ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXV (1999)

Zdzisław Kamont (Gdańsk)

Równania różniczkowe paraboliczne w pracach Profesora Piotra Besali

1. Wstęp. W kwietniu 1998 roku zmarł Piotr Besala, profesor Politechniki Gdańskiej.

Był absolwentem Uniwersytetu Jagiellońskiego i uczniem profesora Mirosława Krzyżańskiego. Pracę zawodową rozpoczął w styczniu 1953 roku w Katedrze Matematyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Od 1960 roku był związany z Politechniką Gdańską, gdzie przeszedł wszystkie stopnie kariery akademickiej. W październiku 1960 roku został asystentem w Katedrze Matematyki kierowanej wówczas przez docenta dra Wacława Pawelskiego. P. Besala doktoryzował się w 1961 roku na Wydziale Matematyki Fizyki i Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego na podstawie pracy *O rozwiązaniach zagadnień Fouriera dla pewnego układu równań parabolicznych nieliniowych w obszarach nieograniczonych.* Promotorem był profesor Mirosław Krzyżański. Został wówczas adiunktem w Katedrze Matematyki PG. Lata sześćdziesiąte były niezwykle korzystnym okresem rozwoju naukowego Piotra Besali. W 1964 roku habilitował się na Uniwersytecie Jagiellońskim na podstawie pracy *Oszacowania rozwiązań równań parabolicznych nieliniowych w obszarach nieograniczonych.* W roku akademickim 1964–65 był stypendystą „National Science Foundation” i odbył staż naukowy na Uniwersytecie Minnesota w Minneapolis w Stanach Zjednoczonych. Nawiązana wówczas współpraca z prof. D. Aronsonem i prof. P. Fife' em zaowocowała wspólnymi wynikami o równaniach różniczkowych parabolicznych. W tym czasie została utworzona na Politechnice Gdańskiej II Katedra Matematyki. Jej pierwszym kierownikiem został w 1965 roku docent dr hab. P. Besala.

W 1969 roku zmieniła się znacznie struktura organizacyjna Politechniki Gdańskiej. Zlikwidowane zostały katedry matematyki, powstał Międzywydziałowy Instytut Matematyki. Dyrektorem Instytutu został doc. dr hab. P. Besala. Był też przez wiele lat kierownikiem Zakładu Równań Różniczkowych w tym Instytucie. Tytuł naukowy profesora nadzwyczajnego otrzymał w 1973 roku. W latach 1975–1981 był członkiem Komitetu Nauk Matematycznych PAN. Angażował się w wiele prac organizacyjnych na Politechnice

Gdańskiej lub w środowisku matematycznym Trójmiasta. Był prodziekanem na Wydziale Mechaniczno-Technologicznym PG i członkiem Senatu, redagował przez wiele lat Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, serię Matematyka, był członkiem Komisji Przewodów Doktorskich funkcjonującej na Uniwersytecie Gdańskim. W latach 1969–1974 był członkiem Komisji Dydaktyki Matematyki dla Wyższego Szkolnictwa Technicznego w Polskim Towarzystwie Matematycznym, w latach 1975–1977 był Prezesem Gdańskiego Oddziału PTM. W 1984 roku utworzono na Politechnice Gdańskiej katedry matematyki. Prof. P. Besala kierował Katedrą Równań Różniczkowych na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej PG. Od stycznia 1994 roku był na emeryturze.

Pozostawił po sobie trwały ślad na Politechnice Gdańskiej i w środowisku matematycznym.

Prof. Piotr Besala był wybitnym specjalistą w zakresie równań różniczkowych parabolicznych. Jego działalność naukowa była silnie związana z krakowską szkołą równań różniczkowych. Jako główne kierunki badań należy wymienić:

I. Oszacowanie rozwiązań liniowych równań parabolicznych.

II. Jednoznaczność rozwiązań zagadnień początkowych.

III. Nierówności różniczkowe paraboliczne na zbiorach nieograniczonych.

IV. Konstrukcje rozwiązań podstawowych dla równań parabolicznych i ich zastosowania do zagadnień początkowych.

V. Problemy początkowe dla równań cząstkowych pierwszego rzędu.

VI. Zagadnienia różniczkowo-funkcyjne.

Zaprezentujemy tu najważniejsze wyniki i metody P. Besali.

Pierwszy opublikowany wynik P. Besali ([4]) dotyczy istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Fouriera dla nieliniowego równania parabolicznego. Problem jest rozważany na zbiorze nieograniczonym. Zaprezentujemy ten wynik, gdyż dobrze charakteryzuje on znaczną część późniejszej problematyki naukowej P. Besali.

Niech $M_{n\times n}$ będzie zbiorem macierzy kwadratowych $X = [x_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ o rzeczywistych elementach. Jeśli $Y \in M_{n\times n}$, $Y = [y_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$, to nierówność $X \leqslant Y$ oznacza, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} (x_{ij} - y_{ij})\xi_i\xi_j \leqslant 0 \qquad \text{dla dowolnego } \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n.$$

Jeśli $x \in R^n$, to $\|x\|$ oznacza normę euklidesową x. Symbol $\|X\|$, gdzie $X \in M_{n\times n}$, oznacza normę macierzy. Będziemy rozważać równania różniczkowe cząstkowe o funkcji niewiadomej z zmiennych $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \in R^{1+n}$. Jej pochodne cząstkowe oznaczamy następująco:

$$\partial_t z(t, x), \quad \partial_x z(t, x) = (\partial_{x_1} z(t, x), \ldots, \partial_{x_n} z(t, x)),$$
$$\partial^2_{xx} z(t, x) = [\partial_{x_i}\partial_{x_j} z(t, x)]_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Przypuśćmy, że $T > 0$ i $D \subset (0,T) \times R^n$ jest obszarem nieograniczonym. Oznaczmy

$$S = \overline{D} \cap [\{0\} \times R^n], \qquad \Sigma = \partial D \cap [(0,T) \times R^n],$$

gdzie $\overline{D}$ jest domknięciem zbioru D, a ∂D jego brzegiem. Zakładamy, że $S \neq \emptyset$ oraz że Σ jest powierzchnią, która nie jest styczna w żadnym punkcie do płaszczyzn $t = \text{const}$. Przypuśćmy, że

$$\varphi : S \cup \Sigma \to R \quad \text{i} \quad f : \overline{D} \times R \times R^n \times M_{n \times n} \to R$$

są funkcjami danymi. Rozważmy równanie różniczkowe

$$\partial_t z(t,x) = f(t,x,z(t,x),\partial_x z(t,x),\partial^2_{xx} z(t,x)) \tag{1}$$

z warunkiem początkowo-brzegowym

$$z = \varphi \quad \text{na} \quad S \cup \Sigma \tag{2}$$

i jego klasyczne rozwiązania mające oszacowania

$$|z(t,x)| \leqslant M \exp\{K\|x\|^2\}, \tag{3}$$

gdzie $(t,x) \in D$ i M, K są stałymi dodatnimi. Przypuśćmy, że funkcja f zmiennych (t,x,p,q,r), gdzie $q = (q_1,\ldots,q_n)$, $r = [r_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ jest ciągła i ma ciągłe pochodne cząstkowe

$$\partial_p f, \quad \partial_q f = (\partial_{q_1} f,\ldots,\partial_{q_n} f), \quad \partial_r f = [\partial_{r_{ij}} f]_{i,j=1,\ldots,n},$$

i pochodne te mają oszacowania

$$\|\partial_r f(P)\| \leqslant L_0, \quad \|\partial_q f(P)\| \leqslant L_1\|x\| + L_2, \quad \partial_p f(P) \leqslant L_3\|x\|^2 + L_4, \tag{4}$$

gdzie $P = (t,x,p,q,r) \in D$, a L_i, $0 \leqslant i \leqslant 4$, są stałymi dodatnimi. Załóżmy, że forma kwadratowa

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{r_{ij}} f(P)\xi_i\xi_j, \qquad \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in R^n,$$

jest dodatnio określona.

Przy tych założeniach problem różniczkowy (1), (2) nie może mieć dwóch różnych klasycznych rozwiązań spełniających warunek (3).

Istota twierdzenia P. Besali polega na rozważaniu równań nieliniowych na zbiorze nieograniczonym oraz na znalezieniu oszacowań (4). Jeśli istnieją rozwiązania zagadnienia Fouriera dla (1) na odpowiednich zbiorach ograniczonych, to problem (1), (2) ma rozwiązanie klasyczne spełniające (3). Dowód istnienia rozwiązania wykorzystuje liniowe nierówności różniczkowe typu parabolicznego oraz metodę dzielnika tłumiącego. Są to idee szeroko rozwinięte przez M. Krzyżańskiego.

Zaprezentowany wynik jest kontynuacją prac M. Krzyżańskiego [42], [44].

2. Oszacowanie rozwiązań liniowych równań parabolicznych. Dla dowolnych przestrzeni metrycznych U i V przez $C(U,V)$ oznaczymy zbiór funkcji ciągłych określonych na U o wartościach w V. Rozpoczniemy od wyniku M. Krzyżańskiego [45] o oszacowaniu rozwiązań równania różniczkowego

$$\Delta_x z(t,x) - \partial_t z(t,x) + c(t,x)z(t,x) = 0, \tag{5}$$

gdzie

$$\Delta_x z = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_i} z \quad \text{oraz} \quad c : (0,+\infty) \times R^n \to R.$$

Rozważamy klasyczne rozwiązania tego równania mające oszacowania (3) na $(0,+\infty) \times R^n$. Przypuśćmy, że

1) $c \in C((0,+\infty) \times R^n, R)$ i istnieje $L_0 \in R_+$, $R_+ = [0,+\infty)$, takie, że

$$|c(t,x) - c(t,\overline{x})| \leqslant L_0 \|x - \overline{x}\| \quad \text{na} \quad (0,+\infty) \times R^n,$$

2) istnieją stałe dodatnie α, β, A, B takie, że

$$\alpha^2 \|x\|^2 + \beta \leqslant c(t,x) \leqslant A\|x\|^2 + B \quad \text{na} \quad (0,+\infty) \times R^n,$$

3) $u : R_+ \times R^n \to R$, jest klasycznym rozwiązaniem równania (5) i dla pewnego $N > 0$ mamy $u(x,0) \geqslant N$ dla $x \in R^n$.

