ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVI (2000)

Ewa Stępińska (Kraków)

O zarzutach Ajdukiewicza wobec Hilberta dowodów niesprzeczności

W sierpniu 1904 roku, na III Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Heidelbergu, David Hilbert wygłosił referat *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*[1], prezentujący jego nowe przemyślenia dotyczące stosowania metody aksjomatycznej. Pozostawało to w związku z pogłębieniem ówczesnego kryzysu podstaw matematyki w wyniku wskazania przez Bertranda Russella kolejnych antynomii logicznych i ujawnienia sprzeczności w systemie *Grundgesetze der Arithmetik* Gottloba Fregego. Zauważywszy, że nie tylko w arytmetyce stosuje się logikę, ale również w logice używa się pewnych pojęć arytmetycznych, do których zaliczył pojęcie zbioru i pojęcie liczby, Hilbert postulował równoczesny rozwój praw logiki i arytmetyki. Biorąc pod uwagę, że pojęcie zbioru należy przede wszystkim do teorii mnogości, można powiedzieć, że domagał się równoczesnego ugruntowania logiki, teorii mnogości i arytmetyki. Naszkicowana przez niego koncepcja miała silne odniesienia filozoficzne, podstawą swych rozważań uczynił bowiem obiekt myślowy (przedmiot naszej myśli), a pojęcie to trudno zaliczyć do matematycznych. Podał, co sam mocno podkreślił, pierwsze bezpośrednie, nie polegające na wskazaniu odpowiedniej interpretacji, dowody niesprzeczności systemów aksjomatów. Przedstawione dowody były co prawda szkicowe i odnosiły się do bardzo prostych systemów aksjomatycznych, ale wykazywały, że możliwa jest odmienna od wcześniej stosowanych metoda uzasadniania niesprzeczności i były pierwszym krokiem w kierunku rozwiązania drugiego z listy dwudziestu trzech problemów matematycznych podanych przez Hilberta na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1900 roku w Paryżu – przeprowadzenia dowodu niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych. Zwrócona została uwaga na potrzebę ugruntowania pojęcia nieskończoności, umożliwiającego stosowanie go bez ryzyka wystąpienia sprzeczności. Zbiór

[1] Tekst referatu ukazał się drukiem w roku następnym w *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Leipzig, 1905, s. 174–185.

nieskończony był jednym z podstawowych obiektów, zdefiniowanych za pomocą sformułowanych przez Hilberta aksjomatów. Pojęcie elementu zbioru zostało wprowadzone jako wtórne w stosunku do pojęcia samego zbioru, co zapobiegało powstaniu paradoksu Russella. Hilbert po raz pierwszy wskazał na możliwość potraktowania dowodu jako obiektu matematycznego i badania go metodami matematycznymi. Ta idea oraz inne, zarysowane w *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, znalazły rozwinięcie w dojrzałym hilbertowskim programie ugruntowania matematyki klasycznej, powstałym w latach dwudziestych.

Referat Hilberta wzbudził duże zainteresowanie i był szeroko komentowany, między innymi przez Poincarégo, Pieriego, Ajdukiewicza, Bernaysa i Blumenthala. Do przedstawionej w nim koncepcji Henri Poincaré odniósł się w pracy *Les mathématiques et la logique* z 1905 roku oraz w książce *Science et méthode* z 1908 roku, zarzucając jej błędne koło, zaś Kazimierz Ajdukiewicz, w opublikowanej w 1921 roku pracy habilitacyjnej *Z metodologii nauk dedukcyjnych*, poddał krytycznej analizie zaprezentowane dowody niesprzeczności. Dla prześledzenia i ustosunkowania się do uwag względem referatu *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* konieczne jest streszczenie odpowiednich jego fragmentów.

