ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVIII (2002)

Jan Cholewa (Katowice)

Pewne nietypowe własności rozwiązań nieliniowych równań ewolucyjnych

1. Uwagi wstępne. Nawiązując do pracy B. Kawohla [11] warto przytoczyć jego spostrzeżenie, że w problemach nieliniowych występują, obok pewnych efektów jakościowych znanych z równań liniowych, także pewne zjawiska o charakterze specyficznie nieliniowym.

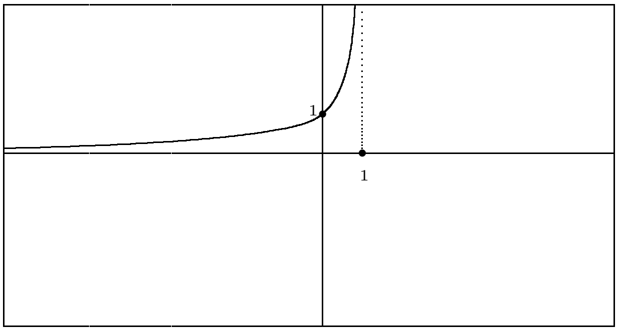
Z takich zjawisk typowo nieliniowych szczególnie interesujące są trzy, często spotykane w literaturze specjalistycznej pod angielskimi nazwami *blow up*, *quenching* oraz *extinction* (inne spotykane określenie *dead core*). Nazwy te odzwierciedlają specyficzne zachowanie się rozwiązań równań różniczkowych, a ich odpowiednikami są takie polskie nazwy jak *wybuchy*, *gaśnięcie* czy *zamieranie* rozwiązań. Te trzy rodzaje zjawisk były w ostatnich trzech dekadach przedmiotem zainteresowania wielu specjalistów, w wyniku czego pojawiła się duża ilość publikacji poświęconych tej tematyce. W ramach niniejszej krótkiej prezentacji ([1]) nie sposób nawiązać do wszystkich istotnych pozycji; konieczne stało się dokonanie wyboru.

Korzystając raz jeszcze ze spostrzeżeń B. Kawohla [11] dodajmy, że gdy rozważamy wspomniane tu trzy rodzaje zachowania się rozwiązań w kontekście równań parabolicznych, to składnik dyfuzyjny staje się w pewnym sensie zaniedbywalny, a zachowanie się rozwiązań jest w zasadniczym stopniu kontrolowane przez równanie różniczkowe zwyczajne. Ta nieformalna uwaga sugeruje, iż – heurystycznie – punktem wyjścia dla prowadzonych rozważań powinny być przykłady równań różniczkowych zwyczajnych.

2. *Wybuchy* jako uciekanie rozwiązań do ∞. Na przykładach równań różniczkowych zwyczajnych łatwo zauważyć, że gdy prawa strona rośnie szybciej niż liniowo, to na ogół rozwiązanie nie będzie istniało dla wszystkich $t \geqslant 0$ (rys. 1).

W świetle powyższego przykładu łatwo zaobserwować podobne zachowanie się rozwiązań równań cząstkowych. Rozważmy zadanie Neumanna dla

([1]) Niniejszy artykuł wiąże się z wykładem habilitacyjnym autora z listopada 2000 r.



Rys. 1. Szkic rozwiązania równania $\dot{y} = y^2$ z warunkiem $y(0) = 1$. Maksymalnym przedziałem istnienia tego rozwiązania jest $(-\infty, 1)$.

równania drugiego rzędu w ograniczonym, regularnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, \qquad t > 0,\ x \in \Omega,\ p > 1, \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Dla $p = 2$ rozwiązanie równania zwyczajnego z rys. 1 jest równocześnie niezależnym od zmiennej x rozwiązaniem zadania (1).

Ten prosty przykład można uogólniać komplikując postać operatora różniczkowego w części głównej oraz warunków brzegowych (w szczególności rozważając równania cząstkowe wyższych rzędów). Zamiast tego warto przytoczyć następujące twierdzenie, które nasuwa wspomniany na wstępie przykład równania zwyczajnego (zob. [4]).