Wtedy istnieją stałe dodatnie M, K takie, że

$$u(t,x) \geqslant M \exp[\|x\|^2 \tan 2\alpha t] \quad \text{dla } (t,x) \in [0, \pi(2\alpha)^{-1}) \times R^n.$$

P. Besala podał rozwinięcia tego twierdzenia w następujących kierunkach.

2.1. Niech L będzie operatorem różniczkowym

$$\begin{aligned} L[z](t,x) = &\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} z(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} z(t,x) + \\ &+ c(t,x)z(t,x) - \partial_t z(t,x), \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}, \quad A : (0,T) \times R^n \to M_{n\times n}, \quad T > 0,$$
$$b = (b_1, \ldots, b_n) : (0,T) \times R^n \to R^n \quad \text{i} \quad c : (0,T) \times R^n \to R.$$

Przypuśćmy, że $f : (0,T) \times R^n \to R$, rozważajmy równanie różniczkowe

$$L[z] = f \tag{7}$$

i jego rozwiązania klasyczne spełniające warunek

$$z(t,x) \geqslant -M(t) \exp[K\|x\|^2] \quad \text{na} \quad [0,T) \times R^n,$$

gdzie $K > 0$, $M \in C([0,T), (0,+\infty))$. Przypuśćmy, że macierz $A(t,x)$ jest nieujemnie określona dla $(t,x) \in (0,T) \times R^n$ i istnieją stałe $A_j > 0$, $0 \leqslant j \leqslant 4$, oraz $\gamma > 0$ takie, że

$$\|A(t,x)\| \leqslant A_0, \quad \|b(t,x)\| \leqslant A_1\|x\| + A_2, \quad \gamma \leqslant c(t,x) \leqslant A_3\|x\|^2 + A_4$$

na $(0,T) \times R^n$. Załóżmy, że $f \in C((0,T) \times R^n, R_-)$, $R_- = (-\infty, 0]$, i $u : [0,T) \times R^n \to R$ jest rozwiązaniem równania (7) takim, że $u(x,0) \geqslant N$, $x \in R^n$, dla pewnego $N > 0$. Wówczas

$$u(t,x) \geqslant N \exp[\gamma t] \quad \text{na} \quad [0,T) \times R^n.$$

Twierdzenie to jest udowodnione metodą nierówności różniczkowych. Ma ono naturalne rozszerzenia na równania quasiliniowe.

2.2. Przypuśćmy teraz, że współczynniki operatora L danego wzorem (6) są funkcjami określonymi na $(0,+\infty) \times R^n$ i rozpatrzmy nierówność różniczkową

$$L[z](t,x) \leqslant 0. \tag{8}$$

Rozważmy problem zachowania się w nieskończoności (przy $t \to +\infty$) klasycznych rozwiązań zagadnienia (8). Główny wynik można scharakteryzować następująco. Przypuśćmy, że

1) istnieją funkcje κ, $M \in C(R^n, (0,+\infty))$ takie, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant \kappa(x)\|\xi\|^2, \quad \xi \in R^n,$$

oraz

$$\|A(t,x)\|, \quad \|b(t,x)\| \leqslant M(x) \quad \text{dla } (t,x) \in (0,+\infty) \times R^n,$$

2) istnieje $\eta > 0$ i funkcja

$$V : R^n \setminus \Omega_\eta \to R, \quad \Omega_\eta = \{x \in R^n : \|x\| \leqslant \eta\}$$

taka, że $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$ i spełniona jest nierówność różniczkowa

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} V(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} V(x) \leqslant 0,$$

$$\text{gdzie} \quad x \in R^n \setminus \Omega_\eta, t \in (0,+\infty),$$

3) $c \in C((0,+\infty) \times R^n, R_+)$ i istnieją stałe c_1, $\delta > 0$ takie, że $c(t,x) \geqslant c_1$ dla $\|x\| < \delta$, $t > 0$,

4) $u : R_+ \times R^n \to R_+$ jest klasycznym rozwiązaniem nierówności różniczkowej (8) i $u(x,0) \not\equiv 0$.

Wtedy istnieje funkcja $\psi : R^n \to (0,+\infty)$ i stała $\gamma > 0$ takie, że

$$u(t,x) \geqslant \psi(x) \exp[\gamma t] \quad \text{dla } (t,x) \in [1,+\infty) \times R^n.$$

Wynik ten jest otrzymany za pomocą silnej zasady maksimum. Założenie o istnieniu funkcji V jest tu podstawowe.

2.3. Istnieje też wersja tego twierdzenia o oszacowaniu z dołu rozwiązania nierówności różniczkowej (8) nie wymagająca warunku 2) o istnieniu rozwiązania nieograniczonego i dodatniego nierówności różniczkowej eliptycznej. Zakłada się wtedy więcej o operatorze L (jednostajną paraboliczność, silniejsze oszacowanie wzrostu współczynników). Istota wyniku polega na tym, że znajduje się stałe $\gamma, \beta, \beta_0 > 0$ i punkt $(\overline{t}, \overline{x}) \in (0, +\infty) \times R^n$ takie, że funkcja spełniająca (8) ma oszacowanie

$$u(t,x) \geqslant \beta_0 \exp[-\beta\|x - \overline{x}\|^2 + \gamma(t - \overline{t})], \quad x \in R^n,\ t \geqslant \overline{t}.$$

2.4. Przypuśćmy, że $A : (0,T) \times R^n \to M_{n\times n}$, $b : (0,T) \times R^n \to R^n$, $c : (0,T) \times R^n \to R$ i operator L jest określony wzorem (6). Rozważajmy równanie $L[z] = 0$ i jego klasyczne rozwiązania spełniające warunek

$$z(t,x) \geqslant -M \exp[K\|x\|^2], \quad (t,x) \in [0,T) \times R^n.$$

M. Krzyżański sformułował w [44] następujący problem: jakie założenia o współczynnikach operatora L gwarantują, że nierówność początkowa $u(x,0) \geqslant 0$ dla $x \in R^n$ dla rozwiązania równania $L[z] = 0$ implikuje nierówność $u(t,x) \geqslant 0$ dla $(t,x) \in [0,T) \times R^n$. P. Besala podał rozwiązanie tego problemu w pracy [9]. Poszukiwane oszacowanie współczynników ma postać

$$\|A(t,x)\| \leqslant A_0, \quad \|b(t,x)\| \leqslant A_1\|x\| + A_2, \quad c(t,x) \leqslant A_3\|x\|^2 + A_4,$$

gdzie A_i, $0 \leqslant i \leqslant 4$, są stałymi.

2.5. Niech L będzie operatorem różniczkowym

$$L[z](t,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} z(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} z(t,x), \tag{9}$$

gdzie $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$, $A : [0,T] \times R^n \to M_{n\times n}$, $b = (b_1, \dots, b_n) : [0,T] \times R^n \to R^n$. Niech $f, g : [0,T] \times R^n \times R \to R$ będą funkcjami danymi i rozważmy równania różniczkowe

$$\partial_t z(t,x) = L[z](t,x) + f(t,x,z(t,x)) \tag{10}$$

$$\partial_t z(t,x) = L[z](t,x) + g(t,x,z(t,x)) \tag{11}$$

i ich rozwiązania klasyczne. P. Besala podał oszacowanie normy w przestrzeni L^p różnicy między rozwiązaniami tych równań. Przybliżymy ten wynik. Niech $\widetilde{L}$ będzie operatorem sprzężonym do L. Rozważmy dodatnią funkcję wagową $\varPhi : [0,T] \times R^n \to R$ spełniającą (w klasycznym sensie) nierówność różniczkową $\widetilde{L}[\varPhi](t,x) \leqslant 0$, $(t,x) \in [0,T] \times R^n$. Przypuśćmy, że istnieją funkcje $\gamma, h \in C([0,T] \times R^n, R_+)$ takie, że

$$(f(t,x,s,) - g(t,x,\overline{s}))\operatorname{sgn}(s - \overline{s}) \leqslant \gamma(t,x)|s - \overline{s}| + h(t,x), \quad (t,x) \in [0,T] \times R^n.$$

Rozważmy przestrzeń L^p_T funkcji $z : [0,T] \times R^n \to R$ takich, że

$$\|z(t,\cdot)\|_{p,\varPhi} = \Big\{\int_{R^n} |z(t,x)|^p \varPhi(t,x)\,dx\Big\}^{1/p} < +\infty \quad \text{dla } t \in [0,T].$$

Niech u i v będą odpowiednio rozwiązaniami równań (10) i (11) takimi, że dla pewnej dodatniej funkcji wagowej Ψ mamy $\|u(t,\cdot)\|_{p,\Psi}, \|v(t,\cdot)\|_{p,\Psi} < +\infty$ dla $t \in [0,T]$. (Funkcja Ψ wyraża się liniowo z pomocą Φ i jej pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu.) Wówczas, przy naturalnych założeniach o współczynnikach operatora L, mamy oszacowanie:

$$\|(u-v)(t,\cdot)\|_{p,\Phi} \leqslant \|(u-v)(0,\cdot)\|_{p,\Phi} \exp\left\{\frac{p-1}{p}(\widetilde{c}+1)t\right\} + \\ + \left\{\int_0^t \|h(\tau,\cdot)\|^p_{p,\Phi} \exp[(p-1)(\widetilde{c}+1)(t-\tau)]\, d\tau\right\}^{1/p}, \qquad t \in [0,T],$$

gdzie $\widetilde{c} = \sup\{\gamma(t,x) : (t,x) \in [0,T] \times R^n\}$. Konsekwencją tego oszacowania jest wynik o ciągłej zależności rozwiązań od warunku początkowego i od danych funkcji w (10), (11), a także kryterium jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych. Twierdzenie powyższe ma rozszerzenie na słabo sprzężone układy paraboliczne.

Oszacowanie rozwiązań liniowych równań parabolicznych jest przedmiotem prac [8]–[10], [17], [27].