Hilbert zaznaczył, że jedynie naszkicuje ideę swych badań i dla ułatwienia zrozumienia będzie używał zwykłego języka, a unikał formalizmów. Nie podając bliższych objaśnień, wprowadził pojęcie obiektu myślowego: *Niech przedmiot naszej myśli będzie nazwany obiektem myślowym lub, krótko, obiektem i oznaczany znakiem*[2]. Podstawą rozważań uczynił Hilbert obiekt myślowy 1 (jeden). Zestawienia 11, 111, 1111, ... obiektu 1 ze sobą dwa, trzy lub więcej razy nazwał kombinacjami obiektu 1 ze sobą. Również kombinacje kombinacji określił jako kombinacje obiektu 1 ze sobą. Kombinacje te nazwał obiektami, a obiekt 1, dla odróżnienia, obiektem prostym. Następnie wprowadził drugi prosty obiekt myślowy, oznaczany symbolem = (równa się). Można tworzyć dowolne kombinacje dwóch prostych obiektów myślowych, na przykład 1=, 11=, (1)(=1)(===), ((11)(1)(=))(==), 1=1, (11)=(1)(1). Zgodnie z definicją, kombinacje a i b obiektów prostych 1 i = są różne, jeśli istnieje pomiędzy nimi jakaś odmienność w rodzaju i porządku kombinacji lub pozycji samych obiektów 1 i =, czyli, gdy a i b nie są identyczne.

Następnie wprowadził Hilbert podział kombinacji na dwie klasy – klasę bytów i klasę niebytów: *każdy obiekt, należący do klasy bytów, różni się od obiektu należącego do klasy niebytów. Każda kombinacja dwóch obiektów prostych 1 i = należy do jednej z tych klas. Jeśli a jest kombinacją dwóch*

[2] David Hilbert, *On the foundations of logic and arithmetic*, w: J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967, s. 131.

obiektów podstawowych 1, =, to przez a oznaczamy również zdanie, że a należy do klasy bytów i przez $\overline{a}$ zdanie, że a należy do klasy niebytów. Mówimy, że a jest zdaniem prawdziwym, gdy a należy do klasy bytów, natomiast $\overline{a}$ nazywa się zdaniem prawdziwym, gdy a należy do klasy niebytów. Zdania a i $\overline{a}$ tworzą sprzeczność[3].

Z kolei Hilbert określił symbole $u.$, $o.$, $|$. Jeśli A i B są zdaniami, to $Au.B$ oznacza zdanie „A i B”, $Ao.B$ – zdanie „A lub B”, a $A \mid B$ – implikację wysławianą jako „z A wynika B” lub „jeśli A jest prawdziwe, to również B jest prawdziwe”, przy czym A nazywa się założeniem, a B tezą. Wprowadził też kwantyfikatory. Jeśli $A_1, A_2, A_3, \ldots$ są zdaniami wynikającymi z formuły $A(x)$ poprzez podstawienie obiektów myślowych 1, = i ich kombinacji w miejsce „dowolnego obiektu” x, to zdanie $A_1 o.A_2 o.A_3 o.\ldots$ zapisujemy skrótowo jako $A(x^{(o)})$ (istnieje takie x), a zdanie $A_1 u.A_2 u.A_3 u.\ldots$ jako $A(x^{(u)})$ (dla każdego x).

Po zakończeniu części wstępnej Hilbert przystąpił do konstrukcji aksjomatów prostego systemu arytmetycznego:

$$x = x, \tag{1}$$

$$\{x = y\, u.\, w(x)\} \mid w(y), \tag{2}$$

gdzie x i y występują w sensie „dla każdego”, czyli odpowiednio $x^{(u)}, y^{(u)}$ i oznaczają obiekty proste 1, = lub ich dowolną kombinację, zaś $w(x)$ jest „dowolną” kombinacją, zawierającą „dowolny obiekt” x (w sensie $x^{(u)}$). Formuły (1) i (2) stanowią definicję pojęcia =. Konsekwencje aksjomatów to zdania powstałe z nich w wyniku podstawienia w miejsce x i y obiektów prostych lub ich kombinacji. Jeśli rozważymy taki ciąg konsekwencji, że założeniem ostatniej są tezy poprzednich, to zdanie, którego założeniem są założenia wszystkich z wyjątkiem ostatniej, a tezą – teza ostatniej, jest również konsekwencją aksjomatów.

Hilbert naszkicował dowód niesprzeczności aksjomatów (1) i (2). Spośród konsekwencji aksjomatów wybieramy te, które posiadają prostą formę twierdzenia a (tezy bez założenia) i włączamy je do klasy bytów, a pozostałe obiekty – do klasy niebytów. Widać, że jedynymi konsekwencjami aksjomatów (1) i (2) są zdania postaci $\alpha = \alpha$, gdzie α jest kombinacją obiektów 1 i =. Również aksjomaty (1) i (2), spełnione ze względu na ten podział obiektów na dwie klasy, są zdaniami prawdziwymi. Zatem aksjomaty (1) i (2) są niesprzeczne i zdefiniowane poprzez nie pojęcie = (równa się) jest pojęciem niesprzecznym.