TWIERDZENIE 1. *Każde gładkie, nieujemne* ($\not\equiv 0$) *rozwiązanie zadania* (1) *staje się nieograniczone w skończonym czasie.*

Dowód. Wspominając tylko, że rozwiązania (dla dostatecznie gładkich warunków początkowych) istnieją oraz są nieujemne dla nieujemnej funkcji początkowej u_0 sprawdźmy, całkując obustronnie pierwsze z równań w (1), iż

$$\int_\Omega u_t\,dx = \int_\Omega \Delta u\,dx + \int_\Omega u^p\,dx.$$

Wobec zerowania się pochodnej normalnej rozwiązania na brzegu obszaru Ω, twierdzenia o dywergencji oraz nierówności Höldera mamy dalej

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u\,dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS + \int_\Omega u^p\,dx \geqslant c_\Omega \Big(\int_\Omega u\,dx\Big)^p \qquad (c_\Omega = |\Omega|^{1-p}).$$

Pokazuje to, iż średnia całkowa rozwiązania $\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$ spełnia nierówność różniczkową

$$\dot{y} \geqslant y^p \qquad (p > 1) \tag{2}$$

i staje się nieograniczona w skończonym czasie (por. rys. 1 w przypadku $p = 2$). Z twierdzenia o wartości średniej rozwiązanie musi zatem stawać się nieograniczone w skończonym czasie.

3. *Wybuch* – kiedy, gdzie, jak... Zagadnienia *kiedy*, *gdzie* i *jak* występuje *wybuch* należą do podstawowych. Odpowiedzi na nie są na ogół niełatwe do uzyskania.

***Wybuch* – kiedy?** W przykładzie (1) oszacowanie czasu życia rozwiązania daje się łatwo uzyskać przez całkowanie nierówności (2), którą spełnia średnia całkowa $\overline{u}$. Istotnie, po obliczeniach

$$\frac{1}{p-1}\left(-\frac{1}{y^{p-1}}+\frac{1}{y_0^{p-1}}\right) \geqslant t, \qquad y^{p-1} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{y_0^{p-1}}-(p-1)t},$$

otrzymujemy

$$\sup_{\Omega}|u| \geqslant \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u\,dx = \overline{u} \geqslant \left[\frac{1}{\overline{u}_0^{p-1}}-(p-1)t\right]^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Oszacowanie to pokazuje, że rozwiązanie nieujemne ($\not\equiv 0$) staje się nieograniczone w czasie T (tzw. „czasie życia” rozwiązania) spełniającym warunek

$$T \leqslant \frac{1}{(p-1)\overline{u}_0^{p-1}}. \tag{3}$$

***Wybuch* – gdzie, jak?** Rozwiązanie u może uciekać do nieskończoności w pewnych punktach przestrzeni, zaś w innych pozostawać ograniczone. A. Friedman i B. McLeod [6] badali zbiór punktów, w których ma miejsce *wybuch*, tj. zbiór punktów $x \in \overline{\Omega}$, w których rozwiązanie u nie jest lokalnie ograniczone. Autorzy ci wykazali w szczególności, że dla zadania (1) w jednym wymiarze przestrzennym zbiór ten jest jednoelementowy, co nawiązywało do wcześniejszych wyników F. Weisslera [16].

Gdy ma miejsce *wybuch*, istotnym przedmiotem analizy jest zachowanie się rozwiązania dla $t \to T$ (podobnie jak w (3), T oznacza tu „czas życia” rozwiązania). Dla zagadnienia typu (1) w wypukłym obszarze Ω, A. Friedman i B. McLeod [6] (zob. także Y. Giga i R. Kohn [7]) zaobserwowali, że w punkcie x, w którym ma miejsce *wybuch* rozwiązania u, zachodzi warunek

$$\tau^{\frac{1}{p-1}}u(x,T-\tau) \to \text{constans} \qquad \text{gdy } \tau \searrow 0.$$

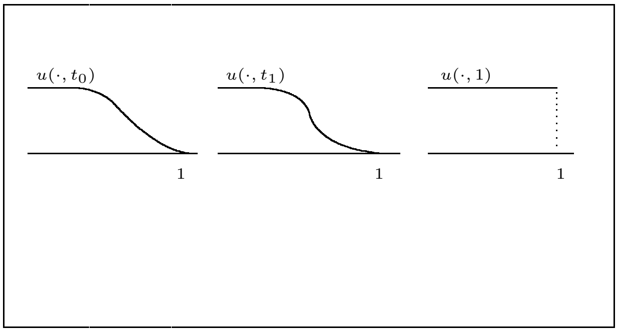
Warto nadmienić, że A. Friedman i B. McLeod rozważali problemy typu (1) z warunkami brzegowymi typu Dirichleta lub Robina. Także nieliniowość mogła być ogólniejsza niż występująca w (1) funkcja potęgowa. Nie precyzując bardziej ogólnych warunków dla f, warto jednak wspomnieć o innej jeszcze szczególnej postaci nieliniowości, $f(u) = \delta e^u$, która wiąże się z modelem zapłonu opisanym przez J. Bebernesa i D. Eberly'ego w ich monografii [1] poświęconej teorii spalania.