3. Jednoznaczność rozwiązań zagadnień początkowych. Przypuśćmy, że $f : (0,T] \times R^n \to R$, gdzie $T > 0$ i $\varphi : R^n \to R$ są funkcjami danymi. Oznaczmy przez L liniowy operator paraboliczny drugiego rzędu określony na $(0,T] \times R^n$. Klasyczne rozwiązanie równania różniczkowego $L[z] = f$ nie jest określone jednoznacznie przez warunek początkowy $z(0,x) = \varphi(x)$, $x \in R^n$. A. N. Tichonow udowodnił w 1935 roku, że zagadnienie Cauchy'ego dla równania przewodnictwa ciepła nie może mieć różnych rozwiązań w klasie funkcji mających oszacowanie (3) na $[0,T] \times R^n$. M. Krzyżański rozszerzył w 1945 roku wynik Tichonowa na zagadnienie Cauchy'ego dla równań liniowych drugiego rzędu jednostajnie parabolicznych z ograniczonymi współczynnikami. Twierdzenie M. Krzyżańskiego było uogólniane w dwu kierunkach. Pierwszy polegał na tym, że rezygnowano z założenia o jednostajnej paraboliczności i rozważano równania, których współczynniki są oszacowane przez pewne funkcje nieograniczone. Wyniki te wykorzystywały zasadę maksimum. Regularność współczynników operatora parabolicznego nie była tu istotna. Drugi kierunek polegał na tym, że warunek Tichonowa i Krzyżańskiego dotyczący oszacowania wzrostu rozwiązania i sformułowany punktowo zastępowano warunkiem całkowym. Wyniki te wykorzystywały następującą zasadę Holmgrena: istnienie rozwiązania zagadnienia różniczkowego sprzężonego implikuje jednoznaczność rozwiązania problemu wyjściowego. W tej klasie wyników konieczne były założenia o wyższej niż poprzednio regularności współczynników równania.

3.1. Zaprezentujemy teraz główny wynik o jednoznaczności D. G. Aronsona i P. Besali dla rozwiązań klasycznych. Rozważamy operator różniczkowy

$$\tag{12} L[z](t,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_j}[a_{ij}(t,x)z(t,x)] - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}[b_i(t,x)z(t,x)] + \\ + c(t,x)z(t,x) - \partial_t z(t,x).$$

Niech $A(t,x) = [a_{ij}(t,x)]_{i,j=1,\ldots,n}$, $b(t,x) = (b_1(t,x),\ldots,b_n(t,x))$. Zakładamy, że macierz $A(t,x)$ jest symetryczna i nieujemnie określona dla $(t,x) \in (0,T] \times R^n$ oraz, że

1) współczynniki operatora L i ich pochodne cząstkowe występujące w (12) są mierzalne i ograniczone na każdym zbiorze

$$\tag{13} X_\eta = \{(t,x) \in R^{1+n} : t \in [0,T],\ \|x\| \leqslant \eta\},$$

gdzie $\eta > 0$,

2) istnieją stałe $K > 0$ i $\lambda \in R_+$ takie, że

$$\|A(t,x)\| \leqslant K(\|x\|^2+1)^{(2-\lambda)/2}, \quad \|b(t,x)\| \leqslant K(\|x\|^2+1)^{1/2}, \\ c(t,x) \leqslant K(\|x\|^2+1)^{\lambda/2},$$

prawie wszędzie na $[0,T] \times R^n$,

3) $L^1(S)$ jest zbiorem funkcji $z : [0,T] \times R^n \to R$ takich, że dla pewnego $\alpha_0 \in R_+$ mamy

$$\int_0^T \int_{R^n} |z(t,x)|(\|x\|^2+1)^{-\alpha_0/2}\, dx\, dt < +\infty \quad \text{gdy } \lambda = 0,$$

oraz

$$\int_0^T \int_{R^n} |z(t,x)| \exp\{-\alpha_0(\|x\|^2+1)^{\lambda/2}\}\, dx\, dt < +\infty \quad \text{gdy } \lambda > 0.$$

Przy tych założeniach zagadnienie Cauchy'ego

$$\tag{14} L[z] = 0, \quad z(0,x) = 0 \quad \text{dla } x \in R^n,$$

ma tylko zerowe klasyczne rozwiązanie w zbiorze $L^1(S)$.

Dowód wykorzystuje następujące własności operatora L. Rozpatrzmy nierówność różniczkową

$$\tag{15} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} z(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} z(t,x) + \\ + c(t,x)z(t,x) + \partial_t z(t,x) \leqslant 0,$$

Oznaczmy przez $\Phi : [0,\delta] \times R^n \to R$ dodatnie klasyczne rozwiązanie nierówności (15). Załóżmy, że funkcja $w : [0,\delta] \times R^n \to R$ spełnia warunek

$$\int_0^\delta \int_{R^n} |w(t,x)| \{\overline{\Phi}(t,x) + \Phi(t,x)\Psi(t,x)\}\, dt\, dx < +\infty,$$

gdzie

$$\overline{\Phi}(t,x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)\partial_{x_j}\Phi(t,x)|,$$
$$\Psi(t,x) = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}(t,x)| + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i(t,x)|.$$

Wtedy $w = 0$ na $[0,\delta] \times R^n$. Wybierając w odpowiedni sposób funkcję Φ otrzymujemy tezę o jednoznaczności.

3.2. Drugi ważny wynik D. G. Aronsona i P. Besali dotyczy zagadnień początkowych na zbiorach nieograniczonych i jednoznaczności rozwiązań słabych. Niech

$$L[z](t,x) = \partial_t z(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}[a_{ij}(t,x)\partial_{x_i} z(t,x)] - \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} z(t,x)$$
$$- c(t,x)z(t,x), \qquad (t,x) \in [0,T] \times R^n,$$

i $\varphi : R^n \to R$. Następujące elementy tej teorii są istotne. Przypuśćmy, że $A(t,x) > 0$, $A^T(t,x) = A(t,x)$ (A^T oznacza macierz transponowaną do A), oraz

1) istnieją stałe $K > 0$, α_0, $\lambda \in R_+$ takie, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leqslant K(\|x\|^2 + 1)^{(2-\lambda)/2}\|\xi\|^2, \qquad \xi \in R^n,$$
$$\frac{3}{4} b^T(t,x)A^{-1}(t,x)b(t,x) + c(t,x) \leqslant K(\|x\|^2 + 1)^{\lambda/2}$$

prawie wszędzie na zbiorze $[0,T] \times R^n$,

2) $L^2(S)$ jest zbiorem tych funkcji $z : [0,T] \times R^n \to R$, że

$$\int_0^T \int_{R^n} z^2(t,x)(\|x\|^2 + 1)^{-\alpha_0}\, dx\, dt < +\infty \qquad \text{gdy } \lambda = 0,$$

oraz

$$\int_0^T \int_{R^n} z^2(t,x) \exp\{-2\alpha_0(\|x\|^2 + 1)^{\lambda/2}\}\, dx\, dt < +\infty \qquad \text{gdy } \lambda > 0.$$

Przy tych założeniach, zagadnienie Cauchy'ego $L[z] = 0$, $z(0,x) = 0$, $x \in R^n$, ma tylko zerowe słabe rozwiązanie w zbiorze $L^2(S)$.

3.3. Powyższe rezultaty były rozszerzone w następujących kierunkach:

I. Otrzymano twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych dla słabo sprzężonych układów parabolicznych z warunkami początkowymi Cauchy'ego.

II. Udowodniono jednoznaczność rozwiązań problemów początkowych dla zagadnień quasi-liniowych.

III. Wykazano jednoznaczność rozwiązań zagadnień brzegowych Dirichleta dla liniowych układów eliptycznych i rozwiązań klasycznych.

3.4. Zaprezentujemy teraz rezultat D. G. Aronsona i P. Besali o jednoznaczności nieujemnych rozwiązań równań parabolicznych z nieograniczonymi współczynnikami. Niech L będzie operatorem różniczkowym określonym przez (6) dla $(t,x) \in (0,T] \times R^n$. Jeśli

1) współczynniki operatora L i ich pochodne cząstkowe

$$\partial_{x_i} A(t,x), \quad \partial_{x_i}\partial_{x_j} A(t,x), \quad \partial_{x_i} b(t,x), \qquad (t,x) \in (0,T] \times R^n,$$

spełniają lokalny warunek Höldera,

2) istnieją stałe $\lambda \in [0,2]$ i $K > 0$ takie, że

$$\|A(t,x)\| \leqslant K(\|x\|^2+1)^{(2-\lambda)/2}, \quad \|\partial_{x_i} A(t,x)\|, \|b(t,x)\| \leqslant K(\|x\|^2+1)^{1/2},$$
$$\|\partial_{x_i}\partial_{x_j} A(t,x)\|, \|\partial_{x_i} b(t,x)\|, |c(t,x)| \leqslant K(\|x\|^2+1)^{\lambda/2},$$

gdzie $(t,x) \in (0,T] \times R^n$,

3) istnieje $\gamma > 0$ takie, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma(\|x\|^2+1)^{(2-\lambda)/2}\|\xi\|^2, \qquad (t,x) \in [0,T] \times R^n,\ \xi \in R^n,$$

to w zbiorze funkcji nieujemnych jedynym klasycznym rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$L[z] = 0, \qquad z(0,x) = 0 \quad \text{dla } x \in R^n,$$

jest $z = 0$.

Wartość tego wyniku polega na znalezieniu oszacowań współczynników operatora i odpowiednich pochodnych przez funkcje nieograniczone. Odpowiednie twierdzenia dla równania przewodnictwa ciepła oraz dla liniowych równań parabolicznych z ograniczonymi współczynnikami były znane wcześniej ([46], [56], [72]).

Jednoznaczność rozwiązań zagadnień początkowych jest przedmiotem prac [1], [2], [28], [31].

