ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVIII (2002)

Roman Duda (Wrocław)

# Trzeci problem milenijny: hipoteza Poincarégo

**1. Wstęp.** Topologia jest dyscypliną niejednolitą i wyróżnić w niej można kilka nurtów, wśród nich topologię rozmaitości i blisko z nią związaną pochodzeniem i zainteresowaniami topologię algebraiczną. Obie zostały zapoczątkowane w latach 1895–1904 traktatem Poincarégo [53] i pięcioma uzupełnieniami do niego [54]–[58]. Idea Poincarégo polegała na badaniu rozmaitości środkami algebraicznymi i taki charakter miało sformułowane w piątym uzupełnieniu [58] przypuszczenie, któremu nadano później nazwę hipotezy Poincarégo. W ciągu wieku, jaki mija od pojawienia się traktatu Poincarégo i jego uzupełnień, topologia rozmaitości rozwinęła się w dużą dyscyplinę. Rozwiązano wiele trudnych i głębokich zagadnień, osiągnięto wspaniałe i częstokroć nieoczekiwane wyniki, rozwinięto nowe i bardzo silne metody, a hipoteza Poincarégo pozostaje nietknięta. Jest jak rafa, o którą rozbijają się najwięksi i wokół której narasta legenda.

Celem tego artykułu [1] jest przedstawienie obecnego stanu tej hipotezy i badań wokół niej rozwiniętych.

Zacznijmy od przypomnienia podstawowych określeń. *Rozmaitością wymiaru $n$* nazywa się przestrzeń metryczną ośrodkową $M^n$, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $n$-wymiarową przestrzenią euklidesową $R^n$. Przykłady rozmaitości: przestrzeń euklidesowa $R^n$, sfera $S^2$, płaszczyzna rzutowa $P^2$, torus $T^2 = S^1 \times S^1$, sfera $S^3$ itp.

Rozmaitość zwarta nazywa się *zamkniętą.*

*Rozmaitością wymiaru $n$ z brzegiem* nazywa się przestrzeń metryczną ośrodkową $M^n$, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $n$-wymiarową kulą domkniętą $D^n$. Każda rozmaitość jest więc rozmaitością z brzegiem, ale nie na odwrót. Będziemy używali symbolu $\operatorname{int} M^n$ na oznaczenie zbioru tych punktów rozmaitości $M^n$, które mają otoczenie homeomorficzne z $R^n$ oraz symbolu $\partial M^n$ na oznaczenie brzegu $\partial M^n = M^n - \operatorname{int} M^n$. Brzeg może być pusty. Jeśli jednak $\partial M^n \neq \emptyset$, to $\partial M^n$ jest rozmaitością

[1] Artykuł ten jest rozszerzoną wersją mego wcześniejszego opracowania: *O hipotezie Poincarégo*, Wiadom. Mat. 18 (1974), 21–39.

wymiaru $n-1$. Przykłady rozmaitości z brzegiem: kula $D^n$ (brzeg $\partial D^n$ jest sferą $S^{n-1}$), pełny torus $S^1 \times D^2$ (brzeg jest torusem $S^1 \times S^1$) itp.

*Sympleksem wymiaru* $n$ w $R^m$, gdzie $m \geqslant n$, nazywa się wypukłą otoczkę $n+1$ punktów w $R^m$, które nie leżą w jednej $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyźnie w $R^m$. Wypukła otoczka dowolnego podzbioru tego układu punktów też jest sympleksem; nazywa się ją ścianą wyjściowego sympleksu. Ściana wymiaru 0 nazywa się *wierzchołkiem.* Sympleksami wymiaru 1 są odcinki, wymiaru 2 – trójkąty i wymiaru 3 – czworościany. Ścianami sympleksu wymiaru 3 są: cały czworościan (ściana wymiaru 3), jego ściany geometryczne (ściany wymiaru 2), krawędzie (ściany wymiaru 1) i wierzchołki (ściany wymiaru 0).

*Kompleksem geometrycznym wymiaru* $n$ nazywa się przestrzeń metryczną ośrodkową $X$, która jest lokalnie skończoną sumą sympleksów tak względem siebie położonych, że jeśli dwa z nich się przecinają, to ich część wspólna jest ścianą każdego z nich. Rodzinę tych sympleksów oraz wszystkich ich ścian nazywa się także *triangulacją* przestrzeni $X$. Jeśli $X$ jest ponadto rozmaitością (z brzegiem), to mówimy o *rozmaitości* (*z brzegiem*) *z triangulacją.* Niżej ograniczamy się do kompleksów i triangulacji *skończonych.*

Podstawową zaletą skończonych kompleksów geometrycznych (triangulacji) jest skończony ich opis polegający na wyliczeniu wierzchołków sympleksów należących do kompleksu i wypisaniu tych zbiorów wierzchołków, na których rozpięte są sympleksy. Opis taki wyznacza kompleks z dokładnością do homeomorfizmu. Wadą jest to, że przestrzeń (rozmaitość) może mieć wiele triangulacji. Triangulacje grają jednak tylko rolę pomocniczą, podobnie jak układy współrzędnych w geometrii analitycznej; typowe postępowanie w topologii rozmaitości polega na znajdowaniu za ich pomocą niezmienników topologicznych, tzn. takich, które dla dowolnej innej triangulacji tej samej rozmaitości są takie same, a więc które zależą nie od przypadkowej triangulacji, dla jakiej zostały znalezione, lecz od rozmaitości, której triangulacje rozpatrujemy. Znanym przykładam takiego niezmiennika jest *charakterystyka Eulera–Poincarégo* rozmaitości $M^n$,

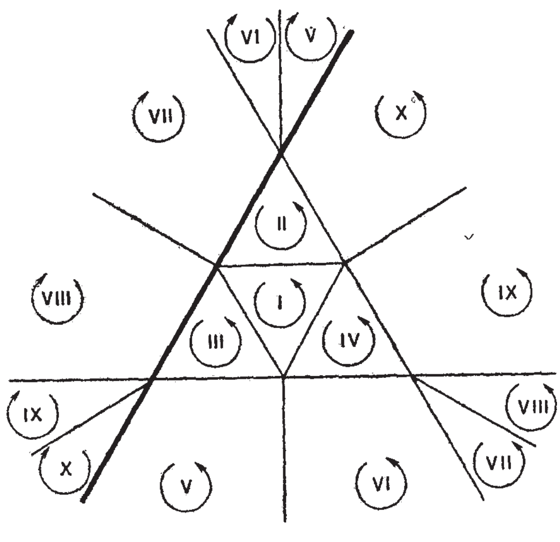
$$\chi(M^n) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots + (-1)^n \alpha_n,$$

gdzie $\alpha_k$ jest ilością sympleksów wymiaru k dowolnej ustalonej triangulacji rozmaitości $M^n$.

