ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLIV (2008)

Zbigniew Świtalski (Zielona Góra)

O kojarzeniu małżeństw i rekrutacji kandydatów do szkół

Co ma wspólnego kojarzenie małżeństw z rekrutacją kandydatów do szkół? Okazuje się, że ma i to dużo. Jako pierwsi zauważyli to matematycy amerykańscy David Gale i Lloyd Stowell Shapley, którzy w 1962 roku opublikowali w *American Mathematical Monthly* swój słynny artykuł *College admissions and the stability of marriage* [GS62]. Gale i Shapley przedstawili prosty formalny model procesu rekrutacji, zdefiniowali pojęcie optymalnego przydziału kandydatów do szkół i podali elegancki dowód istnienia przydziału optymalnego. Swoje rozważania ilustrowali właśnie modelem kojarzenia małżeństw, który można traktować jako pewną uproszczoną wersję modelu rekrutacji (zob. p. 2). We współczesnej literaturze oba modele wchodzą w zakres rozbudowanej teorii kojarzenia z dwustronnymi preferencjami (*two-sided matching theory*). Warto bliżej przyjrzeć się tej ciekawej i mającej wiele zastosowań praktycznych problematyce, zwłaszcza że jest ona jeszcze mało spopularyzowana w polskiej literaturze matematycznej (zob. [Świ05], [ADG03], [Kas07]).

W dalszej części artykułu omówię problemy, jakie pojawiają się przy stosowaniu tradycyjnych metod rekrutacji, opiszę krótko model Gale'a-Shapleya, przedstawię kilka ciekawych zagadnień teoretycznych związanych z tym modelem, a na zakończenie wspomnę o możliwych zastosowaniach prezentowanej teorii.

1. Proces rekrutacji. Gale'a i Shapleya zainspirował artykuł, który opublikował *New Yorker* 10 września 1960 roku [Gal01]. Autor artykułu przedstawiał problemy związane z rekrutacją kandydatów do Uniwersytetu Yale. Ponieważ kandydaci mogli zgłaszać się jednocześnie do wielu uczelni, Uniwersytet miał problem z ustaleniem, którzy kandydaci spośród zgłaszających się (i przyjętych) ostatecznie podejmą naukę. Trudno było też wymagać od kandydatów, aby podawali informację o swoich preferencjach (np. o tym, czy Uniwersytet Yale mają na pierwszym, czy na dalszym miejscu swojej listy preferencji), gdyż kandydaci mogli obawiać się tego, że jeśli wskażą inne uczelnie jako lepsze od Uniwersytetu Yale, to zmniejszą swoje szanse na przyjęcie.

Niektóre z problemów opisywanych przez Gale'a i Shapleya pojawiły się po 40 latach w Polsce, w momencie wprowadzania systemów rekrutacji opartych na zewnętrznych testach kompetencji. Dotyczyło to szkół średnich (ponadgimnazjalnych), do których rozpoczęto przyjmowanie na podstawie testów kończących gimnazjum w 2000 roku oraz szkół wyższych, w których wprowadzono systemy rekrutacji oparte na wynikach nowej matury w 2005 roku.

Sytuacja w szkołach ponadgimnazjalnych wyglądała następująco[1]. W roku 2000 każdy kandydat kończący gimnazjum mógł zgłosić się tylko do jednej szkoły ponadgimnazjalnej. Kandydatom, którzy nie dostali się do wybranych szkół (było wśród nich wielu z wysoką punktacją z testów, którzy nie dostali się do najbardziej obleganych szkół) pozostawało poszukiwanie miejsc w szkołach nisko notowanych w rankingach (bo tylko w takich zostały jeszcze wolne miejsca). Rodziło to wiele frustracji wśród kandydatów i rodziców, a wprowadzony system był powszechnie krytykowany (zob. [Paw00]). W roku 2002 dopuszczono możliwość składania podań do dowolnej liczby szkół (w roku 2001, ze względu na reformę oświatową i wprowadzenie 3-letnich liceów rekrutacji nie przeprowadzono). Skutek był taki, że wszystkie miejsca w najlepszych liceach zostały zajęte w 1. etapie rekrutacji przez najlepszych kandydatów. Wszyscy pozostali kandydaci (była ich większość) musieli z niepokojem oczekiwać na stopniowe zwalnianie się miejsc i możliwość dostania się do jakiejkolwiek szkoły (wielu z nich musiało podejmować trudne decyzje – czy pozostać w szkole, w której zwolniło się szybciej miejsce, czy czekać dłużej na zwolnienie się miejsc w innych, lepszych szkołach). W roku 2003 ograniczono liczbę szkół, do których można było się zgłaszać do trzech, a jednocześnie rozpoczęto wprowadzanie (w dużych miastach) komputerowych systemów rekrutacji, które skutecznie rozwiązały większość problemów związanych z niedoskonałościami mechanizmów rekrutacji.