4. Nierówności różniczkowe paraboliczne na zbiorach nieograniczonych. Przypuśćmy, że $T > 0$ i $D \subset (0,T] \times R^n$ jest zbiorem nieograniczonym. Oznaczmy $S = \overline{D} \cap [\{0\} \times R^n]$, $\Sigma = \partial D \cap [(0,T] \times R^n]$ i załóżmy, że $S \neq \emptyset$. Przypuśćmy, że $f : D \times R \times R^n \times M_{n\times n} \to R$ jest funkcją daną. Rozważamy równanie nieliniowe

$$\partial_t z(t,x) = f(t,x,z(t,x),\partial_x z(t,x),\partial^2_{xx} z(t,x)). \tag{16}$$

Niech $\alpha, \beta \in R^k$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_k)$. Wówczas nierówność $\alpha \leqslant \beta$ oznacza, że $\alpha_i \leqslant \beta_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Analogicznie określamy relację $\alpha < \beta$.

4.1. Zaprezentujemy podstawowy wynik P. Besali o nierównościach różniczkowych generowanych przez równanie (16). Następujące elementy tej teorii są istotne. Zakładamy, że funkcja f zmiennych $(t,x,p,q,r) \in D \times R \times R^n \times M_{n\times n}$ spełnia warunek Lipschitza względem q i r ze współczynnikami L_0 i $L_1\|x\| + L_2$ odpowiednio, gdzie $L_0, L_1, L_2 \in R_+$. Zakładamy też, że f spełnia pewien jednostronny warunek Lipschitza względem zmiennej p ze współczynnikiem $L_3\|x\|^2 + L_4$, $L_3, L_4 \in R_+$. Przypuśćmy, że mamy funkcje $u, v \in C(D \cup S \cup \Sigma, R)$ takie, że

$$u(t,x) \leqslant M(t)\exp[K\|x\|^2], \quad v(t,x) \geqslant -M(t)\exp[K\|x\|^2] \qquad \text{dla } (t,x) \in R_+ \times R^n,$$

gdzie $K \in R_+$, $M : [0,T) \to (0,+\infty)$ i M jest ograniczona na każdym przedziale $[0,T_0], 0 < T_0 < T$. Zakładamy, że u i v mają na zbiorze D ciągłe pochodne cząstkowe występujące w równaniu (16), a równanie to jest paraboliczne w sensie Szarskiego na u lub na v. Oznacza to, że dla dowolnych macierzy $P, \widetilde{P} \in M_{n\times n}$ takich, że $P \leqslant \widetilde{P}$ mamy

$$f(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x),P) \leqslant f(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x),\widetilde{P}), \qquad (t,x) \in D,$$

(lub analogiczna nierówność dla v). Przypuśćmy, że spełniona jest nierówność początkowo-brzegowa $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ dla $(t,x) \in S \cup \Sigma$ i nierówności różniczkowe

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &\leqslant f(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x),\partial^2_{xx} u(t,x)),\\ \partial_t v(t,x) &\geqslant f(t,x,v(t,x),\partial_x v(t,x),\partial^2_{xx} v(t,x))\end{aligned}$$

dla $(t,x) \in D$. Wtedy mamy oszacowanie

$$u(t,x) \leqslant v(t,x) \qquad \text{dla } (t,x) \in D.$$

Jeśli

$$f = (f_1,\dots,f_m) : D \times R^m \times R^n \times M_{n\times n} \to R^m$$

i równanie (16) zastąpimy układem słabo sprzężonym, to twierdzenie o nierównościach różniczkowych wymaga dodatkowo warunku quasi-monotoniczności względem $p = (p_1,\dots,p_m)$. Został on wprowadzony do teorii nierówności różniczkowych zwyczajnych przez T. Ważewskiego [71]. J. Szarski wykazał w [61], że naturalne twierdzenia o nierównościach różniczkowych zwyczajnych są prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek quasi-monotoniczności Ważewskiego.

Istota wyniku P. Besali polega na tym, że D jest zbiorem nieograniczonym, a zbiory $D \cap \{(t,x) \in R^{1+n} : t = \text{const}\}$ mogą być nieograniczone. Zaprezentowane twierdzenie ma rozszerzenie na równania paraboliczne z warunkiem początkowym Cauchy'ego i zewnętrznym warunkiem brzegowym. Twierdzenia te mają wiele zastosowań. Wymienimy najważniejsze: oszacowanie rozwiązań zagadnień parabolicznych, oszacowanie różnicy między rozwiązaniami różnych problemów, ciągła zależność rozwiązań od funkcji początkowo-brzegowych i od prawych stron równań, jednoznaczność rozwiązań.

4.2. Ważnym wynikiem P. Besali jest rozwiązanie następującego zagadnienia o słabych nierównościach różniczkowych. Przypuśćmy, że $T > 0$, $D \subset (0,T] \times R^n$ jest obszarem i $\Gamma \subset \partial D$. Załóżmy, że $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \times R^m \times R^n \times M_{n\times n} \to R^m$ jest funkcją daną i $F = (F_1, \ldots, F_m)$ jest operatorem określonym następująco:

$$F_i[z](t,x) = \partial_t z_i(t,x) - f_i(t,x,z(t,x), \partial_z z_i(t,x), \partial^2_{xx} z_i(t,x)),$$
$$(t,x) \in D,\ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

gdzie $z = (z_1, \ldots, z_m)$. Załóżmy, że dla operatora F prawdziwe jest następujące twierdzenie o silnych nierównościach różniczkowych.

Jeśli

1) $u, v \in C(D \cup \Gamma, R^m)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$, u i v mają na D ciągłe pochodne cząstkowe występujące w definicji operatora F,

2) $u(t,x) < v(t,x)$ dla $(t,x) \in \Gamma$ oraz $F[u](t,x) < F[v](t,x)$ dla $(t,x) \in D$,

to $u(t,x) < v(t,x)$ dla $(t,x) \in D$.

W teorii nierówności różniczkowych ważne jest następujące pytanie: przy jakich dodatkowych założeniach o f prawdziwa jest implikacja:

jeśli $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ dla $(t,s) \in \Gamma$ i $F[u](t,x) \leqslant F[v](t,x)$ dla $(t,x) \in D$,

to $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ dla $(t,x) \in D$. Analogiczny problem można sformułować dla nierówności różniczkowych generowanych przez układ pierwszego rzędu

$$\partial_t z_i(t,x) = f_i(t,x,z(t,x), \partial_x z_i(t,x)), \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{17}$$

Prace J. Chabrowskiego [36], W. Mlaka [53], [54] i J. Szarskiego [57], [58], [60] zawierały następującą odpowiedź na te pytania. Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego

$$y'(t) = \sigma(t, y(t)), \quad y(0) = 0, \tag{18}$$

gdzie $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) : [0,T) \to R^m_+ \to R^m_+$ jest funkcją ciągłą. Przypuśćmy, że

1) $\sigma(t,\cdot) : R^m_+ \to R^m_+$ spełnia warunek quasi-monotoniczności i $\overline{y}(t) = 0$, $t \in [0,T)$, jest jedynym rozwiązaniem problemu (18),

2) oszacowanie

$$f(t,x,p,q,r) - f(t,x,\overline{p},q,r) \leqslant \sigma(t, p - \overline{p})$$

jest spełnione na $D \times R^m \times R^n \times M_{n\times n}$ dla $p \geqslant \overline{p}$.

Wówczas prawdziwe jest twierdzenie o słabych nierównościach generowanych przez operator F i odpowiedni warunek początkowo-brzegowy. Taką samą odpowiedź można sformułować dla nierówności różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu.

P. Besala wykazał ([14]), że w twierdzeniach o słabych nierównościach różniczkowych można opuścić założenie o quasi-monotoniczności funkcji porównawczej σ. Zaproponowany dowód opiera się na następującej idei. Niech $0 < T_0 < T$ będzie ustalone; rozpatrzmy problem porównawczy

$$y'(t) = \sigma(t, y(t)) + \varepsilon, \quad y(0) = \varepsilon, \tag{19}$$

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ i jego rozwiązanie $\omega(\cdot, \varepsilon)$. Dla małych ε istnieje ono na przedziale $[0, T_0)$. Niech $v_\varepsilon(t, x) = v(t, x) + \omega(t, \varepsilon)$ na $(D \cup \Gamma) \cap ([0, T_0) \times R^n)$. Wówczas $u(t, x) < v_\varepsilon(t, x)$ na $\Gamma \cap ([0, T_0) \times R^n)$ i $F[u](t, x) < F[v_\varepsilon](t, x)$ na $D \cap ([0, T_0) \times R^n)$. Zatem $u(t, x) < v_\varepsilon(t, x)$ na $D \cap ([0, T_0) \times R^n)$. Przy $\varepsilon \to 0$ i wobec dowolności T_0 otrzymujemy tezę twierdzenia o słabych nierównościach. Analogiczna metoda może być zastosowana do układów pierwszego rzędu.

4.3. P. Besala udowodnił silną zasadę maksimum dla nieliniowych równań parabolicznych (16). Istota wyniku polega na tym, że zrezygnowano z założenia o istnieniu pochodnych funkcji f. Wymagało to odpowiedniego dostosowania warunku jednostajnej paraboliczności równania (16). P. Besala rozwinął tu idee zapoczątkowanie przez J. Szarskiego w pracach [59], [60] i w monografii [61].

4.4. Rozpatrzmy równanie przewodnictwa ciepła (5). Zgodnie z twierdzeniem Tichonowa, zagadnienie Cauchy'ego dla równania (5) ma jednoznaczne klasyczne rozwiązanie w zbiorze funkcji $z : R_+ \times R \to R$ spełniających oszacowanie (3). Dla funkcji $u, v : R_+ \times R \to R$ spełniających oszacowanie (3) prawdziwe jest następujące twierdzenie o nierównościach różniczkowych: jeśli $u(0, x) \leqslant v(0, x)$ dla $x \in R^n$ i

$$\partial_t u(t, x) \leqslant \Delta_x u(t, x), \qquad \partial_t v(t, x) \geqslant \Delta_x v(t, x),$$

gdzie $(t, x) \in (0, +\infty) \times R^n$, to $u(t, x) \leqslant v(t, x)$ dla $(t, x) \in R_+ \times R^n$.

