v oznacza uzupełnienie ciała F względem tej normy. *Pierścieniem adeli* ciała F nazywamy

$$\mathbb{A}_F = \{(a_v) \in \prod_{v \in \Phi} F_v : v(a_v) \geqslant 0 \text{ dla prawie wszystkich } v\}.$$

Oczywiście, mamy naturalne włożenie ciała F w pierścień adeli, które element $a \in F$ posyła na adel (a_v) taki, że $a_v = a$ dla każdego v.

Ogólnie odpowiedniość Langlandsa wiąże r-wymiarowe reprezentacje grupy Galois rozdzielczego algebraicznego domknięcia $\overline{F}$ nad F z pewnymi reprezentacjami grupy $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ odwracalnych $r \times r$ macierzy o współczynnikach z pierścienia adeli $\mathbb{A}$.

W przypadku ciał funkcyjnych wprowadza się jeszcze pomocniczą liczbę pierwszą $l \neq p$ i rozważa się ciągłe nierozkładalne reprezentacje grupy $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ w grupie $\mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_l)$, gdzie $\overline{\mathbb{Q}}_l$ jest domknięciem algebraicznym ciała $\mathbb{Q}_l$ ułamków liczb l-adycznych całkowitych $\mathbb{Z}_l = \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}$ (o $\mathbb{Q}_l$ można też myśleć jako o uzupełnieniu ciała $\mathbb{Q}$ względem normy l-adycznej). Zbiór klas równoważności wszystkich takich reprezentacji (spełniających jeszcze pewien techniczny warunek na wyznaczniki) oznaczmy przez $\mathcal{G}_r$.

Z każdą taką reprezentacją $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ podobnie jak w przypadku ciał liczbowych można stowarzyszyć L-funkcję $L(\sigma, s)$. Definicja tej L-funkcji została wprowadzona przez A. Grothendiecka i jest praktycznie taka sama jak w opisanym wyżej przypadku ciał liczbowych.

Mianowicie dla każdego punktu $x \in X$ wprowadza się podgrupę rozkładu D_x (jest to grupa Galois pewnego rozdzielczego domknięcia ciała F_x) i podgrupę bezwładu I_x. Ich iloraz D_x/I_x jest izomorficzny z grupą Galois Γ_x domknięcia algebraicznego ciała reszt $\kappa(x)$ nad tym ciałem reszt. W tej grupie Galois Γ_x mamy naturalny wyróżniony element Fr_x odpowiadający wyciąganiu pierwiastka stopnia $p^{\deg(x)}$. Teraz używając reprezentacji σ można zdefiniować obraz $\sigma_x(\mathrm{Fr}_x)$ w $\mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_l)$. Mając $\sigma_x(\mathrm{Fr}_x)$ określamy czynniki Eulera, których iloczynem jest nasza L-funkcja. Ściślej rzecz biorąc rozpatruje się tylko częściową L-funkcję będącą iloczynem po punktach $x \in X$ w których σ jest nierozgałęzione, tj. tych x gdzie σ_x ma r różnych wartości własnych (nazywanych *wartościami własnymi Frobeniusa* reprezentacji σ).

Druga strona odpowiedniości Langlandsa jest trochę trudniejsza do ścisłego zdefiniowania. Najpierw wprowadza się ostrzowe (ang. „cuspidal”) funkcje automorficzne $\varphi : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \overline{\mathbb{Q}}_l$, tj. funkcje niezmiennicze ze względu na działanie grupy $\mathrm{GL}_r(F)$ spełniające pewne dodatkowe warunki (podobnie w przypadku liczbowym wprowadza się formy modularne np. jako formy różniczkowe określone na górnej półpłaszczyźnie $\mathbb{H}$ niezmiennicze ze względu na działanie $SL_2(\mathbb{Z})$, a ostrzowe formy modularne odpowiadają formom modularnym znikającym w ostrzach obszaru fundamentalnego tego działania). Potem rozważa się tutaj zbiór $\mathcal{A}_r$ klas reprezentantów wszystkich reprezentacji grupy $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ będących, w pewnym uproszczeniu, składnikami prostymi naturalnej reprezentacji $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ na przestrzeni wszystkich automorficznych funkcji ostrzowych. Takie reprezentacje nazywa się *nierozkładalnymi ostrzowymi reprezentacjami automorficznymi.*