Katastrofa gradientowa. Do tej pory przedstawiona została sytuacja, w której rozwiązanie u ucieka do nieskończoności w skończonym czasie. Może jednak zajść również przypadek, gdy rozwiązanie u pozostaje ograniczone, ma natomiast miejsce *wybuch* jego pochodnych przestrzennych.

Ciekawy przykład *katastrofy gradientowej* występuje w równaniu Burgersa

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

gdzie pochodna u_x gładkiego rozwiązania u staje się nieograniczona, gdy $t \nearrow 1$ (rys. 2).



Rys. 2. Rysunek ten, kojarzący się intuicyjnie z załamującą się falą, został naszkicowany w oparciu o monografię J. Smollera [14].

Inny ciekawy przykład (zob. formuły (4)–(6) poniżej) związany jest z pracą H. Kawarady [10]. Zaobserwowana w tym przykładzie własność rozwiązań została określona jako *gaśnięcie.*

4. *Gaśnięcie* rozwiązania w skończonym czasie. Dla wyjaśnienia natury własności określanej jako *gaśnięcie* rozważmy za H. Kawaradą [10] następujący przykład równania zwyczajnego $\dot{y} = \frac{1}{1-y}$ z zerowym warunkiem początkowym (rys. 3).

W powyższym przykładzie rozwiązanie *gaśnie* w $\frac{1}{2}$. Jego pochodna czasowa staje się nieograniczona, gdy $t \nearrow \frac{1}{2}$, podczas gdy rozwiązanie rośnie do 1. Powodem takiego zachowania się rozwiązania jest to, iż nieliniowość ma osobliwość w punkcie 1 (por. J. K. Hale [8]).

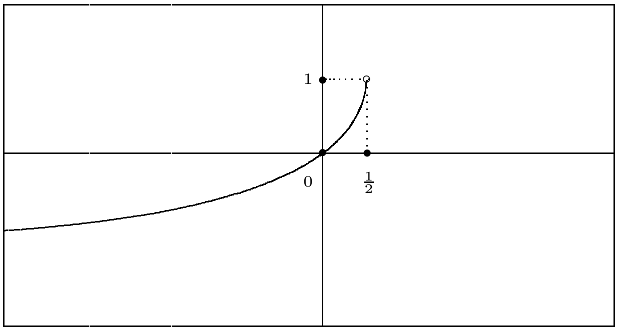
Opisaną tu własność rozwiązań określa się jako *gaśnięcie.*

Jeśli rozważymy równanie cząstkowe drugiego rzędu

$$u_t = \Delta u + \frac{1}{1-u}, \qquad t > 0,\ x \in \Omega, \tag{4}$$

z warunkiem

$$u(0,x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{5}$$



Rys. 3. Szkic rozwiązania $y = 1 - \sqrt{1-2t}$ równania $\dot{y} = \frac{1}{1-y}$ z warunkiem $y(0) = 0$. Maksymalnym przedziałem istnienia tego rozwiązania jest $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

oraz jednorodnym warunkiem Neumanna, to jego rozwiązanie (niezależne od $x \in \Omega$) będzie określone przez rozwiązanie równania zwyczajnego z rys. 3 i zaobserwujemy to samo zjawisko.

Oryginalny wynik H. Kawarady [10] uzyskany dla zadania (4)–(5) (w jednym wymiarze przestrzennym) z jednorodnym warunkiem Dirichleta

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t > 0 \qquad (\text{przypadek } \Omega = (0,l)), \tag{6}$$

zawierał następujący warunek wystarczający, by miało miejsce *gaśnięcie.*

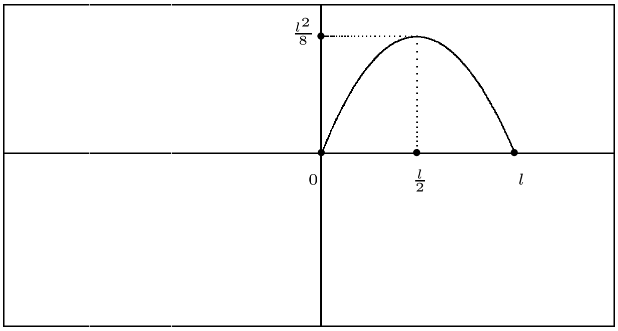
Twierdzenie 2. *Aby rozwiązanie zadania* (4)–(6) *miało własność gaśnięcia, wystarcza, by* $l > 2\sqrt{2}$.