Szkoły wyższe rozpoczęły rekrutację według nowego systemu w 2005 roku. Pojawiły się tutaj te same problemy, które można było zaobserwować przy rekrutacji do szkół średnich w 2002 roku. Zgodnie z działającym do tej pory systemem, kandydaci mogą składać podania jednocześnie na wiele kierunków, w wyniku czego – w pierwszym etapie rekrutacji – bardzo często dobrzy kandydaci dostają się na kilka kierunków, a słabsi na żaden. Kandydaci przyjęci na kilka kierunków stopniowo wycofują swoje zgłoszenia, a na wolne miejsca dostają się kandydaci z list oczekujących. Uczelnie przeprowadzają rekrutację w dwóch lub nawet trzech etapach. Rodzi to wiele problemów organizacyjnych, a żadna uczelnia do końca nie wie, którzy z przyjętych kandydatów podejmą naukę, a którzy w ostatniej chwili (nawet po rozpoczęciu roku akademickiego) zrezygnują. Jednocześnie większość kandydatów

[1] Informacje, które przedstawiam dotyczą szkół średnich w Poznaniu. W innych dużych miastach systemy rekrutacji działały podobnie.

trzymana jest przez długi czas w niepewności, nie wiedząc, gdzie w końcu zostaną przyjęci (i czy w ogóle gdzieś zostaną przyjęci).

Podane przykłady pokazują, że tradycyjny, zdecentralizowany system rekrutacji (tzn. taki, w którym każda szkoła samodzielnie przyjmuje kandydatów) może działać w sposób bardzo nieefektywny, rodząc wiele uciążliwości zarówno dla kandydatów, jak i dla szkół.

Gale i Shapley po przeczytaniu artykułu w *New Yorkerze* zaczęli zastanawiać się, czy możliwy jest sposób rekrutacji, który „za jednym zamachem" likwidowałby te wszystkie problemy i który bez specjalnego zamieszania, bez uciążliwości i niepewności automatycznie przydzielałby kandydatów do szkół tak, aby w jak największym stopniu zaspokoić oczekiwania zarówno kandydatów, jak i szkół (każdy kandydat chciałby się dostać do możliwie jak najlepszej – ze swojego punktu widzenia – szkoły, a każda szkoła chciałaby mieć jak najlepszych kandydatów).

Rozwiązanie, które znaleźli autorzy artykułu [GS62] okazało się bardzo proste, a jednocześnie matematycznie eleganckie. Wszystko sprowadza się do odpowiedniego zdefiniowania przydziału optymalnego, a następnie wykazania (za pomocą konstrukcji specjalnego algorytmu), że zawsze istnieje dokładnie jeden przydział optymalny. Przedstawię teraz konstrukcję Gale'a-Shapleya.

2. Formalny model systemu rekrutacji. Zakładamy, że dany jest skończony zbiór kandydatów $K = \{K_1, K_2, ..., K_n\}$ i skończony zbiór szkół $S = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$[2]. Dla każdego kandydata K_i określony jest ostry liniowy porządek $P(K_i)$ w zbiorze S odpowiadający jego preferencjom (tzn. kandydat K_i jest w stanie ustawić wszystkie szkoły w kolejności od najlepszej do najgorszej, przy czym żadne dwie różne szkoły nie mogą być tak samo dobre). Z kolei każda szkoła jest w stanie ustawić kandydatów w kolejności od najlepszego do najgorszego, tzn. dla szkoły S_j w zbiorze K określony jest ostry liniowy porządek $P(S_j)$[3].

Przy rekrutacji do szkół średnich lub wyższych w Polsce porządek $P(S_j)$ najczęściej wyznaczony jest za pomocą odpowiedniej punktacji (punkty

[2] Pojęcie „szkoły" należy tutaj traktować bardzo szeroko. „Szkołą" może być kierunek lub wydział na uczelni, może też być klasa o określonym profilu, do której prowadzona jest osobna rekrutacja.

[3] Często zakłada się (tak też zrobili Gale i Shapley [GS62]), że kandydat K_i określa porządek $P(K_i)$ jedynie w pewnym podzbiorze $S(K_i)$ zbioru S. Elementy zbioru $S(K_i)$ można interpretować jako szkoły akceptowalne przez K_i, tzn. takie, w których gotowy jest on podjąć naukę. Założenie to jest bardzo naturalne, gdyż na ogół kandydaci składają podania tylko do kilku wybranych szkół. Podobnie można zakładać, że preferencje szkół są określone w pewnych podzbiorach zbioru K (każda szkoła może ustalić pewne wstępne warunki, które musi spełnić kandydat chcący uczyć się w tej szkole). Podany tutaj model można traktować jako model podstawowy. O różnych jego uogólnieniach będzie mowa w p. 3.

przyznawane są za wyniki testów gimnazjalnych, wyniki „nowej matury” lub inne osiągnięcia kandydata)[4]. Zakładamy też, że każdy kandydat może być przyjęty do co najwyżej jednej szkoły, a każda szkoła S_j może przyjąć co najwyżej q_j kandydatów (q_j będę nazywał limitem szkoły S_j). Chcemy znaleźć przydział kandydatów do szkół tak, aby liczba kandydatów w szkole S_j nie przekroczyła q_j (przy czym niektórzy kandydaci być może nie znajdą się w żadnej szkole). Używając języka teorii grafów możemy powiedzieć, że szukamy grafu dwudzielnego łączącego zbiory wierzchołków K i S i takiego, że każdy wierzchołek ze zbioru K ma stopień co najwyżej 1, a każdy wierzchołek S_j ze zbioru S – stopień co najwyżej q_j.