Każda taka reprezentacja π jest wyznaczona przez swoje składniki lokalne, tj. przez indukowane nierozkładalne reprezentacje π_x grup $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Oczywiście z nimi również można stowarzyszyć czynniki Eulera $L_x(\pi, s)$, a biorąc ich iloczyn można zdefiniować L-funkcję reprezentacji π (znowu definiuje się tylko częściową L-funkcję). Poza skończoną liczbą punktów π_x ma r różnych wartości własnych, nazywanych *wartościami własnymi Heckego.*

Teraz możemy w końcu sformułować główny rezultat otrzymany przez Lafforgue'a:

Twierdzenie 1. *Istnieje bijekcja pomiędzy zbiorami $\mathcal{A}_r$ i $\mathcal{G}_r$ taka, że odpowiednie L-funkcje $L(\pi, s)$ i $L(\sigma(\pi), s)$ są równe. Ponadto wartości własne Heckego reprezentacji π są równe odpowiednim wartościom własnym Frobeniusa reprezentacji $\sigma(\pi)$.*

Jako wnioski z tego twierdzenia Lafforgue wyprowadził hipotezę Ramanujana-Peterssona mówiącą, że wartości własne Heckego (przy dowolnym izomorfizmie ciał $\overline{\mathbb{Q}}_l$ i $\mathbb{C}$; takie izomorfizmy istnieją z aksjomatu wyboru) są liczbami algebraicznymi o module 1, oraz hipotezę Deligne'a mówiącą, że obrazy wartości własnych Frobeniusa też mają moduł 1.

W przypadku ciał liczbowych najprostszym odpowiednikiem Twierdzenia 1 jest twierdzenie Kroneckera-Webera. Mówi ono, że maksymalny abelowy iloraz grupy Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ jest izomorficzny z granicą $\lim_{\leftarrow}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ grup Galois rozszerzeń cyklotomicznych $\mathbb{Q}(\zeta_N)$. Porównanie wartości Frobeniusa z wartościami Heckego (czyli twierdzenie Artina) mówi tu, że jeśli p nie dzieli N, to obraz Fr_p jest równy p modulo N. To pozwala na odtworzenie rozkładu liczby pierwszej p w pierścieniu $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ (czyli uogólnienie twierdzenia Fermata).

3. Geometria algebraiczna, czyli parę słów o dowodzie. Jak już wcześniej wspominaliśmy, idea dowodu odpowiedniości Langlandsa należy do Drinfelda i nie tu należy szukać zasługi Lafforgue'a.

Drinfeld wprowadził tzw. *sztuki* (w okresie powstawania była używana mniej enigmatyczna nazwa *F-snopy*; F pochodzi od Frobeniusa). Jeśli S jest rozmaitością zdefiniowaną nad ciałem $\mathbb{F}_p$, to można zdefiniować jej endomorfizm Frobeniusa $F_S : S \to S$ polegający na podnoszeniu do p-tej potęgi.

Sztuką rangi r na rozmaitości S zdefiniowanej nad ciałem $\mathbb{F}_p$ nazywa się wiązkę wektorową E na produkcie $X \times S$ krzywej X i rozmaitości S, razem z dwoma włożeniami wiązki E i wiązki $(\mathrm{Id}_X \times_{\mathbb{F}_p} F_S)^* E$ w pewną inną wiązkę E' w taki sposób, że różnią się one od E' tylko na wykresach pewnych odwzorowań $S \to X$ nazywanych nieskończonością i zerem. Odwzorowania te indukują odwzorowanie z rozmaitości (dokładniej: stosu) Sht_r klasyfikującego sztuki rangi r nad $\overline{\mathbb{F}}_p$ do produktu $X \times X$.

A. Grothendieck wprowadził dla dowolnej rozmaitości Z tzw. *kohomologie l-adyczne* $H^i(Z, \mathbb{Q}_l)$ mające szereg dobrych własności pozwalających między innymi na wyznaczanie liczby punktów stałych endomorfizmu właściwej (odpowiednik zwartości w dodatniej charakterystyce) gładkiej rozmaitości przy pomocy śladów odwzorowania indukowanego na kohomologiach l-adycznych (jest to odpowiednik wzoru Lefschetza dobrze znanego z kursu topologii algebraicznej). Stosując ten wzór do złożeń endomorfizmu Frobeniusa można bez kłopotów obliczyć liczbę punktów rozmaitości Z nad ciałem $\mathbb{F}_{p^r}$, a stąd można łatwo wyliczyć tzw. ζ-funkcję dla Z uogólniającą ζ-funkcję Riemanna i będącą odpowiednikiem L-funkcji rozmaitości.