Zauważmy, że warunek $l > 2\sqrt{2}$ powoduje, iż rozwiązanie staje się dowolnie bliskie 1 w skończonym czasie. Istotnie, gdyby tak nie było, to rozwiązanie u istniałoby globalnie dla $t \geqslant 0$. Porównując je z rozwiązaniem v zadania

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + 1, & t > 0,\ x \in (0,l), \\ v(t,0) = v(t,l) = 0, & t > 0, \\ v(0,x) = 0, & x \in (0,l), \end{cases} \tag{7}$$

otrzymalibyśmy wówczas, iż $u \geqslant v$ (gdyż $\frac{1}{1-u} \geqslant 1$, gdy $1 > u \geqslant 0$). Zauważmy jednak, że rozwiązanie v istnieje dla wszystkich $t \geqslant 0$. Co więcej, v zmierza przy $t \to +\infty$ do jedynego rozwiązania stacjonarnego $v_l(x) = \frac{1}{2}x(l-x)$, $x \in (0,l)$, zadania (7) (rys. 4). Z postaci rozwiązania v_l widać, iż $v_l\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l^2}{8} > 1$, o ile $l > 2\sqrt{2}$. Wtedy jednak v dążąc do v_l musi osiągnąć 1 w skończonym czasie, co nie jest możliwe, jeśli (jak to założyliśmy na wstępie obecnego wywodu) u nie ma tej własności.

Uwaga. Ciekawą obserwację, wiążącą się ze spojrzeniem na *gaśnięcie* z punktu widzenia układów dynamicznych, można znaleźć w monografii



Rys. 4. Szkic niezależnego od czasu rozwiązania $v_l(x) = \frac{1}{2}x(l-x)$ zadania (7).

J. K. Hale'a [8], gdzie jest pokazane jak wraz ze wzrostem l zmienia się portret fazowy (odpowiednio przeskalowanego) zadania (4)–(6).

5. *Zamieranie* rozwiązań w skończonym czasie. Warto jeszcze przytoczyć za A. Friedmanem i M. Herrero [5] przykład równania modelującego rozchodzenie się ciepła w ośrodku o stałej przewodności cieplnej z uwzględnieniem efektu absorpcji:

$$u_t = \Delta u - \lambda u^q, \qquad t > 0,\ x \in \Omega,\ q \in (0,1),\ \lambda > 0 \tag{8}$$

($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to obszar ograniczony gładkim brzegiem $\partial\Omega$). A. Friedman i M. Herrero rozpatrywali równanie (8) z warunkiem Dirichleta

$$u = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \tag{9}$$

i nieujemnym warunkiem początkowym

$$u(0,x) = u_0(x) \geqslant 0, \qquad x \in \Omega. \tag{10}$$

Istotną konsekwencją warunku $q \in (0,1)$ jest to, iż (nieujemne) rozwiązania zadania (8)–(10) „zanikają” w skończonym czasie, tj.

$$u(t,x) \equiv 0 \quad \text{dla } t \geqslant T_0 \qquad \text{przy pewnym } T_0 > 0.$$

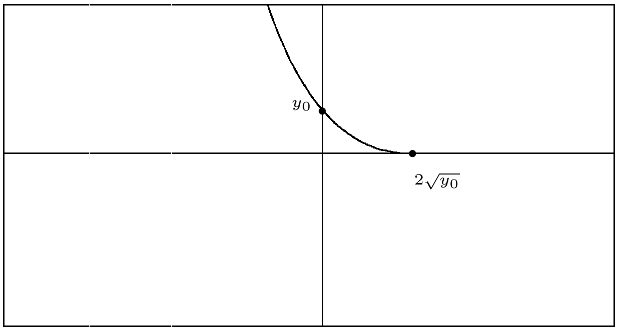
Ta własność rozwiązań, określana jako *zamieranie*, została zauważona przez A. S. Kalashnikowa [9]. Szczególnie łatwo jest ją dostrzec na przykładzie równania zwyczajnego

$$\dot{y} = -\lambda y^q \qquad (1 > q > 0), \tag{11}$$

rozpatrywanego z warunkiem Cauchy'ego $y(0) = y_0 > 0$ (rys. 5). Własność tę można dostrzec rozważając jawne rozwiązanie równania (8) w przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{R}^n$:

$$u_{T_0}(x,t) = \begin{cases} [\lambda(1-q)(T_0 - t)]^{\frac{1}{1-q}}, & t < T_0, \\ 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Wydaje się szczególnie ciekawe, co zauważyli A. Friedman i M. Herrero, że chociaż *zamieranie* i *wybuchy* są niejako przeciwnymi własnościami, to