Rozważmy teraz problem ogólny. Niech L będzie operatorem różniczkowym określonym wzorem (12) na $(0, +\infty) \times R^n$ i $f : (0, +\infty) \times R^n \times R \to R$ funkcją daną. Przypuśćmy, że $u, v : R_+ \times R^n \to R$ mają na $(0, +\infty) \times R^n$ ciągłe pochodne cząstkowe występujące w definicji operatora L oraz $u(0, x) \leqslant v(0, x)$ dla $x \in R^n$. Przypuśćmy, że spełnione są nierówności różniczkowe

$$L[u](t, x) + f(t, x, u(t, x)) \geqslant 0, \tag{20}$$

$$L[v](t, x) + f(t, x, v(t, x)) \leqslant 0, \tag{21}$$

dla $(t, x) \in (0, +\infty) \times R^n$. Rozważamy problem: jakie dodatkowe założenia o współczynnikach operatora L i funkcjach u, v gwarantują, że $u(t, x) \leqslant v(t, x)$ dla $(t, x) \in R_+ \times R^n$.

Odpowiedź na to pytanie podana przez P. Besalę jest następująca. Przypuśćmy, że

1) współczynniki operatora L i ich pochodne cząstkowe występujące w (12) są mierzalne i ograniczone na każdym zbiorze (13),

2) istnieje funkcja $\widetilde{H} \in C(R_+ \times R^n, R_+)$ taka, że

$$[f(t,x,p) - f(t,x,\overline{p})]\mathrm{sgn}(p-\overline{p}) \leqslant \widetilde{H}(t,x)|p-\overline{p}| \quad \text{na } (0,+\infty) \times R^n \times R,$$

3) niech $\lambda \in (0,+\infty)$, $\mu \in R$ lub $\lambda = 0$ i $\mu \in [1,+\infty)$ będą ustalone; rozważamy funkcje u, v takie, że dla pewnego $K \in R_+$ i $\lambda \in R_+$, $\mu \in R$ mamy

$$\int_0^T \int_{R^n} ((u-v)(t,x)^+) \exp\{-K(\|x\|^2+1)^{\lambda/2}[\ln(\|x\|^2+1)+1]^{\mu}\}\, dt\, dx < +\infty,$$

gdzie $p^+ = \max\{0,p\}, p \in R$,

4) dla każdego $(t,x) \in R_+ \times R^n$ macierz $A(t,x)$ jest określona nieujemnie i istnieją stałe A_0, B_0, C_0 takie, że dla $\lambda > 0$ mamy

$$\|A(t,x)\| \leqslant A_0(\|x\|^2+1)^{(2-\lambda)/2}[\ln(\|x\|^2+1)+1]^{-\mu},$$
$$\|b(t,x)\| \leqslant B_0(\|x\|^2+1)^{1/2},$$
$$\widetilde{H}(t,x) \leqslant C_0(\|x\|^2+1)^{\lambda/2}[\ln(\|x\|^2+1)+1]^{\mu},$$

5) jeśli $\lambda = 0$, to zakładamy, że

$$\|A(t,x)\| \leqslant A_0(\|x\|^2+1)[\ln(\|x\|^2+1)+1]^{2-\mu},$$
$$\|b(t,x)\| \leqslant B_0(\|x\|^2+1)^{1/2}[\ln(\|x\|^2+1)+1],$$
$$\widetilde{H}(t,x) \leqslant C_0[\ln(\|x\|^2+1)+1]^{\mu}.$$

Przy tych założniach prawdziwe jest twierdzenie o nierównościach różniczkowych w zbiorze nieograniczonym: jeśli $u(0,x) \leqslant v(0,x)$ dla $x \in R^n$ i spełnione są warunki (20), (21), to $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ dla $(t,x) \in R_+ \times R^n$.

Powyższy wynik ma następujące zastosowania: implikuje zasadę maksimum, pozwala otrzymać różne oszacowania rozwiązań równania parabolicznego. Ma on naturalne rozszerzenie na słabo sprzężone układy nierówności parabolicznych. W tym przypadku zakładamy warunek quasi-monotoniczności dla $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Ciekawa jest następująca uwaga dotycząca nieujemnych rozwiązań równania (5) i odpowiednich nierówności różniczkowych. Zagadnienie Cauchy'ego dla równania (5) ma jednoznaczne rozwiązanie w klasie funkcji nieujemnych. Twierdzenie o nierównościach różniczkowych generowanych przez (5) nie jest prawdziwe w tej klasie funkcji.

Problematyka nierówności różniczkowych parabolicznych jest przedmiotem następujących prac P. Besali: [5], [13]–[15], [18]–[20], [24].

5. Istnienie rozwiązań równań parabolicznych. Wyniki P. Besali są tu rozwinięciem prac i idei M. Krzyżańskiego i dotyczą istnienia rozwiązań podstawowych dla równań liniowych oraz rozwiązalności pierwszego zagadnienia Fouriera dla równań nieliniowych na zbiorach nieograniczonych.

5.1. Sformułujemy problem o rozwiązaniu podstawowym. Niech L będzie operatorem różniczkowym określonym wzorem (6) dla $(t,x) \in [0,T] \times R^n$. Należy podać warunki wystarczające na to by istniała funkcja Γ zmiennych (t,x,s,y), $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x, y \in R^n$ taka, że

(i) dla każdego $(s,y) \in [0,T] \times R^n$ funkcja $\Gamma(\cdot,\cdot,s,y) : (s,T] \times R^n \to R$ ma ciągłe pochodne cząstkowe występujące w definicji operatora L i $L[\Gamma(\cdot,\cdot,s,y)](t,x) = 0$ dla $(t,x) \in (s,T] \times R^n$,

(ii) dla każdej funkcji ciągłej $\psi : R^n \to R$ o zwartym nośniku mamy

$$\lim_{(t,x)\to(s^+,\overline{x})} \int_{R^n} \Gamma(t,x,s,y)\psi(y)\,dy = \psi(\overline{x}).$$

Praca M. Krzyżańskiego i A. Szybiaka [48] zawierała twierdzenie o istnieniu rozwiązania podstawowego. Zakładano tam, że funkcje A i b są ciągłe i ograniczone wraz z pochodnymi cząstkowymi do trzeciego rzędu włącznie oraz, że operator L jest jednostajnie paraboliczny. Zakładano następujące oszacowanie dla c: $|c(t,x)| \leqslant A\|x\|^2 + B$, $(t,x) \in [0,T] \times R^n$. P. Besala wykazał w [6] ważne oszacowanie z dołu rozwiązania podstawowego skonstruowanego w [48]. Zaprezentujemy teraz wynik P. Besali o rozwiązaniu podstawowym będący istotnym rozszerzeniem prac M. Krzyżańskiego i A. Szybiaka [48] oraz J. Chabrowskiego [37]. Przypuśćmy, że A jest macierzą symetryczną i

1) istnieje $\kappa > 0$ takie, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant \kappa\|\xi\|^2 \qquad \text{dla } (t,x) \in [0,T] \times R^n,\ \xi \in R^n,$$

2) funkcje A, b, c oraz ich słabe pochodne $\partial_{x_i} A, \partial_{x_i}\partial_{x_j} A, \partial_{x_i} b$ spełniają warunek Höldera względem (t,x) na każdym zwartym podzbiorze zbioru $[0,T] \times R^n$,

3) istnieje dodatnie rozwiązanie $h : [0,T] \times R^n \to R$ nierówności różniczkowej

$$L[z] + \eta z(t,x)\Big[\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_j} a_{ij}(t,x) - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}\widetilde{b}_j(t,x)\Big] \leqslant 0$$

gdzie $\eta \in [0,1]$ i

$$\widetilde{b}_j(t,x) = \frac{2}{z(t,x)} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i} z(t,x) + b_j(t,x).$$

Wymagamy, by funkcja h spełniała nierówność dla każdego $t \in [0,T]$ i dla prawie wszystkich $x \in R^n$ oraz by pochodne $\partial_{x_i}\partial_{x_j}h$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, spełniały lokalny warunek Höldera względem (t,x).

Wówczas istnieje rozwiązanie podstawowe równania $L[z] = 0$. Ponadto mamy oszacowania

$$0 \leqslant \Gamma(t,x,s,y) \leqslant C(t-s)^{-n/2}\frac{h(t,x)}{h(s,y)} \qquad \text{dla } 0 \leqslant s < t \leqslant T,\ x,y \in R^n,$$

$$\int\limits_{R^n} \Gamma(t,x,s,y)h(s,y)\,dy \leqslant h(t,x) \qquad \text{dla } (t,x) \in (s,T] \times R^n,$$

oraz

$$\int\limits_{R^n} \Gamma(t,x,s,y)\frac{1}{h(t,x)}\,dx \leqslant \frac{1}{h(s,y)} \qquad \text{dla } (s,y) \in [0,t) \times R^n,$$

gdzie C jest stała dodatnią.

Wartość powyższego wyniku polega na tym, że pozwala rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$L[z] = f, \quad z(0,x) = \varphi(x), \quad x \in R^n, \tag{22}$$

dla szerokiej klasy funkcji f i φ. Dokładniej, jeśli

1) φ jest ciągła, f jest ciągła i spełnia lokalny warunek Höldera względem (t,x) oraz

$$|\varphi(x)| \leqslant Kh(0,x), \quad x \in R^n, \qquad |f(t,x)| \leqslant Kh(t,x), \quad (t,x) \in [0,T] \times R^n,$$

dla pewnego $K > 0$, to

$$u(t,x) = \int\limits_{R^n} \Gamma(t,x,0,y)\varphi(y)\,dy - \int\limits_0^t \int\limits_{R^n} \Gamma(t,x,s,y)f(s,y)\,dy\,ds$$

jest rozwiązaniem problemu (22) i $|u(t,x)| \leqslant \mathrm{const}\, h(t,x)$ na $[0,T] \times R^n$.

Zaprezentowany wynik pochodzi z pracy [21]. Jego rozszerzenie na słabo sprzężone układy paraboliczne jest zawarte w [22]. Prace te są kontynuacją wyniku z [3].