Stosując powyższe idee do Sht_r i realizując reprezentacje z $\mathcal{A}_r$ i $\mathcal{G}_r$ w kohomologiach l-adycznych Lafforgue był w stanie dowieść odpowiedniości Langlandsa przez indukcję za względu na r.

Żeby się przekonać, że nie jest to wcale proste, wystarczy zauważyć, że po pierwsze Sht_r nie jest skończonego typu (podobnie jak przestrzeń klasyfikująca wszystkie wiązki na krzywej). Ten problem daje się obejść w klasyczny dosyć sposób traktując Sht_r jako granicę naturalnie zdefiniowanych rozmaitości $\mathrm{Sht}_r^{\leqslant P}$, z których każda klasyfikuje tylko część sztuk. Nawet jeśli jednak uda się pokonać ten problem, to pozostaje inny: tak uzyskane rozmaitości nie są zwarte i nie można stosować wzoru Lefschetza. I tutaj leży chyba główna zasługa Lafforgue'a, któremu udało się skonstruować pewne uzwarcenia rozmaitości $\mathrm{Sht}_r^{\leqslant P}$, w kohomologiach których można zrealizować reprezentację grupy $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ odpowiadającą sumie $\pi \otimes \sigma(\pi) \otimes \sigma^\vee(\pi)$ po wszystkich $\pi \in \mathcal{A}_r$ ($\sigma^\vee$ jest pewną reprezentacją kanonicznie wyznaczoną przez σ). Końcowy wynik, czyli odpowiedniość Langlandsa, otrzymuje się przez porównanie wzoru Grothendiecka-Lefschetza z wzorem śladu Arthura-Selberga.

Na zakończenie chciałbym wyjaśnić, skąd w ogóle bierze się związek między reprezentacjami automorficznymi a wiązkami wektorowymi. Załóżmy, że mamy daną wszędzie nierozgałęzioną reprezentację automorficzną π grupy $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ i połóżmy $\mathcal{O} = \prod_{x\in|X|} \mathcal{O}_x$. Wtedy przestrzeń $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$-niezmienników w π jest jednowymiarowa i rozpinana przez wektor $v = \otimes_{x\in|X|} v_x$. Wektor ten wyznacza $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$-niezmienniczą funkcję na $\mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, czyli funkcję na $\mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$. Takie funkcje są w bijekcji z wiązkami wektorowymi rangi r na X. Bijekcja ta jest realizowana przy pomocy trywializacji wiązki w punktach $x \in |X|$ i na dużym zbiorze otwartym w X, przy czym zmiany trywializacji odpowiadają dzieleniu przez $\mathrm{GL}_r(F)$ i $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$.

Fakt ten został zauważony już przez A. Weila, ale niestety nie pozwala on na skonstruowanie dobrej reprezentacji $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ w przestrzeni moduli wiązek wektorowych na krzywej. Fakt, że można skonstruować bardziej skomplikowaną reprezentację dla przestrzeni moduli sztuk, został w przypadku $r = 2$ zauważony przez Drinfelda i uogólniony do dowolnej rangi przez Lafforgue'a.

Poniżej podaję tylko kilka przeglądowych prac dotyczących programu Langlandsa, w których można znaleźć pełną bibliografię. Polecam zwłaszcza elementarne wprowadzenie S. Gelbarta [3] do programu Langlandsa nad ciałami liczbowymi oraz, wymagającą pewnego przygotowania, pracę E. Frenkela [2].

Podziękowania:
Dziękuję Profesorowi J. Browkinowi za uważne przeczytanie wstępnej wersji tego artykułu i cenne uwagi.

Bibliografia

[1] J. Arthur, *The principle of functoriality*, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (2003), 39–53.

[2] E. Frenkel, *Recent advances in the Langlands program*, preprint. `http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG/0303074`

[3] S. Gelbart, *An elementary introduction to the Langlands program*, Bull. Amer. Math. Soc. 10 (1984), 177–219.

[4] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et applications*, Doc. Math., Extra Volume ICM 1998, Vol. II, 563–570.

[5] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld , formule de traces d'Arthur Selberg et correspondance de Langlands*, Proc. ICM, Beijing 2002, tom I, 383–400.

[6] G. Laumon, *La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions (d'après Laurent Lafforgue)*, Séminaire Bourbaki 1999-2000, no. 873.

[7] G. Laumon, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands (d'après Laurent Lafforgue)*, Gaz. Math. 88 (2001), 11–33.

Adrian Langer

Instytut Matamatyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02–097 Warszawa