Aby zdefiniować pojęcie przydziału optymalnego warto posłużyć się nieco prostszym modelem kojarzenia małżeństw, którym posługiwali się właśnie Gale i Shapley. W modelu tym mamy n kobiet ze zbioru $K = \{K_1, K_2, ..., K_n\}$ i n mężczyzn ze zbioru $M = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$. Każda kobieta porządkuje mężczyzn w kolejności od najlepszego do najgorszego, a każdy mężczyzna określa kolejność zgodną ze swoimi preferencjami w zbiorze kobiet. Chcemy utworzyć n par małżeńskich postaci K_iM_j (symbolem K_iM_j oznaczam parę nieuporządkowaną $\{K_i, M_j\}$). Szukamy więc skojarzenia[5] zawierającego n krawędzi w grafie dwudzielnym pełnym łączącym K i M (odwołując się do poprzedniego modelu można powiedzieć, że tutaj wszystkie limity q_j są równe 1).

Kluczowym pojęciem w teorii Gale'a-Shapleya jest pojęcie przydziału (lub skojarzenia) stabilnego. Dla danego skojarzenia s oznaczmy symbolem $s(K_i)$ męża kobiety K_i, a symbolem $s(M_j)$ żonę mężczyzny M_j.

Definicja 1 . Mówimy, że para K_iM_j blokuje skojarzenie s, jeśli kobieta K_i woli mężczyznę M_j od swojego męża $s(K_i)$, a mężczyzna M_j woli kobietę K_i od swojej żony $s(M_j)$.

Para blokująca dla s oczywiście nie może być parą małżeńską (zakładamy, że relacja „x woli y” jest antyzwrotna). Jest to para, w której kobieta i mężczyzna „mają się ku sobie” chociaż nie są małżeństwem. Mężczyźni i kobiety z takich par będą mieli tendencję do zdradzania swoich partnerów, a więc każdy układ małżeństw zawierający pary blokujące może się szybko „rozsypać”. Stabilność oznacza właśnie trwałość układu małżeńskiego, czyli brak tendencji do „rozsypywania się” takiego układu. Naturalna jest wobec tego następna definicja.

[4] Założenie o liniowości porządku $P(S_j)$ w tej sytuacji często nie będzie spełnione, gdyż może się zdarzyć (i zdarza się), że niektórzy kandydaci będą mieli tę samą liczbę punktów z testów. O modelach bez założenia liniowości preferencji zob. p. 3.

[5] Skojarzenie to zbiór rozłącznych par nieuporządkowanych, w których pierwszy element należy do K, a drugi do M.

DEFINICJA 2 . Mówimy, że skojarzenie s jest stabilne, jeśli s nie jest blokowane przez żadną parę K_iM_j.

Rozważmy jako przykład zbiór K złożony z trzech pań: *Agaty*, *Beaty* i *Celiny* oraz zbiór M złożony z trzech panów: *Tadeusza*, *Witolda* i *Zbigniewa*. Załóżmy, że preferencje pań i panów są następujące:

$$\begin{array}{ll} A: TWZ & T: CAB \\ B: TWZ & W: ABC \\ C: WTZ & Z: ACB \end{array}$$

(Zapis $A: TWZ$ oznacza, że Agacie najbardziej odpowiada Tadeusz, na drugim miejscu stawia ona Witolda, a najmniej jej odpowiada Zbigniew – ciąg TWZ nazywamy listą preferencji Agaty; podobny sens mają pozostałe oznaczenia). Mamy w tym przypadku dokładnie 6 skojarzeń (tyle, ile jest permutacji w zbiorze 3-elementowym). Łatwo można sprawdzić, że tylko jedno z nich jest stabilne, a mianowicie $s = \{AW, BZ, CT\}$ (Agata wychodzi za Witolda, Beata za Zbigniewa, a Celina za Tadeusza). Zauważmy, że gdyby Agata i Celina zamieniły się mężami, a więc gdybyśmy utworzyli skojarzenie $t = \{AT, BZ, CW\}$, to obie panie skorzystałyby na tym (panowie T i W oczywiście by stracili). Skojarzenie t nie daje jednak stabilnego układu małżeństw (Beata woli Witolda od Zbigniewa, a Witold woli Beatę od Celiny, a więc Beata i Witold blokują skojarzenie t).