Rys. 5. Szkic rozwiązania $y = \left(\sqrt{y}_0 - \frac{1}{2}t\right)^2$, $t \in (-\infty, 2\sqrt{y_0}\,]$, $y = 0$, $t > 2\sqrt{y_0}$, równania $\dot{y} = -\sqrt{y}$ z warunkiem $y(0) = y_0 > 0$.

w ich analizie przydatna jest ta sama technika. Widać to we wspomnianej pracy A. Friedmana i M. Herrero, która daje odpowiedzi na pytania *zamieranie gdzie*, *jak*, *kiedy...* podobnie jak czyniła to publikacja A. Friedmana i B. McLeoda w przypadku, gdy przedmiotem rozważań były *wybuchy* rozwiązań.

6. Uwagi końcowe. W tak krótkim omówieniu nie sposób w pełni przedstawić problematyki związanej z zachowaniem się rozwiązań równań ewolucyjnych. Podobnie nie jest też możliwe przytoczenie olbrzymiej literatury dotyczącej tej tematyki. Stąd podana tu bibliografia obejmuje tylko kilkanaście pozycji. Wśród nich zawarte są między innymi publikacje poświęcone problemom quasiliniowym, jak na przykład praca Chao-Nien Chena [2], która unaocznia między innymi jak zasadniczo różne jest zachowanie się rozwiązań równań quasiliniowych i semiliniowych. Na uwagę zasługują również prace H. Matano [12] oraz F. Rothe [13] pokazujące, że można otrzymać interesujące informacje o rozwiązaniach w oparciu o teorię układów dynamicznych, gdy dany układ nie ma własności globalnej stabilności w całej przestrzeni warunków początkowych (por. J. K. Hale [8]). Sięgając na koniec do najnowszych artykułów, warto wymienić między innymi pracę Q. Dai i Z. Xianzhonga [3], zawierającą ciekawe obserwacje dotyczące własności *gaśnięcia* rozwiązań w przypadku zagadnienia Cauchy'ego w całej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Warto również wspomnieć o pracy P. Souplet [15], w której omówione są *wybuchy* rozwiązań równań parabolicznych z zależnością gradientową; zawiera ona szereg otwartych problemów dotyczących zachowania się rozwiązań wspomnianych równań.

Bibliografia

[1] J. Bebernes, D. Eberly, *Mathematical Problems from Combustion Theory*, Springer, New York, 1989.

[2] C.-N. Chen, *Infinite time blow-up of solutions to a nonlinear parabolic problem*, J. Differential Equations 19 (1997), 409–427.

[3] Q. Dai, Z. Xianzhong, *The quenching phenomena for the Cauchy problem of semilinear parabolic equations*, J. Differential Equations 175 (2001), 163–174.

[4] T. Dłotko, *An L^2 approach to a parabolic problem with blowing up solutions*, Demonstratio Math. 23 (1989), 1169–1182.

[5] A. Friedman, M. A. Herrero, *Extinction properties of semilinear heat equations with strong absorption*, J. Math. Anal. Appl. 124 (1987), 530–546.

[6] A. Friedman, B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), 425–447.

[7] Y. Giga, R. V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), 297–319.

[8] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[9] A. S. Kalashnikov, *The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat conduction with absorption*, USSR Comput. Math. Math. Phys. 14 (1974), 70–85.

[10] H. Kawarada, *On solutions of initial-boundary problem for* $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$, Publ. RIMS Kyoto Univ. 10 (1975), 729–736.

[11] B. Kawohl, *Remarks on quenching, blow up and dead cores*, w książce Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 7, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992.

[12] H. Matano, *Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations*, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 221–227.

[13] F. Rothe, *Dynamics of a scalar nonlinear diffusion equation*, w książce Semesterberichte Funktionalanalysis, Universität Tübingen, 1987.

[14] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer, New York, 1983.

[15] P. Souplet, *Recent results and open problems on parabolic equations with gradient nonlinearities*, Electronic J. Differential Equations 20 (2001), 1–19.

[16] F. B. Weissler, *Single point blow-up for a semilinear initial value problem*, J. Differential Equations 55 (1984), 204–224.