**2. Sformułowanie hipotezy Poincarégo i jej uogólnienia.** Poincaré zapoczątkował pewną metodę otrzymywania niezmienników topologicznych rozmaitości, mających strukturę algebraiczną grupy. Mianowicie, mając daną rozmaitość $M^n$ z brzegiem i jakąś triangulacją, konstruuje on pewien ciąg grup abelowych, o którym później J. W. Alexander dowiódł, że dla każdej innej triangulacji tej rozmaitości otrzyma się ciąg identyczny. Tak więc grupy Poincarégo nie zależą od triangulacji, za pomocą której zostały określone, lecz jedynie od samej rozmaitości $M^n$. Nazywa się je *grupami homologii* rozmaitości $M^n$ i oznacza przez

$$H_0(M^n), H_1(M^n), \ldots, H_k(M^n), \ldots$$

Konstrukcja tych grup jest skomplikowana. Intuicyjnie, $k$-wymiarowa grupa homologii $H_k(M^n)$ informuje o ilości $k$-wymiarowych dziur oraz istnieniu i krotności $k$-wymiarowych skręceń. Mówimy, że rozmaitość $M^n$ ma $k$-wymiarową dziurę, gdy – przy ustalonej jej triangulacji – istnieje $k$-wymiarowa podrozmaitość zamknięta, złożona z sympleksów triangulacji, która nie jest brzegiem żadnej $(k+1)$-wymiarowej podrozmaitości rozmaitości $M^n$. W tym sensie sfera $S^2$ nie ma 1-wymiarowych dziur i ma 2-wymiarową dziurę (nie ma „wnętrza"), a torus $T^2 = S^1 \times S^1$ ma 1-wymiarowe dziury (opisywane przez równik i południk) i 2-wymiarową dziurę (nie ma „wnętrza"). Podobnie mówimy, że rozmaitość $M^n$ ma $k$-wymiarowe skręcenie, gdy istnieje $k$-wymiarowa podrozmaitość zamknięta $B$, złożona z sympleksów triangulacji, która sama nie jest brzegiem żadnej $(k+1)$-wymiarowej podrozmaitości, ale której pewna algebraiczna wielokrotność jest brzegiem algebraicznym (znaczy to mniej więcej tyle, że każdemu $(k+1)$-wymiarowemu sympleksowi triangulacji można nadać orientację w ten sposób, że orientacje indukowane na $k$-wymiarowych sympleksach zniosą się, jeśli taki sympleks nie należy do $B$ i nie zniosą się, jeśli sympleks należy do $B$; w tym drugim przypadku różnica orientacji jednych i przeciwnych jest dla każdego sympleksu taka sama (na rys. 1 przedstawiającym pewną triangulację płasz-




Rys. 1

czyzny rzutowej $P^2$ linia pogrubiona jest 1-wymiarowym skręceniem krotności 2). Sfera $S^2$ i torus $T^2$ nie mają skręceń, natomiast wstęga Möbiusa, płaszczyzna rzutowa $P^2$ (rys. 1) i butelka Kleina $K$ mają 1-wymiarowe skręcenia krotności 2. Dalsze przykłady można znaleźć w literaturze, np. w książce [63].

Każda grupa homologii jest skończenie generowalną grupą abelową, daje się więc przedstawić w postaci

$$H_k(M^n) = Z + \ldots + Z + Z_{t_1} + \ldots + Z_{t_m}$$

gdzie liczba składników wolnych, tzw. *$k$-wymiarowa liczba Bettiego*, odpowiada ilości dziur, a liczba $m$ i współczynniki $t_1, \ldots, t_m$, tzw. *współczynniki torsji* – ilości i krotności skręceń.

Przykłady:

$$H_k(S^n) = \begin{cases} Z & \text{gdy } k = 0, n, \\ 0 & \text{gdy } k \neq 0, n, \end{cases} \qquad H_k(T^2) = \begin{cases} Z & \text{gdy } k = 0, 2, \\ Z + Z & \text{gdy } k = 1, \\ 0 & \text{gdy } k > 2, \end{cases}$$

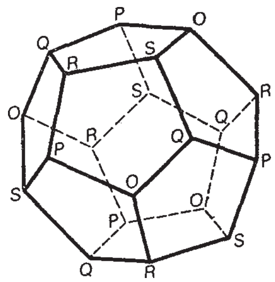
$$H_k(P^2) = \begin{cases} Z & \text{gdy } k = 0, \\ Z_2 & \text{gdy } k = 1, 2, \\ 0 & \text{gdy } k > 2, \end{cases} \qquad H_k(K) = \begin{cases} Z & \text{gdy } k = 0, \\ Z + Z_2 & \text{gdy } k = 1, \\ Z_2 & \text{gdy } k = 2, \\ 0 & \text{gdy } k > 2. \end{cases}$$

Grupy homologii natychmiast ujawniły swą wielką przydatność, jak bowiem pokazał Poincaré [53]–[55], charakteryzują one całkowicie rozmaitości zamknięte wymiaru 2, czyli tzw. *powierzchnie zamknięte.* Dokładniej, dwie powierzchnie zamknięte są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie ich grupy homologii tego samego wymiaru są izomorficzne. Daje to nie tylko klasyfikację powierzchni, ale także algorytm pozwalający w skończenie wielu krokach wyznaczyć typ topologiczny rozmaitości. Dla powierzchni zwartych z brzegiem analogiczną charakteryzację stanowią grupy homologii plus liczba składowych brzegu.