Jeśli więc chcemy poszukiwać możliwie najkorzystniejszych rozwiązań (przynajmniej dla którejś ze stron), to powinniśmy poruszać się tylko w zbiorze skojarzeń stabilnych. Zbiór ten często zawiera więcej niż jeden element (na przykład gdyby w poprzednim przykładzie Beata zmieniła swoje preferencje na ZTW, to oba poprzednie skojarzenia, zarówno s, jak i t, byłyby stabilne). Ma więc sens następująca definicja:

DEFINICJA 3. Mówimy, że skojarzenie stabilne s jest optymalne dla kobiet jeśli dla każdej kobiety K_i i dla dowolnego skojarzenia stabilnego t zachodzi

$$(*) \qquad s(K_i) >_i t(K_i) \quad \text{lub} \quad s(K_i) = t(K_i)$$

(symbol $>_i$ oznacza tutaj relację preferencji dla kobiety K_i).

Inaczej mówiąc, skojarzenie optymalne jest, dla dowolnej kobiety, nie gorsze od dowolnego skojarzenia stabilnego. Podobnie można zdefiniować skojarzenie optymalne dla mężczyzn.

Łatwo zauważyć, że w każdym problemie kojarzenia może istnieć co najwyżej jedno skojarzenie optymalne dla kobiet i co najwyżej jedno optymalne dla mężczyzn (na przykład w poprzednim przykładzie, przy preferencjach Beaty zmienionych na ZTW skojarzenie t jest optymalne dla kobiet, a s – optymalne dla mężczyzn). Gale i Shapley udowodnili, że skojarzenia optymalne zawsze istnieją i że można je wyznaczyć za pomocą następującego algorytmu (w podanym algorytmie, podobnie jak u Gale'a-Shapleya [GS62], stroną aktywną są mężczyźni – otrzymamy w tej sytuacji rozwiązanie optymalne dla mężczyzn; gdyby natomiast stroną inicjującą były kobiety, to otrzymane rozwiązanie byłoby optymalne dla kobiet):

1. Każdy mężczyzna oświadcza się najlepszej kobiecie na swojej liście preferencji.
2. Jeśli którejś z kobiet oświadczył się więcej niż jeden mężczyzna, to kobieta ta wybiera najlepszego z nich, a pozostałym odmawia.
3. Mężczyźni, których oświadczyny nie zostały przyjęte przez którąś z kobiet, skreślają tę kobietę ze swojej listy preferencji. Przechodzimy do kroku 1.

Algorytm kończy się, gdy w którymś z etapów w kroku 1. wszyscy mężczyźni oświadczą się różnym kobietom. Musi to nastąpić po skończonej liczbie etapów, gdyż żaden mężczyzna nie może być odrzucony więcej niż $n-1$ razy (gdyby mężczyzna był odrzucony $n-1$ razy, to w ostatnim etapie musiałby być przyjęty przez jedyną wolną kobietę, bo pozostałe byłyby „zajęte"). Łatwo też zauważyć, że otrzymane skojarzenie s jest stabilne (gdyby para K_iM_j była blokująca, to w którymś z kroków algorytmu M_j byłby odrzucony przez K_i – bo K_i poprzedza $s(M_j)$ na liście preferencji M_j – a więc mąż K_i musi być lepszy od M_j, a stąd para K_iM_j nie może być blokująca).

Dowód optymalności otrzymanego skojarzenia jest nieco dłuższy, ale również elementarny [GS62].

Wróćmy teraz do modelu rekrutacji. Przyjmijmy dla uproszczenia, że liczba kandydatów jest równa sumie wszystkich limitów ($n = \sum q_j$) oraz, że w każdym przydziale wszystkie limity szkół są wyczerpane (tzn. każdy kandydat znajdzie się w jakiejś szkole). Stabilność definiujemy tutaj analogicznie jak dla małżeństw. Para K_iS_j blokuje przydział s jeśli kandydat K_i woli szkołę S_j od tej, do której został przydzielony, a szkoła S_j woli K_i od któregoś z przyjętych do niej kandydatów. Jeśli kandydaci są oceniani za pomocą punktacji z testów, to istnienie par blokujących oznacza, że niektórzy kandydaci nie są przyjęci do szkół, w których mają punktację wyższą od punktacji najgorszego przyjętego kandydata, mimo że woleliby być w takiej szkole niż w tej, do której zostali przyjęci. System rekrutacji, który dopuszczałby do takich sytuacji mógłby być uważany za ewidentnie niesprawiedliwy.

Wśród przydziałów stabilnych zawsze istnieje dokładnie jeden optymalny dla kandydatów (K-optymalny) i dokładnie jeden optymalny dla szkół (S-optymalny). Przydział K-optymalny jest to taki przydział stabilny, który jest dla wszystkich kandydatów lepszy (lub przynajmniej tak samo dobry) niż wszystkie inne przydziały stabilne. Przydział optymalny można otrzymać za pomocą algorytmu analogicznego do algorytmu kojarzenia małżeństw. Zaczynamy od przydzielenia wszystkich kandydatów do najbardziej odpowiadających im szkół. W kolejnym kroku każda szkoła S_j tworzy ranking wszystkich kandydatów, którzy się do niej zgłosili i zostawia q_j najlepszych, a pozostałych odrzuca. Kandydaci odrzuceni ze szkoły S_j wykreślają ją ze swojej listy preferencji i wszystko zaczyna się od nowa. Otrzymujemy w ten sposób przydział optymalny dla kandydatów.