Hilbert wprowadził trzy kolejne proste obiekty myślowe: u – zbiór nieskończony, f – następnik, f' – operację towarzyszącą, oraz sformułował opisujące je aksjomaty:

[3] Ibid., s. 131–132.

$$f(ux) = u(f'x), \tag{3}$$

$$f(ux) = f(uy) \mid ux = uy, \tag{4}$$

$$\overline{f(ux) = u1}. \tag{5}$$

Obiekt x oznacza dowolny z pięciu obiektów prostych lub ich kombinację i jest użyty w sensie $x^{(u)}$. Dowolną kombinację ux nazywamy elementem zbioru nieskończonego u. Zgodnie z aksjomatem (3), każdy element ux posiada następnik, należący również do zbioru u. Aksjomat (4) mówi, że jeżeli element zbioru u jest następnikiem dwóch elementów zbioru u, to są one równe. Aksjomat (5) stwierdza, że element $u1$ można nazwać pierwszym elementem zbioru nieskończonego u. Aksjomaty (1) i (2) odnoszą się obecnie do pięciu, a nie dwóch obiektów prostych i ich kombinacji.

Przystępując do dowodu niesprzeczności aksjomatów (1)-(5), Hilbert zaznaczył, że konieczne jest przeprowadzenie takiego podziału obiektów pierwotnych $1, =, u, f, f'$ i ich kombinacji na klasę bytów i klasę niebytów, aby wszystkie aksjomaty i ich konsekwencje były zdaniami prawdziwymi. Trzeba zauważyć, że aksjomat (5) jest jedynym, z którego wynikają zdania $\overline{a}$ stwierdzające, że kombinacja a pięciu obiektów pierwotnych należy do klasy niebytów. Formuła sprzeczna z aksjomatem (5) musi mieć postać

$$f(ux^{(o)}) = u1. \tag{6}$$

Można pokazać, że nie jest ona konsekwencją aksjomatów (1)-(4). W tym celu Hilbert wprowadził pojęcie homogeniczności. Równanie $a = b$ nazywamy homogenicznym, jeśli a i b są kombinacjami dwóch, trzech, czterech obiektów prostych itd. Równaniami homogenicznymi są na przykład $(11) = (fu)$, $(ff) = (uf')$, $(f11) = (u1{=})$, $(f1)(f1) = (1111)$, $(f(ff'u)) = (1uu1)$. Z aksjomatów (1) i (2) wynikają jedynie, jak było już wcześniej powiedziane, obiekty postaci $\alpha = \alpha$, a więc równania homogeniczne. Jeśli w aksjomacie (3) w miejsce x podstawimy dowolny obiekt myślowy, to w wyniku otrzymamy równanie homogeniczne. Konsekwencje otrzymane przy zastosowaniu aksjomatu (4) są również równaniami homogenicznymi, o ile założenie jest równaniem homogenicznym. Zatem konsekwencjami aksjomatów (1)-(4) są jedynie równania homogeniczne. Równanie (6) nie jest homogeniczne, gdyż kiedy podstawimy dowolny obiekt prosty lub jakąkolwiek kombinację obiektów prostych w miejsce $x^{(o)}$, to lewa strona równania będzie kombinacją co najmniej trzech obiektów prostych, a prawa – jedynie dwóch obiektów prostych u i 1. Wynika stąd, że (6) nie jest konsekwencją aksjomatów (1)-(4). Jeśli wszystkie konsekwencje aksjomatów (1)-(4) umieścimy w klasie bytów, a wszystkie pozostałe obiekty, w tym również $f(ux) = u1$ – w klasie niebytów, to otrzymamy pożądany podział obiektów, przy którym wszystkie aksjomaty i ich konsekwencje są zdaniami prawdziwymi. Aksjomaty (1)-(5) są zatem niesprzeczne. Zdefiniowane poprzez nie obiekty myślowe $1, =, u, f, f'$ można nazwać pojęciami niesprzecznymi lub istniejącymi niesprzecznie. W szczególności udowodniono niesprzeczne istnienie nieskończoności, wskutek czego pojęcie to uzyskało określone znaczenie.