Nasuwało się naturalne przypuszczenie, wysunięte przez Poincarégo w [55], że grupy homologii klasyfikują także rozmaitości wyższych wymiarów. W odniesieniu do sfery $S^3$ można to przypuszczenie tak sformułować [58]: czy rozmaitość zamknięta wymiaru 3, która ma grupy homologii takie jak sfera $S^3$, jest homeomorficzna ze sferą $S^3$? Nazywając *sferą homologiczną* rozmaitość zamkniętą $M^n$ mającą grupy homologii sfery $S^n$, można ostatnie pytanie sformułować krótko: Czy 3-wymiarowa sfera homologiczna jest homeomorficzna ze sferą $S^3$?

Niespodziewanie okazało się, że sfera homologiczna może zwyczajną sferą nie być. Najprostszych przykładów dostarczają tzw. rozmaitości dodekaedralne, sferyczna i hiperboliczna. Obie powstają z bryły dwunastościanu foremnego przez sklejanie pewnych punktów jego powierzchni.

*Rozmaitość dodekaedralna sferyczna* powstaje przez naklejenie na siebie każdej pary przeciwległych pięciokątów po skręceniu jednego z nich w lewo (patrząc w kierunku środka bryły) o kąt $\pi/5$ (rys. 2). Jak się bez trudu




Rys. 2

dowodzi przez odwołanie do charakterystyki Eulera–Poincarégo (por. [63], str. 216), powstaje rozmaitość zamknięta wymiaru 3. Można pokazać, że jej grupy homologii są identyczne z grupami homologii sfery $S^3$ (tamże, str. 216–218), a więc że jest to sfera homologiczna wymiaru 3.

*Rozmaitość dodekaedralna hiperboliczna* powstaje w analogiczny sposób przez naklejenie na siebie każdej pary przeciwległych pięciokątów, ale po skręceniu jednego z nich w lewo o kąt $3\pi/5$. W wyniku, jak poprzednio, powstaje 3-wymiarowa sfera homologiczna.

Obie te rozmaitości różnią się jednak między sobą i żadna z nich nie jest sferą, można bowiem wskazać własność topologiczną, którą ma sfera, ale której one nie mają: w sferze $S^3$ każdy obraz ciągły okręgu $S^1$ daje się ściągnąć do punktu (tzn. każde przekształcenie ciągłe $f : S^1 \to S^3$ ma rozszerzenie ciągłe $F : D^2 \to S^3$), natomiast w obu rozmaitościach dodekaedralnych istnieją krzywe zwykłe zamknięte nieściągalne.

Przypomnijmy, że dwa przekształcenia ciągłe $\varphi, \psi : W \to T$ nazywają się *homotopijne*, gdy istnieje ciągła rodzina przekształceń $h_t : W \to T$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, taka że $h_0 = \varphi$ i $h_1 = \psi$, czyli (innymi słowy) gdy istnieje przekształcenie ciągłe $H : W \times [0,1] \to T$ takie, że $H|W \times (t) = h_t$ dla każdego $t$. Relacja homotopii dzieli wszystkie przekształcenia ciągłe $W \to T$ na *klasy homotopii* i analiza zbiorów tych klas jest ważnym narzędziem badania przestrzeni $W$ (przy odpowiednio dobieranych $T$).

W szczególności, jeśli $M$ jest rozmaitością spójną (dowolnego wymiaru), to klasy homotopii przekształceń $S^1 \to M$ tworzą grupę, zwaną *grupą podstawową* rozmaitości $M$, oznaczaną $\pi_1(M)$. Trywialność grupy podstawowej rozmaitości $M$ oznacza, że każdy obraz ciągły okręgu w rozmaitości $M$ daje się w niej ściągnąć do punktu. Sfera $S^3$ ma oczywiście trywialną grupę podstawową, natomiast obie rozmaitości dodekaedralne mają grupy podstawowe nietrywialne.

Poincaré poprawił więc pytanie i zapytał: czy 3-wymiarowa sfera homologiczna, która ma trywialną grupę podstawową, tzn. w której każdy obraz ciągły okręgu $S^1$ jest ściągalny do punktu, jest homeomorficzna ze sferą $S^3$? I to pytanie, mimo ogromnego postępu w topologii, jest otwarte do dziś. Jest to właśnie owa słynna hipoteza Poincarégo.

Hipoteza Poincarégo. *Sfera homologiczna $M^3$, która ma trywialną grupę podstawową, jest homeomorficzna ze sferą $S^3$.*

Nazywając przestrzeń topologiczną, w której każdy obraz ciągły okręgu $S^1$ jest ściągalny do punktu, przestrzenią *jednospójną* (i to pojęcie pochodzi od Poincarégo) – hipotezie Poincarégo można nadać taką krótką postać:

Hipoteza Poincarégo (inna postać). *Jednospójna sfera homologiczna $M^3$ jest homeomorficzna ze sferą $S^3$.*

Kilkadziesiąt lat później, kiedy topologia znacznie się już rozwinęła, a ogólność stawała się normą, hipotezę Poincarégo w naturalny sposób uogólniono na dowolny wymiar, uzyskując tzw. uogólnioną hipotezę Poincarégo.

Uogólniona Hipoteza Poincarégo. *Jednospójna sfera homologiczna $M^n$ jest homeomorficzna ze sferą $S^n$.*

Po mniej więcej dwudziestu latach od prac Poincarégo rozszerzono definicję grupy podstawowej na przypadek sfery $S^n$ dowolnego wymiaru $n$, nadając także klasom homotopii $S^n \to M$ charakter grupowy. Tę ostatnią grupę nazywa się *$n$-wymiarową grupą homotopii* rozmaitości $M$ i oznacza symbolem $\pi_n(M)$. Trywialność $n$-wymiarowej grupy homotopii rozmaitości $M$ oznacza, że każdy obraz ciągły sfery $S^n$ w $M$ daje się w $M$ ściągnąć do punktu.