Algorytm dający przydział optymalny dla szkół wyglądałby natomiast następująco. Najpierw każda szkoła S_j przyjmuje q_j najlepszych kandydatów. Kandydaci, którzy dostali się do więcej niż jednej szkoły wycofują swoje zgłoszenia ze wszystkich szkół oprócz najlepszej. Na wolne miejsca przyjmowani są kolejni kandydaci zgodnie z kolejnością na listach rankingowych poszczególnych szkół. Procedura ta trwa tak długo, aż wszyscy kandydaci zostaną przyjęci. Mniej więcej tak właśnie działa obecny system rekrutacji do szkół wyższych w Polsce, z zastrzeżeniem, że na początku kandydaci składają podania nie do wszystkich, a tylko do wybranych szkół (a raczej na kilka wybranych kierunków).

3. Rozwój teorii stabilnych skojarzeń. Artykuł Gale'a i Shapleya zapoczątkował burzliwy rozwój teorii i zastosowań modelu dwustronnych skojarzeń. Prace poświęcone tej tematyce ukazują się głównie na łamach czasopism matematycznych, informatycznych i ekonomicznych, ale interesują się nią również specjaliści z wielu innych dziedzin (psychologii, socjologii, biologii, fizyki i innych). Opublikowano też 3 monografie poświęcone tej problematyce ([GI89], [RS92], [Knu97]).

Badania teoretyczne można podzielić, z grubsza, na dwa nurty[6]. Nurt pierwszy obejmuje analizę własności podstawowego modelu Gale'a-Shapleya, szukanie jego powiązań z różnymi działami matematyki i analizę różnych modyfikacji algorytmu GS (ewentualnie alternatywnych algorytmów prowadzących do skojarzeń stabilnych). Nurt drugi (często inspirowany przez potrzeby praktyki) zajmuje się analizą różnych uogólnień podstawowego modelu GS (np. modyfikowane są założenia o preferencjach, limitach itd.).

Do nurtu pierwszego zaliczyć można na przykład badanie struktury zbioru skojarzeń stabilnych w modelu GS. W zbiorze tym, w oczywisty sposób, można wprowadzić dwa naturalne porządki (skojarzenie s jest lepsze od skojarzenia t dla kobiet, jeśli zachodzi $(*)$, drugi porządek jest definiowany tak samo, ale uwzględniamy mężczyzn). Okazuje się, że każdy z tych porządków wyznacza w zbiorze skojarzeń stabilnych strukturę kraty rozdzielnej [Gal01]. Co więcej, dowolna skończona krata rozdzielna jest kratą skojarzeń stabilnych w pewnym modelu GS [Bla84].

---

[6] Oczywiście podział taki jest trochę nieprecyzyjny, gdyż w wielu publikacjach oba nurty „zazębiają się".

Można się zastanawiać nad liczbą skojarzeń stabilnych w modelu GS. Załóżmy, że mamy n kobiet i n mężczyzn i chcemy określić minimalną i maksymalną liczbę skojarzeń stabilnych przy różnych układach preferencji. Minimalna liczba jest równa 1 (jeśli np. wszystkie kobiety lub wszyscy mężczyźni mają te same preferencje, to algorytm GS zarówno dla kobiet, jak i dla mężczyzn, daje to samo rozwiązanie i łatwo udowodnić, że jest to w tym przypadku jedyne rozwiązanie stabilne). Nie wiadomo natomiast w jaki sposób zależy od n maksymalna liczba skojarzeń stabilnych – problem ten nie został do tej pory rozwiązany (zob. [Gal01]). Znane są jedynie wyniki cząstkowe – np. Irving i Leather [IL87] pokazali, że jeśli n jest potęgą 2, to istnieje układ preferencji dający co najmniej 2^{n-1} skojarzeń stabilnych.

Ważną własnością rozwiązania Gale'a-Shapleya jest tzw. niemanipulowalność (*strategy-proofness*). Załóżmy, że mamy zbiór kandydatów K i zbiór szkół S oraz układ preferencji kandydatów i szkół $P = (P(K_1), ..., P(K_n), P(S_1), ..., P(S_m))$. Załóżmy też, że określona jest jakaś metoda przyporządkowująca każdemu układowi preferencji P skojarzenie $s(P)$. Metoda ta jest manipulowalna, jeśli dla pewnego kandydata K_i istnieją preferencje $P'(K_i)$ różne od $P(K_i)$ i takie, że

$$(**) \qquad [s(P')(K_i)] >_i [s(P)(K_i)],$$

gdzie P' jest układem powstałym z P przez zastąpienie $P(K_i)$ przez $P'(K_i)$ (symbol $>_i$ we wzorze $(**)$ oznacza relację $P(K_i)$). Wzór $(**)$ oznacza, że szkoła, w której znalazł się kandydat K_i przy preferencjach P' jest lepsza (w sensie preferencji $P(K_i)$) od szkoły, w której znalazłby się on przy preferencjach P.