Hilbert stwierdził, że również pojęcie „zbiór" jest obiektem myślowym, który trzeba opisać za pomocą aksjomatów. Jeśli zbiór zdefiniuje się jako obiekt myślowy m, to elementy zbioru m można określić jako kombinacje mx. Przy takim podejściu, inaczej niż przy zwykle stosowanym, pojęcie elementu zbioru jest wtórne względem pojęcia samego zbioru. Hilbert przeprowadził rozumowanie mające pokazać, iż pojęcie zbioru można określić aksjomatycznie w taki sposób, że w dużym stopniu uzyskuje się zgodność z klasycznym pojęciem zbioru. Niech $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$ będą obiektami myślowymi, przyjętymi za podstawowe na pewnym etapie rozwoju teorii aksjomatycznej, $a(\xi)$ – ich kombinacją, zawierającą dowolny obiekt ξ, $a(\alpha)$ – zdaniem prawdziwym.

TWIERDZENIE. *Istnieje taki obiekt myślowy m, że $a(mx)$ przedstawia jedynie zdania prawdziwe dla dowolnego obiektu x i na odwrót, każdy obiekt ξ, dla którego $a(\xi)$ jest zdaniem prawdziwym, jest równy kombinacji $mx^{(o)}$.*

Dla dowodu tego twierdzenia Hilbert sformułował aksjomaty dla obiektu myślowego m:

$$a(\xi) \mid m\xi = \xi, \tag{7}$$

$$\overline{a(\xi)} \mid m\xi = \alpha \tag{8}$$

i wykazał, że ich dołączenie do wcześniej ustalonych, niesprzecznych aksjomatów dla obiektów podstawowych $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$ nie prowadzi do sprzeczności. Zastosował dowód nie wprost: załóżmy, że konsekwencjami aksjomatów (7), (8) i wcześniejszych są jednocześnie zdania $p(m)$ i $\overline{p(m)}$, gdzie $p(m)$ jest pewną kombinacją obiektów prostych $1, \ldots, \alpha, \ldots, t, m$. Wszędzie w $p(m)$, gdzie obiekt m występuje w kombinacji $m\xi$, zgodnie z aksjomatami (7), (8) i (2) zastąpmy $m\xi$ przez ξ lub α i rezultat tej operacji nazwijmy $q(m)$. Ponieważ w $q(m)$ obiekt m nie występuje w kombinacji mx, $q(m)$ musi być konsekwencją aksjomatów sformułowanych pierwotnie dla obiektów $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$. m można zastąpić dowolnym z tych elementów, na przykład 1. Stąd wynika, że zdanie $q(1)$ jest konsekwencją aksjomatów dla $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, można pokazać, że również $\overline{q(1)}$ jest konsekwencją aksjomatów dla $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$. A to prowadzi do sprzeczności, gdyż założyliśmy, że aksjomaty przyjęte dla $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$ są niesprzeczne.

Poincaré zauważył, że już w rozważaniach wstępnych referatu *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, mających na celu ugruntowanie pojęcia liczby naturalnej, Hilbert stosował to pojęcie, mówiąc o zestawianiu obiektu 1 ze sobą dwa, trzy lub więcej razy, a zatem, że jego rozumowanie zawiera błędne koło. Ponadto w dowodzie niesprzeczności aksjomatów arytmetycznych zastosowana została zasada indukcji zupełnej, oparta na pojęciu liczby naturalnej. Na zarzuty Poincarégo Hilbert odpowiedział dopiero w latach dwudziestych, wprowadzając w swym programie ugruntowania matematyki klasycznej rozróżnienie pomiędzy matematyką właściwą a mającą ją uzasadnić metamatematyką, w tym pomiędzy zasadą indukcji matematyki właściwej a metamatematyczną zasadą indukcji.