Grupy homotopii odgrywają w topologii bardzo dużą rolę, której tu opisywać nie będziemy. Przypomnijmy jeszcze tylko, że każde przekształcenie ciągłe $f : M \to N$ w naturalny sposób indukuje homomorfizmy odpowiednich grup homotopii $f : \pi_n(M) \to \pi_n(N)$ (złożenie przekształceń $\varphi : S^n \to M$ i $f : M \to N$ przypisuje klasie homotopii $[\varphi(M)] \in \pi_n(M)$ klasę homotopii $[f \circ \varphi] \in \pi_n(N)$).

Posługując się jeszcze jednym pojęciem homotopijnym, a mianowicie pojęciem typu homotopii, można uogólnioną hipotezę Poincarégo sformułować jeszcze inaczej. Będziemy mówili, że dwie przestrzenie $X$ i $Y$ mają ten sam *typ homotopii*, gdy istnieją przekształcenia $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ takie, że złożenie $f \circ g$ jest homotopijne z tożsamością na $Y$, a złożenie $g \circ f$ jest homotopijne z tożsamością na $X$. Obrazowo, ale mniej ściśle można powiedzieć, że pewne przeciągnięcie $X$ przez $Y$, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$, i pewne przeciągnięcie $Y$ przez $X$, $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$, nie powoduje istotnych strat w topologii, każde z tych przekształceń daje się bowiem przeprowadzić przez ciągłą deformację $X$ lub, odpowiednio, $Y$ na sobie na tożsamość. Intuicyjnie jest jasne, że w takim przypadku struktury topologiczne $X$ i $Y$ muszą być sobie bliskie. Uogólniona hipoteza Poincarégo jest równoważna sformułowaniu, że jeśli rozmaitość zamknięta $M^n$ ma typ homotopii sfery $S^n$ (co wyrażamy krótko, nazywając taką rozmaitość $M^n$ *sferą homotopijną*), to struktury topologiczne $M^n$ i $S^n$ są identyczne. Dowodzi się mianowicie, że rozmaitość zamknięta $M^n$ jest sferą homotopijną wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona jednospójna i ma grupy homologii sfery $S^n$.

Równoważnie można powiedzieć, że $M^n$ jest sferą homotopijną, gdy istnieje przekształcenie ciągłe $f : S^n \to M^n$, które indukuje izomorfizm grup homotopii. W takim przypadku każde przekształcenie ciągłe $g : S^k \to M^n$, gdzie $k < n$, daje się homotopijnie zdeformować do punktu. W wymiarze 3 sytuacja jest jeszcze prostsza, 3-wymiarowa rozmaitość zamknięta jest bowiem sferą homotopijną wtedy i tylko wtedy, gdy ma trywialną grupę podstawową [21] lub, innymi słowy, gdy jest jednospójna.

Uogólniona Hipoteza Poincarégo (w postaci homotopijnej). *Sfera homotopijna $M^n$ jest homeomorficzna ze sferą $S^n$.*

Sfera homotopijna jest z definicji rozmaitością topologiczną. Wobec braku dobrych ogólnych metod dla rozmaitości topologicznych zwykle przyjmuje się jeszcze założenie, że nasza sfera homotopijna ma silniejszą strukturę rozmaitości kombinatorycznej lub rozmaitości gładkiej.

Przypomnijmy, że rozmaitość $M^n$ nazywa się *kombinatoryczną*, gdy – mówiąc trochę nieściśle – ma ona triangulację lokalnie izomorficzną z jakąkolwiek triangulacją $n$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $R^n$. Dla $n = 3$ każda triangulacja ma tę własność [43], dla $n > 3$ zagadnienie jest otwarte.

Rozmaitość $M^n$ nazywa się *gładką*, gdy istnieje na niej atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ klasy $C^\infty$, tzn. rodzina zbiorów otwartych $U_\alpha$ i homeomorfizmów $\varphi_\alpha$ przeprowadzających $U_\alpha$ na podzbiory otwarte przestrzeni $R^n$ taka, że zbiory $U_\alpha$ pokrywają $M^n$, a homeomorfizmy $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to R^n$ są różniczkowalne klasy $C^\infty$.

Wróćmy teraz do uogólnionej hipotezy Poincarégo w postaci homotopijnej i rozpatrzmy przypadki $n = 1, 2, \ldots$ W wymiarach 1 i 2 sytuacja była Poincarému dobrze znana. Jedyną 1-wymiarową rozmaitością zamkniętą jest sfera $S^1$, przypadek ten jest więc trywialny. W wymiarze 2 mamy do czynienia z powierzchniami i z cytowanego wyżej twierdzenia klasyfikacyjnego wynika, że jedyną powierzchnią zamkniętą mającą grupę homologii sfery $S^2$ jest sfera $S^2$. Zatem i w tym przypadku hipoteza Poincarégo jest trywialnie prawdziwa. Pozostają przypadki $n \geqslant 3$.

Dla wymiaru $n = 3$ założenie, że sfera homotopijna jest rozmaitością kombinatoryczną lub gładką – nie jest żadnym ograniczeniem. Istotnie, jak bowiem pokazał Moise [43] (p. także Bing [7]), każda rozmaitość topologiczna wymiaru 3 jest triangulowalna, a przeto ma strukturę rozmaitości kombinatorycznej. Z kolei zaś, zgodnie z twierdzeniem Cairnsa ([7], twierdzenie 14.2), na każdej rozmaitości triangulowalnej wymiaru $n \leqslant 4$ istnieje struktura gładka.

Dla wyższych wymiarów dodatkowe założenie o strukturze kombinatorycznej lub gładkiej sfery homotopijnej jest jednak istotnym wzmocnieniem założeń hipotezy, istnieją bowiem np. rozmaitości triangulowalne nie mające żadnej struktury gładkiej [25]. Mimo takiego wzmocnienia założeń nie można jednak oczekiwać, by można było podobnie zaostrzyć tezę. Np. z tego, że sfera homotopijna $M^n$ jest gładka, na pewno nie może wynikać, że jest ona gładko równoważna sferze $S^n$, tzn. że istnieje homeomorfizm $h : M^n \to S^n$ taki, że zarówno on sam, jak i jego odwrotność są różniczkowalne klasy $C^\infty$ (taki homeomorfizm nazywa się *dyfeomorfizmem*, a rozmaitości nim związane – *dyfeomorficznymi*). Istotnie, jak bowiem pokazał Milnor [38], istnieją rozmaitości homeomorficzne z $S^7$ (są to więc, *a fortiori*, sfery homotopijne), ale nie dyfeomorficzne z $S^7$. (Od przypadku gładkiego trochę się różni przypadek kombinatoryczny, tu można bowiem w tezie żądać trochę więcej niż tylko homeomorfizmu, por. [85].)