Interpretacja manipulowalności jest następująca. Zakładamy, że kandydat K_i ma jakieś „prawdziwe" preferencje $P(K_i)$. Podając preferencje $P(K_i)$ kandydat (przy założeniu, że wszyscy inni kandydaci podają preferencje z układu P) zostaje umieszczony w szkole $s(P)(K_i)$. Kandydat K_i może jednak próbować podać „fałszywe" preferencje $P'(K_i)$ licząc na to, że skorzysta dzięki temu i znajdzie się w szkole lepszej niż $s(P)(K_i)$, a mianowicie w szkole $s(P')(K_i)$ (lepszej z punktu widzenia oczywiście „prawdziwych" preferencji $P(K_i)$). Jeśli jakiś system rekrutacji dopuszczałby taką sytuację, to oznaczałoby to możliwość manipulowania preferencjami przez kandydatów (niektórzy z nich mogliby podawać nieprawdziwe preferencje po to, aby znaleźć się w lepszej szkole od tej, w której mogliby się znaleźć podając swoje rzeczywiste preferencje). Chcielibyśmy, aby dobry system rekrutacji był właśnie w tym sensie niemanipulowalny.

Okazuje się, że metoda Gale'a-Shapleya jest niemanipulowalna, co wykazali Dubins i Freedman w 1981 roku [DF81][7]. Jest to jednak niemanipulowalność tylko z punktu widzenia kandydatów. Roth [RS92] wykazał, że

[7] Dubins i Freedman wykazali więcej, a mianowicie, że żadna koalicja kandydatów nie może zmienić preferencji swoich uczestników tak, aby wszyscy oni mogli na tym skorzystać.

nie istnieje metoda, która dawałaby rozwiązania stabilne, i która byłaby niemożliwa do manipulacji przez wszystkich uczestników danego systemu (a więc jeśli kandydaci nie mogą manipulować, to szkoły mogą i na odwrót).

Ciekawe powiązania metody GS z twierdzeniami o punkcie stałym (np. twierdzeniem Tarskiego dla zbiorów częściowo uporządkowanych) podał Fleiner w pracy [Fle03].

W nurcie drugim mieści się wiele prac poświęconych różnym uogólnieniom metody GS. Zamiast preferencji w postaci liniowych porządków możemy dopuszczać w modelu preferencje uwzględniające równoważności między kandydatami (lub szkołami) (zob. [MIM02]). Bardzo ogólny model otrzymujemy, przedstawiając preferencje w postaci tzw. funkcji wyboru (zob. [AG03], [Świ05]). Funkcja wyboru dla szkoły S_j jest to funkcja $C_j : \prod(K) \to \prod(K)$ ($\prod(K)$ oznacza rodzinę podzbiorów zbioru K), która każdemu zbiorowi kandydatów $L \subset K$ przyporządkowuje zbiór $C_j(L) \subset L$. Zbiór L możemy interpretować jako zbiór kandydatów, którzy zgłosili się do szkoły S_j, a zbór $C_j(L)$ jako zbiór kandydatów, których szkoła S_j wybrała ze zbioru L. Jeśli szkoła S_j ma preferencje $P(S_j)$ oraz limit q_j, to zbiorem $C_j(L)$ będzie po prostu zbiór q_j najlepszych kandydatów ze zbioru L lub cały zbiór L (jeśli w zbiorze L jest mniej niż q_j kandydatów). Jeśli szkoły stosują różne bardziej skomplikowane (i nie oparte o jednoznacznie określony liniowy porządek) kryteria przyjęć, to zbiory $C_j(L)$ mogą mieć bardziej złożoną strukturę. Algorytm GS można w tym przypadku łatwo uogólnić. Można też wprowadzić odpowiednie pojęcia rozwiązania stabilnego i optymalnego. Powstaje więc problem badania warunków, jakie należy nałożyć na rodzinę funkcji wyboru $\{C_j\}$ tak, aby uogólniony algorytm GS dawał rozwiązania optymalne. Warunki takie zostały podane np. w pracach [AG03], [Świ05] (przy różnych uogólnieniach pojęcia stabilności).