Ajdukiewicz, tak jak Poincaré, wskazał, że w użytych przez Hilberta dla ugruntowania pojęcia liczby pojęciach kombinacji, jej rodzaju i porządku tkwi *petitio principii.* Szczegółowej analizie poddał trzy przedstawione w *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* dowody niesprzeczności aksjomatów. W dowodzie niesprzeczności aksjomatów (1)-(2) za niewłaściwe uznał zaliczenie do klasy bytów jedynie konsekwencji aksjomatów mających prostą formę twierdzenia – tezy bez założenia. Skonstatował jednak, że nie jest to istotne, gdyż jeśli do klasy bytów zaliczyć wszystkie konsekwencje aksjomatów, to rozumowanie pozostanie w mocy. Poważniejszy był zarzut popadnięcia w *ignoratio elenchi.* Bowiem dla dowodu niesprzeczności aksjomatów nie wystarczy wykazać, że wśród ich konsekwencji, w sensie podanym przez Hilberta, nie ma żadnej pary zdań postaci a i $\overline{a}$, lecz konieczne jest udowodnienie, że takiej pary nie ma wśród ich konsekwencji logicznych określonych przez wszystkie aksjomaty logiki. Ajdukiewicz zauważył, że Hilbert był świadomy niepełności swego dowodu, bo w jednej z uwag poczynionych pod koniec referatu wskazał na potrzebę rozszerzenia pojęcia konsekwencji aksjomatów poprzez uwzględnienie, obok rozważanych przez niego, również innych reguł wnioskowania logicznego.

Dowód niesprzeczności aksjomatów (1)-(5) opiera się na wykazaniu, że z aksjomatów (1)-(4) nie można wywieść zaprzeczenia aksjomatu (5), oznaczonego numerem (6), gdyż wszystkie konsekwencje aksjomatów (1)-(4) są równaniami homogenicznymi, zaś zdanie (6) – równaniem niehomogenicznym. Ajdukiewicz zauważył, że dowód ten podlega temu samemu zarzutowi, co dowód niesprzeczności aksjomatów (1)-(2) i staje się bezwartościowy po rozszerzeniu pojęcia konsekwencji. W opinii Ajdukiewicza przedstawiony przez Hilberta dowód niesprzeczności aksjomatów (1)-(5) jest niepoprawny również z formalnego punktu widzenia. Jego zdaniem, nie wystarczy wykazać, że konsekwencje aksjomatów (1)-(4) nie mogą posiadać formy równania (6), lecz konieczne jest udowodnienie, że również konsekwencje aksjomatów (1)-(5) nie mogą posiadać takiej formy. Zauważmy jednak, że przy wąskim, wprowadzonym w *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* rozumieniu konsekwencji aksjomatów, z postaci aksjomatów (1)-(5) prosto wynika, że jedynymi ich konsekwencjami otrzymanymi przy użyciu aksjomatu (5) są zdania stwierdzające przynależność pewnych równań niehomogenicznych do klasy niebytów, co Hilbert uznał zapewne za oczywiste. A zatem, przy wskazanym podziale wchodzących w grę kombinacji na klasy bytów i niebytów, wśród konsekwencji aksjomatów (1)-(5) nie ma zdań sprzecznych. Ostatni zarzut Ajdukiewicza nie jest słuszny przy klasycznym rozumieniu konsekwencji i spójników logicznych. Wówczas, stosując symbolikę Hilberta, zdanie $\overline{A_1 u.A_2 u.A_3 u.A_4 \mid \overline{A_5}}$ jest logicznie równoważne zdaniu $A_1 u.A_2 u.A_3 u.A_4 u.A_5$. Niech A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 oznaczają aksjomaty (1)-(5). Z prawdziwości zdania $\overline{A_1 u.A_2 u.A_3 u.A_4 \mid \overline{A_5}}$ w rozważanej teorii wynika prawdziwość zdania $A_1 u.A_2 u.A_3 u.A_4 u.A_5$, czyli niesprzeczność aksjomatów (1)-(5).

Hilbertowski dowód niesprzeczności aksjomatów (1)-(5), (7), (8) ma charakter nie wprost: polega na pokazaniu, że ze sprzeczności aksjomatów (1)-(5), (7), (8) wynika sprzeczność aksjomatów (1)-(5), których niesprzeczność wykazano wcześniej. Według Ajdukiewicza dowód ten zawiera błąd rzeczowy, opiera się bowiem na błędnej w jego opinii przesłance, że kombinacje składające się wyłącznie z obiektów myślowych $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$, przyjętych jako pierwotne dla aksjomatów (1)-(5), będące konsekwencjami aksjomatów (1)-(5), (7), (8), są w istocie konsekwencjami aksjomatów (1)-(5). Dla wykazania fałszywości przyjętego przez Hilberta założenia przeprowadził Ajdukiewicz następujące rozumowanie: *Przypuśćmy, że aksjomaty* (1)-(5) *pociągają za sobą następstwo, w którym figuruje bezpośrednio po sobie x i ξ (np. kombinację $\ldots x\xi \ldots$). Zastąpmy w tej kombinacji x przez m, co nam uczynić wolno, ponieważ po wprowadzeniu* (7) *i* (8) *rozciąga się zakres zmiennej na $1, \ldots, \alpha, \ldots, t, m$. Następstwem kombinacji „$\ldots x\xi \ldots$" jest wobec tego kombinacja „$\ldots m\xi \ldots$". Zastąpmy $m\xi$ np. przez α w myśl* (7) *i* (8)*. Otrzymujemy obecnie kombinację „$\ldots \alpha \ldots$", która nie jest jedynie następstwem aksjomatów* (1)-(5)*, ale opiera się też na* (7) *i* (8)*, jakkolwiek składa się jedynie z elementów $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$. Widzimy stąd, że kombinacje składające się tylko z elementów $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$ nie muszą być następstwami wyłącznie tylko aksjomatów* (1)-(5)[4].