**3. Dowód uogólnionej hipotezy Poincarégo dla wymiarów $n \geqslant 5$.** Najpoważniejszym dotychczas osiągnięciem w badaniach nad uogólnioną hipotezą Poincarégo jest jej dowód dla wymiarów $n \geqslant 5$ przy założeniu, że rozmaitość jest kombinatoryczna lub gładka, uzyskany w latach 1960–1962 przez Smale'a [65], Stallingsa [68], Wallace'a [76] i Zeemana [84], [85].

Pierwszy był Smale ([64], p. także [67]), a jego dowód (podobnie jak późniejszy dowód Wallace'a) opierał się na założeniu gładkości i doprowadził do silniejszej tezy: gładka sfera homotopijna $M^n$ zawiera gładko zanurzoną sferę $S^{n-1}$, która rozcina $M^n$ na dwie gładko zanurzone $(n-1)$-wymiarowe kule. Dowód Stallingsa (uzupełniony przez Zeemana do wymiarów 5 i 6) był odmienny i opierał się na słabszym założeniu, że sfera homotopijna $M^n$ jest rozmaitością kombinatoryczną. Teza też była słabsza: rozmaitość $M^n$ z usuniętym jednym punktem jest kombinatorycznie homeomorficzna ze standardową przestrzenią euklidesową.

Za swoje prace w tym zakresie S. Smale został wyróżniony medalem Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Moskwie w roku 1966 [72].

Naszkicuję najpierw dowód dla przypadku gładkiego.

Przypomnijmy, że podzbiór $V$ zbioru $W$ nazywa się jego *retraktem deformacyjnym*, gdy istnieje ciągła rodzina przekształceń $f_t : W \to W$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, taka że $f_0$ jest tożsamością na $W$, a $f_1$ retrakcją $W$ na $V$.

Kluczowym elementem eleganckiego dowodu jest następujące, udowodnione przez Smale'a [66] twierdzenie, mające zresztą dużą wartość niezależnie od hipotezy Poincarégo.

Twierdzenie o $h$-kobordyzmie. *Niech $W^n$ będzie rozmaitością gładką, zwartą, z brzegiem $\partial W^n = V \cup V'$ (suma rozłączna, $V$ i $V'$ nie muszą być spójne). Jeśli*

(i) *$W^n$, $V$ i $V'$ są jednospójne,*
(ii) *$V$ i $V'$ są retraktami deformacyjnymi rozmaitości $W^n$,*
(iii) *wymiar* $\dim W^n = n \geqslant 6$,

*to* $W = V \times I$ (równość $=$ oznacza tu dyfeomorfizm).

Założenie (ii) jest istotne. Założenie (i) uda się później osłabić (p. niżej twierdzenie o $s$-kobordyzmie), a założenie o wymiarze uda się obniżyć do $n = 5$ (p. niżej twierdzenie Freedmana). Dla $n = 3$ twierdzenie o $h$-kobordyzmie jest równoważne hipotezie Poincarégo. Inne komentarze, patrz [40].

Nazwa twierdzenia pochodzi stąd, że rozmaitości $V$ i $V'$ spełniające warunek (ii) nazywają się *$h$-kobordyczne.* Z twierdzenia o $h$-kobordyzmie wynika

Wniosek. *Rozmaitości $V$, $V'$ jednospójne i $h$-kobordyczne wymiaru $\geqslant 5$ są dyfeomorficzne.*

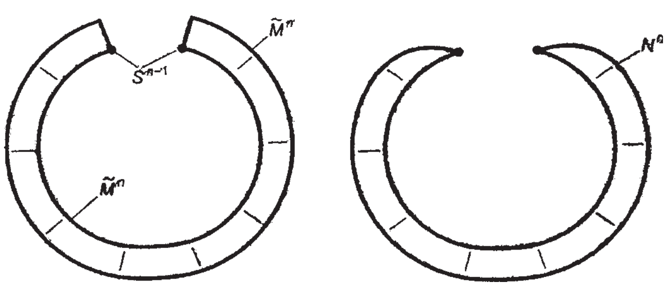
Niech teraz $M^n$ będzie gładką sferą homotopijną. Rozpatrzmy rozmaitość z brzegiem

$$\widetilde{M}^n = M^n - \operatorname{int} D^n,$$

gdzie $D^n \subset M^n$ jest gładko włożoną $n$-wymiarową kulą. Brzegiem tej rozmaitości jest oczywiście sfera $S^{n-1}$. Łącząc dwa egzemplarze rozmaitości $\widetilde{M}^n$ wzdłuż brzegu $S^{n-1}$ za pomocą przekształcenia identyczności otrzymujemy rozmaitość zamkniętą

$$2\widetilde{M}^n = \widetilde{M}^n \cup_{S^n} \widetilde{M}^n.$$

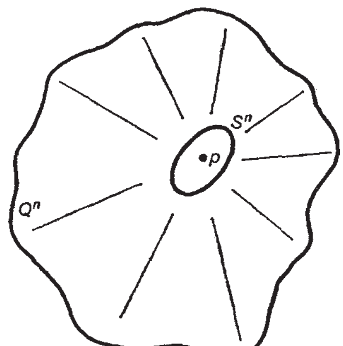
Nietrudno zauważyć, że $2\widetilde{M}^n$ jest brzegiem rozmaitości ściągalnej ([27], str. 507). Istotnie, biorąc bowiem produkt $\widetilde{M}^n \times I$ i ściągając do punktu każdy odcinek $s \times I$, gdzie $s \in S^{n-1}$, otrzymujemy rozmaitość $N^{n+1}$ z brzegiem równym $2\widetilde{M}^n$ (rys. 3). Rozmaitość $N^{n+1}$ jest ściągalna, można bo-




Rys. 3

wiem wziąć jej retrakcję deformacyjną po odcinkach $p \times I$, $p \in \widetilde{M}^n$, na $\widetilde{M}^n$, a $\widetilde{M}^n$ z kolei ściągnąć do punktu (co jest możliwe, bo $\widetilde{M}^n$ powstaje ze sfery homotopijnej $M^n$ przez usunięcie wnętrza jednej kuli).