Inne uogólnienia otrzymamy jeśli uwzględnimy konieczność wspólnego przyjmowania par małżeńskich (nie dotyczy to typowego systemu rekrutacji kandydatów do szkół, ale ma bardzo ważne znaczenie w amerykańskim systemie rekrutacji kandydatów na staże medyczne w szpitalach znanym pod nazwą NRMP[8] – zob. [RS92]) lub dolne limity liczby przyjmowanych kandydatów (tzn. jeśli np. przyjmujemy założenie, że określona jest minimalna liczba kandydatów, przy której dana szkoła zostanie uruchomiona (dany kierunek na uczelni zostanie otwarty). Algorytmy dla zadania z dolnymi limitami były przedstawione w pracy [ADG03] (inspiracją dla autorów tej

[8] System ten działa od lat 50. ubiegłego wieku pod nazwą NIMP (National Intern Matching Program), a obecnie NRMP (National Resident Matching Program). Jest to najbardziej znany scentralizowany system rekrutacji. W jego udoskonalaniu istotny udział mieli matematycy i ekonomiści zajmujący się teorią dwustronnych skojarzeń (m.in. Alvin Roth z Uniwersytetu Harvarda). Informacje na jego temat można znaleźć w książce [RS92], a także na stronie www.nrmp.org.

pracy była konieczność opracowania komputerowego systemu przyjęć studentów na specjalności na Wydziale Zarządzania AE w Poznaniu).

4. Zastosowania. Teoria Gale'a-Shapleya jest stosowana do modelowania różnego rodzaju zjawisk ekonomicznych ([KC82], [CK81]), społecznych ([Had99], [FQ05]) czy biologicznych ([BR00]). Ma również wiele zastosowań bardziej praktycznych związanych głównie z analizą i doskonaleniem istniejących oraz konstruowaniem nowych systemów rekrutacji ([CS06], [ES06]). Alvin Roth poświęcił wiele swoich prac analizie różnych funkcjonujących w USA i Wielkiej Brytanii systemów rekrutacji, badając m.in. stabilność i niemanipulowalność tych systemów ([Rot84], [Rot91], [MR91]). Badania te byłyby oczywiście niemożliwe bez narzędzi teoretycznych wypracowanych przez teorię dwustronnych skojarzeń. Uczestniczył on również jako ekspert w doskonaleniu systemu NRMP. Z drugiej strony, potrzeby praktyki istotnie wpływają na rozwój badań teoretycznych. Na przykład konieczność uwzględnienia potrzeb par małżeńskich chcących uczestniczyć w systemie NRMP zainspirowała wiele badań teoretycznych dotyczących kojarzenia z uwzględnieniem wspólnych preferencji dla par (zob. [AC96], [KK02]).

5. Podsumowanie. W artykule starałem się wykazać, że problematyka dwustronnych skojarzeń jest, z jednej strony, bardzo ciekawa teoretycznie, a z drugiej – bardzo silnie związana z konkretnymi potrzebami praktyki. Można się spodziewać jej dalszego rozwoju w miarę rozpowszechniania się różnego rodzaju komputerowych systemów kojarzenia (w szczególności opartych o komunikację internetową – zob. np. [GN01]).

Główną zasługą Gale'a i Shapleya jest precyzyjne, matematyczne ujęcie problemu rekrutacji. Podstawowym, wykorzystywanym przez nich pojęciem jest pojęcie przydziału (skojarzenia) stabilnego. Gale i Shapley pokazali jak wśród przydziałów stabilnych poszukiwać przydziałów, które są korzystne dla kandydatów i takich, które są korzystne dla szkół. Z ich teorii wynika też, jakie cechy powinien posiadać dobry system rekrutacji – powinien on mianowicie nie tylko gwarantować stabilność (optymalność) otrzymanego przydziału, ale również uniemożliwiać manipulowanie preferencjami (przynajmniej przez jedną ze stron).

Teoria dwustronnych skojarzeń stała się silną inspiracją do badania i doskonalenia istniejących, a także tworzenia nowych systemów rekrutacji (główne zasługi położył tu Alvin Roth z Uniwersytetu Harvarda).

Myślę, że również w Polsce warto byłoby pokusić się o próbę stworzenia centralnego systemu rekrutacji do szkół wyższych. System taki byłby znacznym ułatwieniem zarówno dla kandydatów, jak i dla szkół. Istniejąca teoria, jak i doświadczenia funkcjonujących już systemów (np. NRMP) mogłyby znacznie ułatwić wdrażanie takiego systemu.

Warto na zakończenie zwrócić uwagę na walory dydaktyczne teorii Gale'a-Shapleya. Podstawowy model tej teorii jest bardzo elementarny i bez problemów mógłby być prezentowany uczniom szkół średnich, a nawet podstawowych. Ciekawe są w tym kontekście dwa ostatnie akapity z pracy [GS62], w których autorzy przedstawiają swoje twierdzenie o istnieniu skojarzenia stabilnego i jego konstruktywny dowód (polegający na konstrukcji właśnie algorytmu GS) jako przykład matematyki „bez liczb i wzorów". Tego rodzaju przykłady mogą być, według Gale'a i Shapleya, argumentami na rzecz tezy, że matematyka jest bardziej sztuką rozumowania niż sztuką obliczeń, czy też listą wzorów do zapamiętania. Łatwiej więc mogą zachęcić do matematyki wszystkich tych (w szczególności uczniów), których zniechęca tradycyjny sposób nauczania tego przedmiotu.