5.2. W literaturze jest niewiele twierdzeń o istnieniu rozwiązań nieliniowych równań parabolicznych. Wynik P. Besali zawarty w [7] jest pierwszym tego rodzaju. Rozważane jest pierwsze zagadnienie Fouriera dla układu słabo sprzężonego

$$\partial_t z_i(t,x) = F_i(t,x,z_i(t,x),\partial_x z(t,x),\partial_{xx}^2 z_i(t,x)), \qquad i = 1,\dots,m,$$

gdzie $z = (z_1,\dots,z_m)$. Wykazano istnienie rozwiązania na zbiorze nieograniczonym, którego przecięcia ze zbiorami $\{(t,x) \in R^{1+n} : t = \mathrm{const},\ x \in R^n\}$ nie są ograniczone.

Wynik ten jest rozszerzony ([11]) na nieliniowe układy eliptycznych w zbiorach nieograniczonych. Analogiczne zagadnienia dla równań liniowych rozważane były w [41]–[43].

6. Zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Wyniki P. Besali należy zaprezentować na następującym tle. Niech E będzie piramidą Haara

$$E = \{(t, x) \in R^{1+n} : t \in [0, a),\ x \in [-b + Mt, b - Mt]\} \tag{23}$$

gdzie $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $b_i > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, oraz $M = (M_1, \ldots, M_n) \in R^n_+$, $b - Ma > 0$. Załóżmy, że $u \in C(E, R)$ oraz istnieją pochodne cząstkowe $\partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)$ dla $(t, x) \in \operatorname{Int} E$ i u jest różniczkowalna na zbiorze $\partial E \cap [(0, a) \times R^n]$. Załóżmy, że $\sigma : [0, a) \times R_+ \to R_+$ jest funkcją ciągłą i zagadnienie Cauchy'ego

$$w'(t) = \sigma(t, w(t)), \qquad \omega(0) = \eta,$$

ma prawostronne maksymalne rozwiązanie $\omega(\cdot, \eta)$ na przedziale $[0, a)$ dla każdego $\eta \in R_+$. Przypuśćmy, że dla u mamy oszacowanie na zbiorze początkowym $|u(0, x)| \leqslant \widetilde{\eta}$, $x \in [-b, b]$, i spełniona jest nierówność różniczkowa

$$|\partial_t u(t, x)| \leqslant \sigma(t, |u(t, x)|) + \sum_{i=1}^{m} M_i |\partial_{x_i} u(t, x)|, \qquad (t, x) \in E \cap [(0, a) \times R^n].$$

Wówczas $|u(t, x)| \leqslant \omega(t, \widetilde{\eta})$ dla $(t, x) \in E$. Twierdzenie to udowodnił J. Szarski [61]. Wcześniejsza wersja tego twierdzenia dla funkcji $\sigma(t, s) = A + Bs$ znana jest w literaturze jako lemat Haara.

Twierdzenie J. Szarskiego odgrywa ważną rolę w teorii równań różniczkowych Hamiltona–Jacobiego. Pozwala otrzymać ogólne kryteria jednoznaczności rozwiązań, wykazać ciągłą zależność rozwiązań od danych funkcji, oszacować błąd rozwiązania przybliżonego. Jest użyteczne w twierdzeniach o istnieniu rozwiązań. Jest ono jednak kłopotliwe w sytuacji, gdy rozważamy równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu na zbiorze nieograniczonym $[0, a) \times R^n$. Wymaga ono bowiem założenia, że rozważamy rozwiązania różniczkowalne. P. Besala udowodnił twierdzenie porównawcze dla nierówności cząstkowych pierwszego rzędu na zbiorze nieograniczonym bez wymagania różniczkowalności. Twierdzenie to jest mniej ogólne od wyniku J. Szarskiego w innym fragmencie założeń.

6.1. P. Besala udowodnił następujące twierdzenie porównawcze. Przypuśćmy, że

1) że $\sigma : [0, a) \times R_+ \to R_+$ jest ciągła i istnieje $K \in R_+$ takie, że

$$|\sigma(t, s) - \sigma(t, \overline{s})| \leqslant K|s - \overline{s}| \quad \text{ na } [0, a) \times R_+,$$

2) $u : [0, a) \times R^n \to R$ jest funkcją ciągłą i istnieją pochodne $\partial_t u, \partial_x u$ na $(0, a) \times R^n$,

3) istnieje $\widetilde{\eta} \in R_+$ takie, że $|u(0, x)| \leqslant \widetilde{\eta}$ dla $x \in R^n$ i spełniona jest nierówność różniczkowa

$$|\partial_t u(t, x)| \leqslant \sigma(t, |u(t, x)|) + \sum_{i=1}^{n} L_i |\partial_{x_i} u(t, x)|, \qquad (t, x) \in (0, a) \times R^n,$$

dla pewnego $L = (L_1, \ldots, L_n) \in R^n_+$. Przy tych założeniach mamy $|u(t,x)| \leqslant \omega(t, \widetilde{\eta})$ dla $(t,x) \in [0,a) \times R^n$.

Dowód opiera się na tym, że Autor potrafił znaleźć nieograniczone rozwiązanie nierówności różniczkowej

$$(K+1)z(t,x) + \sum_{i=1}^{n} L_i |\partial_{x_i} z(t,x)| \leqslant \partial_t z(t,x), \qquad (t,x) \in (0,a) \times R^n.$$

Istnieje też wersja twierdzenia porównawczego dla układów nierówności różniczkowych i ich rozwiązań rozważanych na $[0,a) \times R^n$. Wymagane są wtedy warunki quasi-monotoniczności dla funkcji σ. Twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równania

$$\partial_t z(t,x) = f(t,x,z(t,x), \partial_x z(t,x)) \tag{24}$$

lub dla odpowiedniego słabo sprzężonego układu wykorzystują wynik P. Besali.

6.2. Przedstawimy teraz ważne twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych dla równania (24) rozważanych na $[0,a) \times R^n$. Klasyczne twierdzenie J. Szarskiego dla równania (24) i rozwiązań rozważanych na piramidzie Haara można scharakteryzować następująco: jeśli istnieje funkcja porównawcza typu Perrona dla f względem trzeciego argumentu i f spełnia warunek Lipschitza względem ostatniej zmiennej (n-wymiarowej) ze współczynnikami $(M_1, \ldots, M_n)$ występującymi w definicji (23) zbioru E, to klasyczne rozwiązania równania (24) różniczkowalne na zbiorze $\partial E \cap [(0,a) \times R^n]$ są wyznaczone jednoznacznie przez warunek początkowy. P. Besala wykazał, że warunek

$$|f(t,x,s,q) - f(t,x,\overline{s},\overline{q})| \leqslant L|s - \overline{s}| + K \sum_{i=1}^{n} \max[|q_i - \overline{q}_i|, |q_i - \overline{q}_i|^{\alpha}] \tag{25}$$

gdzie $0 < \alpha < 1$, jest wystarczający dla jednoznaczności klasycznych rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego równania (24) na $[0,a) \times R^n$.

Ważna jest też następująca uwaga: warunek (25) nie gwarantuje jednoznaczności rozwiązań rozważanych na zbiorze ograniczonym.

6.3. Niech E będzie piramidą Haara (23) i $f : E \times R \times R^n \to R$ będzie funkcją daną. Klasyczne twierdzenie J. Szarskiego o nierównościach różniczkowych ([61]) orzeka, że jeśli

1) $u, v \in C(E,R)$, u i v mają pochodne $\partial_t u, \partial_x u, \partial_t v, \partial_x v$ na E i są różniczkowalne na $\partial E \cap [(0,a) \times R^n]$,

2) funkcja f spełnia warunek Lipschitza

$$|f(t,x,p,q) - f(t,x,p,\overline{q})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i |q_i - \overline{q}_i| \qquad \text{na } E \times R \times R^n,$$

3) spełniona jest nierówność początkowa

$$u(0,x) < v(0,x) \quad \text{dla } x \in [-b,b], \tag{26}$$

i nierówność różniczkowa

$$\partial_t u(t,x) - f(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x)) < \partial_t v(t,x) - f(t,x,v(t,x),\partial_x v(t,x)) \tag{27}$$

dla $(t,x) \in E$, wówczas mamy oszacowanie

$$u(t,x) < v(t,x) \quad \text{dla } (t,x) \in E. \tag{28}$$

Rozważmy teraz następujące pytanie: jakie dodatkowe założenia o f gwarantują, że silna nierówność początkowa (26) i słaba nierówność różniczkowa typu (27) implikuje tezę (28)?

P. Besala podał następującą odpowiedź na to pytanie: dodatkowe założenie ma postać: istnieje funkcja $\sigma : [0,a) \times R_+ \to R_+$ taka, że

1) σ jest ciągła, $\sigma(t,0) = 0$ dla $t \in [0,a)$ i lewostronnym minimalnym rozwiązaniem problemu

$$w'(t) = \sigma(t,w(t)), \qquad \lim_{t\to a^-} w(t) = 0,$$

jest $w(t) = 0$, $t \in [0,a)$,

2) spełnione jest oszacowanie

$$f(t,x,p,q) - f(t,x,\overline{p},q) \leqslant \sigma(t,p-\overline{p})$$

na $E \times R \times R^n$ dla $p \leqslant \overline{p}$.

Można wtedy skonstruować funkcję $\widetilde{u} \in C(E,R)$ taką, że $u(t,x) < \widetilde{u}(t,x)$ na E i para funkcji $\{\widetilde{u}, v\}$ spełnia założenia twierdzenia Szarskiego. Stąd otrzymujemy (28). Wynik ten ma rozszerzenie na słabo sprzężone układy spełniające warunek quasi-monotoniczności względem p.