Z kolei łatwo widzieć, że rozmaitość jest brzegiem rozmaitości ściągalnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona $h$-kobordyczna ze sferą. Istotnie, jeśli bowiem $Q^n$ jest brzegiem rozmaitości ściągalnej $T^{n+1}$ do punktu $p \in \operatorname{int} T^{n+1}$, to wycinając z $T^{n+1}$ wnętrze odpowiedniej kuli wokół $p$ otrzymujemy $h$-kobordyzm między $Q^n$ a brzegiem $S^n$ tej kuli (rys. 4). Implikacja odwrotna (w naszym przypadku nieistotna) wynika przez zaklejenie sfery kulą.




Rys. 4

Z obu powyższych przesłanek wynika, że rozmaitość $2\widetilde{M}^n$ jest $h$-kobordyczna ze sferą $S^n$. Jeśli $n \geqslant 5$, to na mocy wniosku z twierdzenia o $h$-kobordyzmie $2\widetilde{M}^n$ jest dyfeomorficzna ze sferą $S^n$.

Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz powołać się na uogólnione twierdzenie Schoenfliesa. Nazwijmy sferę $\Sigma^{n-1}$ leżącą w $S^n$ *łagodną*, gdy ma ona w $S^n$ otoczenie postaci $S^{n-1} \times [-1; 1]$, gdzie $S^{n-1} \times 0$ odpowiada $\Sigma^{n-1}$. Wspomniane twierdzenie głosi, że $(n-1)$-wymiarowa sfera łagodna w $S^n$ dzieli $S^n$ na dwa obszary takie, że domknięcie każdego z nich jest kulą [6]. Stosując to twierdzenie do sfery $S^{n-1} \subset 2\widetilde{M}^n$ (sfera zanurzona gładko jest łagodna) wnosimy, że $\widetilde{M}^n$ jest kulą.

Ostatecznie więc $M^n$, jako suma dwóch kul $\widetilde{M}^n$ i $D^n$ sklejonych wspólnym brzegiem $S^{n-1}$, jest homeomorficzna ze sferą $S^n$.

Dla $n \geqslant 6$ dowód jest znacznie prostszy. Rozpatrujemy dwa rozłączne gładkie zanurzenia $i : D^n \subset M^n$ oraz $j : D^n \subset M^n$. Rozmaitość $M^n - i(\operatorname{int} D^n) - j(\operatorname{int} D^n)$ jest $h$-kobordyzmem między dwoma egzemplarzami $S^{n-1}$, a zatem, na mocy twierdzenia o $h$-kobordyzmie, rozmaitość ta jest dyfeomorficzna z produktem $S^{n-1} \times I$. Doklejając z powrotem kule $i(D^n)$ i $j(D^n)$ otrzymujemy $S^n$.

W przypadku kombinatorycznym dowód musi być oczywiście inny. W dużym skrócie może on wyglądać tak (por. [4], str. 125). Zaczynamy od pokazania, stosując tzw. lemat o pochłanianiu („engulfing lemma”), że jeśli rozmaitość kombinatoryczna $M^n$ jest sferą homotopijną, to każdy $(n-3)$-wymiarowy kompleks geometryczny, leżący w $M^n$ i zgodny z jej strukturą kombinatoryczną, daje się zanurzyć we wnętrze („pochłonąć” przezeń) $n$-wymiarowej kuli w $M^n$. Ustalamy triangulację $T$ na $M^n$ i zanurzamy jej $(n-3)$-wymiarowy *szkielet* $G^{n-3}$, tj. kompleks złożony ze wszystkich sympleksów triangulacji o wymiarach $\leqslant n-3$, we wnętrze $n$-wymiarowej kuli $C_1$. Następnie bierzemy podpodział barycentryczny $T'$ triangulacji $T$ i przez $H^2$ oznaczamy kompleks złożony ze wszystkich sympleksów tego podziału rozłącznych z $G^{n-3}$; nietrudno sprawdzić, że $H^2$ nie zawiera sympleksów o wymiarach $> 2$. Jeśli $2 \leqslant n-3$ (co ma miejsce tylko dla $n \geqslant 5$), to istnieje $n$-wymiarowa kula $C_2$ zawierająca w swoim wnętrzu $H^2$. Powiększamy $C_1$ i $C_2$, póki nie pokryją całej rozmaitości $M^n$. Jak wynika z uogólnionego twierdzenia Schoenfliesa [6], rozmaitość zwarta wymiaru $n$, która jest sumą dwóch kul otwartych, jest homeomorficzna ze sferą $S^n$.

Kilka lat później M. H. A. Newman usunął założenia gładkości i kombinatoryczności ([44], p. także [9]), doprowadzając do twierdzenia: jeśli zamknięta rozmaitość topologiczna $M^n$, gdzie $n \geqslant 5$, jest sferą homotopijną, to $M^n$ jest homeomorficzna z $S^n$.

**4. Dowód uogólnionej hipotezy Poincarégo dla wymiaru $n = 4$.** W roku 1939 J. H. C. Whitehead opublikował pracę [80], a w 11 lat później pracę [82]. W obu tych pracach wprowadził, nie dostrzeżone zrazu, pojęcie *homotopii prostej* („simple homotopy”) między kompleksami symplicjalnymi. Mówiąc nieściśle, homotopia prosta jest taką homotopią, która „szanuje” strukturę kombinatoryczną. Badając, kiedy zwykła homotopia jest równoważna homotopii prostej, zdefiniował przeszkodę, zwaną dzisiaj *torsją Whiteheada*, której znikanie jest warunkiem koniecznym i dostatecznym owej równoważności, a która leży w tym, co dziś nazywa się *grupą Whiteheada*, tj. w pewnej grupie abelowej zależnej od grupy podstawowej. Bliższe przedstawienie tej problematyki zawiera artykuł [41] oraz książka [8].