Z faktu, że kombinacja „$\ldots \alpha \ldots$" jest konsekwencją aksjomatów (1)-(5), (7), (8), ze szczególnym uwzględnieniem aksjomatu (8), nie wynika jednak, że nie można jej wywieść z aksjomatów (1)-(5). Świadczy o tym prosty przykład. Niech $x\xi = x\xi$ będzie rozważaną przez Ajdukiewicza kombinacją wyjściową $\ldots x\xi \ldots$ Jest ona bezpośrednią konsekwencją aksjomatu (1). W miejsce x podstawiamy m i otrzymujemy kombinację $m\xi = m\xi$. W oparciu o aksjomaty (7), (8) zastępujemy $m\xi$ na przykład przez α i otrzymujemy kombinację $\alpha = \alpha$. $\alpha = \alpha$ została wyprowadzona jako konsekwencja aksjomatów (1) i (8), jednakże jest ona również bezpośrednią konsekwencją aksjomatu (1). Podany zarzut nie został więc należycie uzasadniony. Co więcej, wydaje się, że Hilbert nie popełnił nadużycia, twierdząc o zdaniu $q(m)$, występującym w dowodzie niesprzeczności aksjomatów (1)-(5), (7), (8), iż musi być ono konsekwencją aksjomatów sformułowanych pierwotnie dla obiektów $1, \ldots, \alpha, \ldots, t$, czyli aksjomatów (1)-(5), gdyż jedyną

[4] Kazimierz Ajdukiewicz, *Z metodologii nauk dedukcyjnych*, Lwów, 1921, s. 36.

funkcją aksjomatów (7), (8) przy użyciu aksjomatu (2) i milczącym zastosowaniu reguły odrywania jest zastępowanie występującej w konsekwencjach aksjomatów (1)-(5) kombinacji $m\xi$ przez ξ lub α. Z postaci aksjomatów (1)-(5) wynika, że $m\xi$ może występować w ich konsekwencji jedynie w miejscu zmiennych x lub y, ewentualnie stanowić fragment kombinacji podstawionej za zmienną (zmienne). Niech K będzie konsekwencją aksjomatów (1)-(5) zawierającą $m\xi$ $(\ldots m\xi \ldots)$. W procedurze wyprowadzania K w pewnym kroku (krokach) musiało nastąpić podstawienie $m\xi$ za zmienną lub $m\xi$ stanowiło fragment kombinacji podstawionej za zmienną. Jeśli w procedurze wyprowadzania K w odpowiednim kroku (krokach) podstawimy nie $m\xi$, lecz ξ lub α, to otrzymamy procedurę wyprowadzania $\ldots\xi\ldots$ lub $\ldots\alpha\ldots$ z aksjomatów (1)-(5).

Hilbert niewątpliwie zdawał sobie sprawę z możliwości pojawienia się niektórych z przytoczonych tu zarzutów. W referacie *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* zaznaczył, że przedstawione w nim rozważania mają szkicowy, nieformalny charakter, ich celem jest jedynie wskazanie możliwości aksjomatycznego ugruntowania pojęcia liczby bez popadnięcia w paradoksy logiczne i przyznał, że przeprowadzone przez niego dowody niesprzeczności są niekompletne. Analiza uwag Ajdukiewicza o hilbertowskich dowodach niesprzeczności skłania do stwierdzenia, że nie tylko przedmiot krytyki, ale również ona sama wymagała dokonania istotnych modyfikacji i uzupełnień.