P. Besala opublikował trzy prace o równaniach cząstkowych pierwszego rzędu [12], [16], [23].

7. Zagadnienia różniczkowo-funkcyjne. Prace J. Szarskiego [62]–[65] zapoczątkowały problematykę nierówności różniczkowo-funkcyjnych parabolicznych. W [50] udowodniono twierdzenia o nierównościach różniczkowych generowanych przez równania paraboliczne różniczkowo-całkowe. Obecnie istnieje szeroka literatura na ten temat. Zaprezentujemy wynik P. Besali i G. Paszka o nierównościach różniczkowo-funkcyjnych na zbiorach nieograniczonych. Ograniczymy się do nierówności różniczkowo-funkcyjnych generowanych przez równanie

$$\partial_t z(t,x) = L[z](t,x) + f(t,x,z(t,x),z(t,\cdot)) \tag{29}$$

gdzie L jest operatorem określonym przez (9) (autorzy rozważają układ słabo sprzężony). Przypuśćmy, że $D \subset (0,T)\times R^n$ jest zbiorem nieograniczonym i operator L jest określony dla $(t,x)\in \overline{D}$. Niech $\Sigma = \partial D \cap [0,T)\times R^n]$. Przypuśćmy, że $u, v : \overline{D} \to R$ spełniają nierówności różniczkowe

$$\partial_t u(t,x) \leqslant L[u](t,x) + f(t,x,u(t,x),u(t,\cdot))$$
$$\partial_t v(t,x) \geqslant L[v](t,x) + f(t,x,v(t,x),v(t,\cdot))$$

i nierówność początkowo-brzegową $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ dla $(t,x)\in\Sigma$.

Funkcja f jest niemalejąca względem ostatniego argumentu i istnieją stałe $p \geqslant 1$, $\lambda > 0$, $K, \overline{K} \in R_+$ takie, że

$$\int_{D_t} (|u(t,x)|^p + |v(t,x)|^p) \exp[-K(\|x\|^2+1)^{\lambda/2}]\, dx \leqslant \overline{K}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

gdzie $D_\tau = \{(t,x)\in D : t = \tau\}$. Wtedy, przy pewnych założeniach dotyczących współczynników operatora L mamy $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ dla $(t,x)\in D$. Opuszczone tu założenia o L dotyczą regularności i oszacowania współczynników macierzy A i wektora b i są naturalne dla twierdzeń o zagadnieniach parabolicznych rozważanych na zbiorach nieograniczonych. W twierdzeniu tym istotne jest również to, że nie zakłada się ograniczoności zbiorów $D\cap X_\eta$, gdzie X_η jest określony przez (13).

Naturalne zastosowania powyższego wyniku, to zasada maksimum dla operatorów parabolicznych różniczkowo-funkcyjnych, oszacowanie rozwiązań pierwszego zagadnienia Fouriera dla (29), kryterium jednoznaczności klasycznych rozwiązań w odpowiednich przestrzeniach.

7.1. Jednoznaczność rozwiązań zagadnień różniczkowo-funkcyjnych w przestrzeniach Sobolewa.

Rozważmy zagadnienie Fouriera

$$(30) \quad \begin{aligned} \partial_t z_k(t,x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial_{x_k}} A_i^{(k)}(t,x,z(t,x),\partial_x z(t,x), z(t,\cdot), \partial_x z(t,\cdot)) +& \\ + B^k(t,x,z(t,x),\partial_x z(t,x), z(t,\cdot),\partial_x z(t,\cdot)),& \\ (t,x)\in D,\ k=1,\ldots,m,& \\ z(t,x) = 0 \quad \text{dla } (t,x)\in\partial\Omega\times(0,T), \qquad z(0,x) = \varphi(x) \quad \text{dla } x\in\Omega,& \end{aligned}$$

gdzie $z = (z_1,\ldots,z_m)$ oraz $\partial_x z(t,x) = [\partial_{x_i} z_j(t,x)]_{i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,m}$, a $\Omega \subset R^n$ jest zbiorem otwartym. P. Besala i G. Paszek udowodnili jednoznaczność rozwiązań powyższego problemu. Istota wyniku polega na tym, że rozważane są układy silnie sprzężone, a argument funkcyjny dotyczy nie tylko funkcji niewiadomej, ale także jej pochodnych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych. Rozważane są rozwiązania w przestrzeniach Sobolewa, a oszacowania całkowe określające zbiór funkcji, w którym rozwiązanie jest jednoznaczne, dotyczy funkcji niewiadomej i jej pochodnych względem x.

7.2. P. Besala badał układy quasi-liniowe pierwszego rzędu w postaci kanonicznej Schaudera.

Zagadnienie Cauchy'ego dla silnie sprzężonych nieliniowych układów równań cząstkowych pierwszego rzędu nie jest poprawnie postawione. Istnieją układy quasi-liniowe, dla których problem początkowy, a także pewne problemy nielokalne, są poprawnie postawione. L. Cesari ([34], [35]) i P. Bassanini ([32], [33]) wykazali twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, a także o ciągłej zależności rozwiązań od danych funkcji dla układów quasi-liniowych w postaci kanonicznej Schaudera. Rozważane były rozwiązania w sensie Caratheodory'ego. Metoda bicharakterystyk, a także twierdzenia o nierównościach całkowych umożliwiły otrzymanie tych wyników.

Prace niżej podpisanego i J. Turo ([38]-[40]) oraz prace J. Turo ([66], [67]) zapoczątkowały badania dotyczące zagadnień różniczkowo-funkcyjnych dla układów quasi-liniowych. Praca P. Besali [26] nawiązuje do tych wyników, a także do metod z [33], [35]. Rozpatrzmy układ równań

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(t,x,z(\cdot))\Big[\partial_t z_j(t,x) + \sum_{k=1}^{n} \varrho_{ik}(t,x,z(\cdot))\partial_{x_k} z_j(t,x)\Big] = \\ = f_i(t,x,z(\cdot)), \quad i=1,\dots,m, \tag{31}$$

z warunkiem początkowym

$$z(0,x) = \varphi(x) \quad \text{dla } x \in R^n, \tag{32}$$

gdzie $A = [A_{ij}]_{i,j=1,\dots,m}$, $\varrho = [\varrho_{ik}]_{i=1,\dots,m,\,k=1,\dots,n}$, $f = (f_1,\dots,f_m)$ oraz φ są funkcjami danymi określonymi na zbiorze $[0,a)\times R^n \times C([0,a)\times R^n, R^m)$. Zakłada się, że układ (31) spełnia warunek Volterry. P. Besala wykazał, że przy naturalnych założeniach o A, ϱ, f i φ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie w sensie Caratheodory'ego powyższego problemu. Rozwiązanie jest określone na zbiorze $[0,c) \times R^n$ dla dostatecznie małego $c > 0$.

Znacznie silniejszych założeń wymaga twierdzenie o istnieniu rozwiązań problemu, w którym warunek początkowy (32) jest zastąpiony przez warunek nielokalny

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} b_{ijk} z_j(a_k,x) = \psi(x), \quad x \in R^n,\ i=1,\dots,m,$$

gdzie $0 \leqslant a_k < a$, $1 \leqslant k \leqslant r$, i $b_{ijk} : R^n \to R$ są funkcjami danymi. Problematyka ta była kontynuowana przez innych autorów.

Zagadnienia różniczkowo-funkcyjne są przedmiotem prac [26], [29], [30].

8. Aproksymacja różnicowa równań parabolicznych. Przypuśćmy, że $f : [0,T] \times R^n \times R \times M_{n\times n} \to R$ i $\varphi : R^n \to R$ są funkcjami danymi i rozważmy zagadnienia Cauchy'ego

$$(33)\qquad \partial_t z(t,x) = f(t,x,z(t,x)\partial_x z(t,x), \partial^2_{xx} z(t,x)), \quad z(0,x)=\varphi(x) \quad \text{dla } x\in R^n.$$

Niech punkty $(t^{(i)}, x^{(m)}) = (t^{(i)}, x_1^{(m_1)}, \ldots, x_n^{(m_n)})$ będą węzłami siatki jednostajnej na $[0,T]\times R^n$. Definiujemy $z^{(i,m)} = z(t^{(i)}, x^{(m)})$. Oznaczmy przez

$$\delta_0, \quad \delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n), \quad \delta^2 = [\delta^2_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$$

operatory różnicowe aproksymujące pochodne cząstkowe równania parabolicznego. Rozpatrzmy zagadnienie różnicowe

$$(34)\qquad \delta_0 z^{(i,m)} = f(t^{(i)}, x^{(m)} z^{(i,m)}, \delta z^{(i,m)}, \delta^2 z^{(i,m)}), \quad z^{(0,m)} = \varphi^{(m)} \quad \text{dla } x^{(m)}\in R^n.$$

P. Besala podał w [25] warunki wystarczające na to, by rozwiązania zagadnienia różnicowego (34) aproksymowały klasyczne rozwiązania problemu (33) z dowolną dokładnością. Trudność zadania polega na tym, że rozważamy rozwiązania zagadnienia (33) na zbiorze nieograniczonym spełniające oszacowanie (3). Warunki te dotyczą siatki na zbiorze $[0,T]\times R$, rozwiązania problemu (33) i funkcji f.

Twierdzenia o zbieżności metod różnicowych dla nieliniowych równań parabolicznych i ich klasycznych rozwiązań na zbiorach ograniczonych podał M. Malec ([51], [52]). Zagadnienie dyskretyzacji względem zmiennej przestrzennej równań parabolicznych o dwu zmiennych niezależnych i na siatkach niejednostajnych rozwiązał A. Voigt ([68]).

9. Zespół naukowy. Prof. P. Besala utworzył na Politechnice Gdańskiej zespół naukowy, którym kierował przez wiele lat. Powstało tam wiele prac o równaniach parabolicznych. Przytaczamy tytuły prac doktorskich napisanych pod kierunkiem prof. P. Besali.

1. Henryk Ugowski, *O równaniach różniczkowo-całkowych typu parabolicznego*, 1968.

2. Marek Berndt, *Rozwiązanie podstawowe równania różniczkowo-całkowego typu parabolicznego*, 1971.

3. Jadwiga Żuk, *O oszacowaniach rozwiązań nieliniowych równań różniczkowo-całkowych typu parabolicznego*, 1976.

4. Gerard Paszek, *Pewne równania różniczkowo-funkcjonalne typu parabolicznego*, 1977.

5. Adam Gnatek, *O równaniach różniczkowo-całkowych mieszanych procesów stochastycznych Markowa*, 1979.

Dobrze ilustrują one problematykę badawczą zespołu.

Prace P. Besali są cytowane w monografiach [47], [49], [55], [61], [69], [70]. Były one inspiracją do uzyskania wielu wartościowych wyników o równaniach parabolicznych. Zaprezentowanie ich przekracza ramy tego eseju.