W miarę rozwoju topologii stawało się jasne, że torsja Whiteheada dostarcza ważnego narzędzia do badania rozmaitości gładkich lub kombinatorycznych z nietrywialną grupą podstawową. W szczególności z jej pomocą udało się rozszerzyć twierdzenie o $h$-kobordyzmie na rozmaitości, których grupa podstawowa nie jest trywialna. Stało się to w latach sześćdziesiątych ([1], [36], [70]), a wynikiem było następujące twierdzenie.

Twierdzenie o $s$-kobordyzmie. *Niech $W^n$ będzie kobordyzmem (gładkim lub kombinatorycznym) między $M_0$ a $M_1$, gdzie $n \geqslant 6$. Jeśli rozmaitość $W^n$ jest jednospójna, a inkluzja $M_0 \subset W^n$ (lub, równoważnie, inklu-*

*zja* $M_1 \subset W^n$*) jest homotopią prostą, to rozmaitość* $W^n$ *jest identyczna (poprzez homeomorfizm gładki lub kombinatoryczny) z produktem* $M_0 \times I$.

Warunek, że inkluzja $M_0 \subset W^n$ jest homotopią prostą, można wysłowić i tak: istnieje retrakcja deformacyjna $W^n \to M_0$, która jest homotopią prostą (por. warunek (ii) w twierdzeniu o $h$-kobordyzmie).

Więcej o twierdzeniu o $s$-kobordyzmie można przeczytać w [24] i [26].

Po kolejnych dwudziestu latach, w roku 1982, M. Freedman udowodnił, przy dodatkowych wszakże założeniach, twierdzenie o $s$-kobordyzmie dla wymiaru 5 [12]. Trzeba było na grupę podstawową nałożyć dodatkowe ograniczenia, a identyczność z produktem (w tezie twierdzenia) była tylko zwykłym homeomorfizmem.

Twierdzenie o $s$-kobordyzmie dla wymiaru 5. *Zwarty $s$-kobordyzm* $W^n$ *wymiaru* $n = 5$, *mający „dobrą" grupę podstawową, jest topologicznie równoważny z produktem* $M_0 \times I$.

Mówiąc nieściśle, grupa podstawowa jest „dobra", jeśli rozmaitość dopuszcza włożenia 2-wymiarowych rączek (por. [13], str. 99). W szczególności, grupy „poly-(finite or cyclic)", tzn. takie, które dają się przedstawić w postaci rosnącego, ale skończonego ciągu podgrup, z których każda jest dzielnikiem normalnym następnej, a ilorazy są skończone lub cykliczne – są „dobre". Nie jest „dobra" grupa wolna o 2 generatorach.

Nie wchodząc głębiej w nieistotne dla nas szczegóły, przejdźmy do hipotezy Poincarégo. Jeśli (zarys dowodu przedstawiam za książką [13], str. 102) $M^4$ jest sferą homotopijną, to bierzemy stożek $cM^4$ (formalnie zdefiniowany jako produkt $M^4 \times I$, w którym „wieczko" $M^4 \times 1$ identyfikuje się do punktu zwanego *wierzchołkiem stożka*). Pokazuje się, że stożek $cM^4$ jest rozmaitością i usuwa wokół jego wierzchołka otwartą kulę, której brzegiem jest oczywiście sfera $S^4$. Powstaje rozmaitość, która jest $s$-kobordyzmem pomiedzy $M^4$ a $S^4$, co pozwala zastosować twierdzenie Freedmana o $s$-kobordyzmie.

Za opisane tu wyniki M. Freedman otrzymał medal Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Berkeley w 1986 r. Jak mówił wówczas J. Milnor, „Freedman's methods were so sharp as to actually provide a complete classification of all compact simply-connected topological 4-manifolds, yielding many previously unknown homeomorphisms between known manifolds".

**5. Próby dowodu hipotezy Poincarégo dla wymiaru 3.** Do rozstrzygnięcia uogólnionej hipotezy Poincarégo pozostały więc dwa wymiary: wymiar 3, dla, którego hipoteza ta była pierwotnie sformułowana, oraz wymiar 4. Oba te wymiary, a czasem jeszcze także i wymiar 5, są nazywane przez niektórych topologów „krytycznymi", zagadnienia związane z nimi okazują się bowiem często znacznie trudniejsze niż dla wyższych wymiarów i oprócz hipotezy Poincarégo można wskazać także inne jeszcze hipotezy i twierdzenia, które są dotąd nie rozstrzygnięte, bądź też zostały dowiedzione później niż w przypadku obejmującym rozmaitości wyższych wymiarów.

Przedstawimy tu krótko niektóre próby rozstrzygnięcia tej hipotezy dla wymiaru 3. Zasadnicza trudność w rozwijaniu takich prób leży w braku dobrych charakteryzacji sfery $S^3$ lub twierdzeń implikujących takie charakteryzacje (jak np. twierdzenie o $h$-kobordyzmie dla wymiarów $\geqslant 5$). Jednej z niewielu charakteryzacji dostarcza znane twierdzenie Reeba (por. [39], twierdzenie 4.1): jeśli na rozmaitości zamkniętej i gładkiej $M^n$ istnieje funkcja Morse'a, która ma tylko dwa punkty krytyczne, to $M^n$ jest homeomorficzna z $S^n$. Stosowanie tego twierdzenia drogą modyfikacji wyjściowej funkcji Morse'a do funkcji Morse'a z dwoma tylko punktami krytycznymi wymaga jednak techniki podobnej do używanej w dowodzie twierdzenia o $h$-kobordyzmie, a dla wymiarów krytycznych technika ta się zacina.

W wyniku licznie podejmowanych prób uzyskano parę dalszych charakteryzacji oraz różne redukcje hipotezy, z którymi można wiązać pewne nadzieje. Przytoczę ciekawsze.

Najstarszy ogłoszony drukiem „dowód" hipotezy Poincarégo pochodzi od znakomitego topologa angielskiego J. H. C. Whiteheada [43] z 1935 r. Tutaj jednak sam autor znalazł błąd [44].