Literatura

[AC96] B. Aldershof, O.M. Carducci, *Stable matchings with couples*, Discrete Applied Mathematics, 68 (1996), 203–207.

[ADG03] M. Anholcer, W. Dymowski, M. Godlewski, *Optymalny przydział studentów do specjalności jako wariant zagadnienia doboru małżeństw*, w: Metody i zastosowania badań operacyjnych 2002 (red. A. Całczyński), Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom, 2003, 31–42.

[AG03] A. Alkan, D. Gale, *Stable schedule matching under revealed preference*, Journal of Economic Theory, 112 (2003), 289–306.

[Bla84] C. Blair, *Every Finite Distributive Lattice is a Set of Stable Matchings*, Journal of Combinatorial Theory (A), 37 (1984), 353–356.

[BR00] C.T. Bergstrom, L.A. Real, *Toward a theory of mutual mate choice: Lessons from two-sided matching*, Evolutionary Ecology Research, 2 (2000), 493–508.

[CK81] V.P. Crawford, E.M. Knoer, *Job matching with heterogeneous firms and workers*, Econometrica, 49 (1981), 437–450.

[CS06] Y. Chen, T. Sönmez, *School choice: an experimental study*, Journal of Economic Theory, 127 (2006), 202–231.

[DF81] L.E. Dubins, D.A. Freedman, *Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm*, American Mathematical Monthly, 88 (1981), 485–494.

[ES06] H. Ergin, T. Sönmez, *Games of school choice under the Boston mechanism*, Journal of Public Economics, 90 (2006), 215–237.

[Fle03] T. Fleiner, *A fixed-point approach to stable matchings and some applications*, Mathematics of Operations Research, 28 (2003), 103–126.

[FQ05] M. Fafchamps, A. Quisumbing, *Assets at marriage in rural Ethiopia*, Journal of Development Economics, 77 (2005), 1–25.

[Gal01] D. Gale, *The two-sided matching problem. Origin, development and current issues*, International Game Theory Review, 3 (2001), 237–252.

[GI89] D. Gusfield, R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[GN01] W.R. Gates, M.E. Nissen, *Designing Agent-Based Electronic Employment Market*, Electronic Commerce Research, 1 (2001), 239–263.

[GS62] D. Gale, L.S. Shapley, *College Admissions and the Stability of Marriage*, American Mathematical Monthly, 69 (1962), 9–15.

[GI89] D. Gusfield, R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[Had99] G.K. Hadfield, *A coordination model of the sexual division of labor*, Journal of Economic Behavior and Organization 40 (1999), 125–153.

[IL87] R.W. Irving, P. Leather, *The Complexity of Counting Stable Marriages*, SIAM Journal of Computing, 15 (1987), 532–543.

[Kas07] A. Kaszkowiak, *Sprawiedliwa rekrutacja*, Delta, 2 (2007), 5–6.

[KC82] A.S. Kelso, V.P. Crawford, *Job matching, coalition formation and gross substitutes*, Econometrica, 50 (1982), 1483–1504.

[KK02] B. Klaus, F. Klijn, *Stable matchings and preferences of couples*, Journal of Economic Theory, 121 (2005), 75–106.

[Knu97] D.E. Knuth, *Stable Marriage and Its Relation to other Combinatorial Problems. An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.

[MIM02] D.F. Manlove, R.W. Irving, K. Iwama, S. Miyazaki, Y. Morita, *Hard variants of stable marriage*, Theoretical Computer Science, 276 (2002), 261–279.

[MR91] S. Mongell, A.E. Roth, *Sorority Rush as a Two-Sided Matching Mechanism*, The American Economic Review, 81 (1991), 441–464.

[Paw00] J. Pawłowski, *Żeby w wyniku naboru nikt nie poczuł się „nabrany". Rodzicielskie refleksje po egzaminach do szkół średnich*, Biuletyn Informacyjny. Informatyka dla szkoły, 31 (2000) ().

[Rot84] A.E. Roth, *The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory*, Journal of Political Economy, 92 (1984), 991–1016.

[Rot91] A.E. Roth, *A Natural Experiment in the Organization of Entry-Level Labor Markets: Regional Markets for New Physicians and Surgeons in the United Kingdom*, The American Economic Review, 81 (1991), 415–440.

[RS92] A.E. Roth, M.A. Sotomayor, *Two-sided matching. A study in game-theoretic modeling and analysis*, Cambridge University Press, 1992.

[Świ05] Z. Świtalski, *Optymalny system rekrutacji kandydatów do szkół*, Badania Operacyjne i Decyzje, 3–4 (2005), 85–98.

Summary

In the paper we describe the model of Gale and Shapley concerning marriage matchings and college admissions (American Mathematical Monthly, 69 (1962), 9–15). We review some results and applications of the Gale-Shapley theory. We also analyze problems of recruitment of candidates to schools in Poland from the point of view of this theory.

Zbigniew Świtalski
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski
ul. Szafrana 4a, 65-516 Zielona Góra
e-mail: Z.Switalski@wmie.uz.zgora.pl