Cytowane prace

[1] D. G. A r o n s o n, P. B e s a l a, *Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations*, J. Math. Anal. Appl. 13 (3) (1966), 516–526.

[2] D. G. A r o n s o n, P. B e s a l a, *Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients*, Colloq. Math. 18 (1967), 125–135.

[3] D. G. A r o n s o n, P. B e s a l a, *Parabolic equations with unbounded coefficients*, J. Differential Equations 3 (1967), 1–14.

[4] P. B e s a l a, *O rozwiązaniach równania nieliniowego typu parabolicznego w obszarze nieograniczonym*, Zesz. Nauk. Uniw. Jagiell., Prace Mat. 6 (1961), 83–92.

[5] P. B e s a l a, *On solutions of non-linear parabolic equations defined in unbounded domains*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 9 (1961), 531–535.

[6] P. B e s a l a, *On a certain property of the fundamental solution of a linear parabolic equation the last coefficient of which is unbounded*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér Sci. Math. Astronom. Phys. 11 (1963), 155–158.

[7] P. B e s a l a, *On solutions of Fourier's first problem for a system of non-linear parabolic equations in an unbounded domain*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), 247–265.

[8] P. B e s a l a, *Oszacowania rozwiązań równań parabolicznych nieliniowych w obszarach nieograniczonych*, Zesz. Nauk. Polit. Gd., Matematyka 1 (1963), 1–44.

[9] B. B e s a l a, *A remark on a problem of M. Krzyżański concerning second order parabolic equations*, Colloq. Math. 10 (1963), 161–164.

[10] P. B e s a l a, *Evaluations of solutions of a second order parabolic equation*, Colloq. Math. 10 (1963), 165–171.

[11] P. B e s a l a, *On solutions of non-linear second order elliptic equations defined in unbounded domains*, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 13 (1964), 75–86.

[12] P. B e s a l a, *On solutions of first order partial differential equations defined in an unbounded zone*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1964), 95–99.

[13] P. B e s a l a, *Concerning solutions of an exterior boundary-value problem for a system of non-linear parabolic equations*, Ann. Polon. Math. 14 (1964), 289–301.

[14] P. B e s a l a, *On weak differential inequalities*, Ann. Polon. Math. 16 (1965), 185–194.

[15] P. B e s a l a, *Limitations of solutions of non-linear parabolic equations in unbounded domains*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), 25–47.

[16] P. B e s a l a, *On partial differential inequalities of the first order*, Ann. Polon. Math. 25 (1971), 145–148.

[17] P. B e s a l a, *On L^p-estimates for solutions of the Cauchy problem for parabolic differential equations*, Ann. Polon. Math. 25 (1971), 179–185.

[18] P. B e s a l a, *An extension of the strong maximum pronciple for parabolic equations*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), 1003–1006.

[19] P. B e s a l a, *Function classes pertaining to differential inequalities of parabolic type in unbounded regions*, Ann. Polon. Math. 25 (1972), 281–291.

[20] P. B e s a l a, *Some theorems on partial differential inequalities of parabolic type*, Ann. Polon. Math. 27 (1972), 33–39.

[21] P. B e s a l a, *On the existence of a fundamental solution for a parabolic differential equation with unbounded coefficients*, Ann. Polon. Math. 29 (1975), 403–409.

[22] P. B e s a l a, *Fundamental solution and Cauchy problem for a parabolic system with unbounded coefficients*, J. Differential Equations 33 (1979), 26–38.

[23] P. B e s a l a, *On the uniqueness of initial-value problems for partial differential equations of the first order*, Ann. Polon. Math. 40 (1983), 105–108.

[24] P. Besala, *Comparison theorems for purely non-linear parabolic differential operators*, Ann. Polon. Math. 42 (1983), 5–15.

[25] P. Besala, *Finite difference approximations to the Cauchy problem for non-linear parabolic differential equations*, Ann. Polon. Math. 46 (1985), 19–26.

[26] P. Besala, *Observations on quasi-linear partial differential equations*, Ann. Polon. Math. 53 (1991), 267–283.

[27] P. Besala, P. Fife, *The unbounded growth of solutions of linear parabolic differential equations*, Ann. Scuola Norm. Pisa 20 (1966), 719–732.

[28] P. Besala, M. Krzyżański, *Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire normale parabolique du second ordre*, Acad. Naz. Lincei 33 (5) (1962), 230–236.

[29] P. Besala, G. Paszek, *Differential-functional inequalities of parabolic type in unbounded regions*, Ann. Polon. Math. 38 (1980), 217–228.

[30] P. Besala, G. Paszek, *On the uniqueness of solutions to a parabolic system of differential-functional equations*, Demonstratio Math. 18 (1985), 353–368.

[31] P. Besala, H. Ugowski, *Some uniqueness theorems for solutions of parabolic and elliptic partial differential equations in unbounded regions*, Colloq. Math. 20 (1969), 127–141.

[32] P. Bassanini, *On a recent proof concerning a boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) 14-A (1977), 325–332.

[33] P. Bassanini, *Iterative methods for quasilinear hyperbolic systems*, Boll. Un. Mat. Ital. (6) 1-B (1982), 225–250.

[34] L. Cesari, *A boundary value problem for quasi-linear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 1 (1974), 311–358.

[35] L. Cesari, *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems*, Riv. Mat. Univ. Parma 3 (1974), 107–131.

[36] J. Chabrowski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné*, Ann. Polon. Math. 22 (1969), 27–35.

[37] J. Chabrowski, *Sur la construction de la solution fondamentale de l'équation parabolique aux coefficients non borné*, Colloq. Math. 21 (1970), 141–148.

[38] Z. Kamont, J. Turo, *On the Cauchy problem for quasi-linear hyperbolic systems of partial differential equations with a retarded argument*, Boll. Un. Mat. Ital. (6) 4-B (1985), 901–916.

[39] Z. Kamont, J. Turo, *On the Cauchy problem for quasi-linear hyperbolic systems with a retarded argument*, Ann. Mat. Pura Appl. 143 (1986), 235–246.

[40] Z. Kamont, J. Turo, *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems with a retarded argument*, Ann. Polon. Math. 47 (1987), 347–360.

[41] M. Krzyżański, *Sur les solutions des équations du type parabolique déterminées dans une région illimitée*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 911–915.

[42] M. Krzyżański, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, Ann. Soc. Polon. Math. 18 (1945), 145–156.

[43] M. Krzyżański, *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation lineéaire du type elliptique dans un domaine non borné*, Atti. Acad. Naz. Lincei Ser. VIII 4 (1948), 408–416.

[44] M. Krzyżański, *Certaines inégalites relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959), 131–135.

[45] M. Krzyżański, *Evaluations des solutions de l'équation linéaire du type parabolique à coefficients non bornés*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 11 (1962), 253–260.
[46] M. Krzyżański, *Sur les solutions non négatives de l'équation linéaire normale parabolique*, Revue Roumain. Math. Pur. et Appl. 9 (1964), 393–408.
[47] M. Krzyżański, *Partial Differential Equations of the Second Order*, PWN, Warszawa, 1971.
[48] M. Krzyżański, A. Szybiak, *Construction et l'étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire parabolique dont le dernier coefficient est non borné*, Atti. Accad. Naz. Lincei Clase di Scienze Fis. Mat. Nat. 8 (1959), 1–10.
[49] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Acad. Press, New York and London, 1969.
[50] I. Łojczyk-Królikiewicz, J. Szarski, *On a non-linear system of parabolic integro-differential inequalities in an unbounded region*, Ann. Poln. Math. 19 (1967), 61–617.
[51] M. Malec, *Méthode de différences finies pour une équation différentielle partielle avec dérivées mixtes*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), 561–576.
[52] M. Malec, *Système des inégalités aux différence finies du type parabolique et application*, Colloq. Math. 35 (1976), 305–312.
[53] W. Mlak, *Differential inequalities of parabolic type*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), 349–354.
[54] W. Mlak, *Limitations of solutions of parabolic equations*, Ann. Polon. Math. 5 (1958–1959), 237–245.
[55] M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.
[56] J. Serrin, *A uniqueness theorem for the parabolic equation* $u_t = a(x)u_{xx}+b(x)u_x+c(x)u$, Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954), 344–345.
[57] J. Szarski, *Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), 7–25.
[58] J. Szarski, *Systèmes d'inégalités différentielles aux derivées partielles du premier ordre et leurs applications*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), 149–165.
[59] J. Szarski, *Sur la limitation et l'unicité des solutions des problèmes de Fourier pour un système non-linéaire d'équations paraboliques*, Ann. Soc. Polon. Math. 4 (1959), 211–216.
[60] J. Szarski, *Sur un système nonlinéaire d'inégalités différentielles paraboliques*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), 15–22.
[61] J. Szarski, *Differential Inequalities*, PWN, Warszawa 1967.
[62] J. Szarski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques contenant des fonctionnelles*, Colloq. Math. 16, 1967, 141–145.
[63] J. Szarski, *Uniqueness of solutions of a mixed problem for parabolic differential-functional equations*, Ann. Polon. Math. 28 (1973), 57–65.
[64] J. Szarski, *Strong maximum principle for nonlinear parabolic differential-functional inequalities*, Ann. Polon. Math. 29 (1974), 207–214.
[65] J. Szarski, *Strong maximum principle for nonlinear parabolic differential-functional inequalities in arbitrary domains*, Ann. Polon. Math. 31 (1975), 197–203.
[66] J. Turo, *On some class of quasi-linear hyperbolic systems of partial differential-functional equations*, Czechoslovak Math. J. 36 (111) (1986), 185–197.
[67] J. Turo, *A boundary value problem for hyperbolic systems of differential-functional equations*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 7–18.

[68] A. Voigt, *Line method approximations to the Cauchy problem for nonlinear parabolic differential equations*, Numer. Math. 23 (1974), 23–26.
[69] W. Walter, *Differential an Integral Inequalities*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
[70] N. A. Watson, *Parabolic Equations on an Infinite Strip*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1989.
[71] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), 112–166.
[72] D. Widder, *Positive temperatures on an infinite rod*, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 85–95.