Około 1955 r. hipotezą Poincarégo zajmował się R. H. Bing. Z pewnym opóźnieniem, spowodowanym pogłoskami o rozstrzygnięciu tej hipotezy w Princeton, ogłosił on pracę [2] zawierającą następującą charakteryzację:

Twierdzenie Binga. *Rozmaitość spójna, zamknięta, wymiaru* 3 *jest homeomorficzna ze sferą* $S^3$ *wtedy i tylko wtedy, gdy każda krzywa zwykła zamknięta w tej rozmaitości leży w kuli zawartej w tej rozmaitości.*

Na mocy tego twierdzenia hipoteza Poincarégo redukuje się do dowodu, że jednospójność sfery homotopijnej pociąga wyżej sformułowany warunek; Warunek ten jest jednak bardzo delikatny, istnieją bowiem – jak zobaczymy niżej – rozmaitości jednospójne nie spełniające go.

Sensację przyniósł rok 1958, kiedy to została ogłoszona praca japońskiego matematyka Kosekiego [14] zawierająca „dowód" hipotezy. Druga połowa tej pracy, liczącej ponad 100 stronic druku, zawiera poprawny wynik, że rozmaitość zamknięta, spójna, wymiaru 3 jest homeomorficzna ze sferą $S^3$, jeśli dla jakiejkolwiek jej triangulacji potrafimy zanurzyć w 3-wymiarową przestrzeń euklidesową $R^3$ 2-wymiarowy szkielet tej triangulacji, tj. podzbiór rozmaitości złożony ze wszystkich sympleksów triangulacji o wymiarach $\leqslant 2$. Jednakże pierwsza część pracy dowodząca, że dla sfery homotopijnej jest to możliwe, nie jest jasna.

Latem 1965 r. Stallings miał na seminarium topologicznym w Wisconsin odczyt pod zaskakującym tytułem *Jak nie należy dowodzić hipotezy Poin-*

*carégo* [40]. Opisał w nim nieudaną próbę dowodu tej hipotezy za pomocą pewnego twierdzenia o homotopii, które okazało się prawdziwe dla wszystkich wymiarów z jedynym wyjątkiem, kluczowego w tym przypadku, $n = 2$. W tymże odczycie autor przedstawił kilka zagadnień topologiczno-algebraicznych, których pozytywne rozstrzygnięcie pociągałoby istnienie dla sfery homotopijnej wymiaru 3 diagramu Heegarda (p. niżej) rodzaju 1.

Większość dotychczasowych prób dowodu hipotezy idzie jedną z dwóch dróg:

1) rozkładu sfery homotopijnej na kulę oraz resztę i pokazania, że domknięcie reszty jest też kulą,

2) pokazania, że istnieje rozkład sfery homotopijnej na dwa zwyczajne torusy sklejone wspólnym brzegiem.

Omówimy je kolejno.

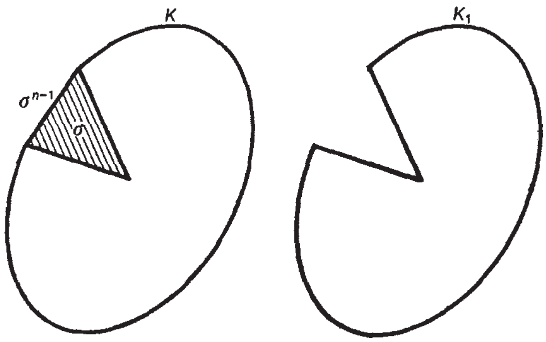
1) Jeśli $M^3$ jest sferą homotopijną, a $D^3 \subset M^3$ jest porządnie w niej leżącą kulą (np. sympleksem triangulacji lub jako podrozmaitość gładka), to rozmaitość $M^3 - \mathrm{int}\, D^3$, zwana *kulą homotopijną*, jest – podobnie jak kula zwyczajna – zwarta, spójna i jednospójna, z brzegiem równym $S^2 = \partial D^3$. Jeśli taka kula homotopijna jest zwyczajną kulą, to sfera homotopijna $M^3$ jest zwyczajną sferą, ale jeśli taka kula homotopijna zwyczajną kulą nie jest, to $M^3$ jest kontrprzykładem na hipotezę Poincarégo.

Tą drogą szedł przytoczony wyżej dowód Smale'a uogólnionej hipotezy Poincarégo, ale Smale miał da dyspozycji twierdzenie o $h$-kobordyzmie, z którego w istotny sposób skorzystał. Dla wymiaru 3 twierdzenie to jest jednak równoważne hipotezie Poincarégo.

Pewnych możliwości dostarcza rozważanie triangulacji kuli homotopijnej według wzoru: jeśli kula homotopijna ma „dobrą" triangulację, to jest kulą zwyczajną. Np. kula homotopijna jest zwyczajną kulą, jeśli 3-wymiarowe sympleksy jakiejś jej triangulacji można ustawić w ciąg $s_1, s_2, \ldots, s_n$ taki, że każda suma częściowa $s_1 \cup \ldots \cup s_k$, gdzie $k < n$, jest kulą homotopijną (por. [4], str. 107). Choć może się to wydawać dziwne, istnieje wiele triangulacji zwyczajnej kuli, które nie mają tej własności ([4], str. 108) i nie bardzo wiadomo, jak od „złej" triangulacji przejść do „dobrej".

Na pomysł innej możliwości wpadli około 1964 r. Haken i Poénaru. Ich plan był podobny, chociaż Haken pracował za pomocą triangulacji, a Poénaru używał struktur gładkich. Każdy z nich usuwał ze sfery homotopijnej $M^3$ wnętrze zwyczajnej kuli, co dawało kulę homotopijną $N^3$. Z twierdzenia Hurewicza wynika, że skoro $\pi_1(N^3) = 0$ i $H_2(N^3) = 0$, to $\pi_2(N^3) = 0$, a zatem istnieje homotopia ściągająca brzeg $S^2$ rozmaitości $N^3$ do punktu w $N^3$. Każdy z nich próbował tę homotopię „wygładzić", by móc wywnioskować, że $N^3$ jest kulą. Żadnemu się nie udało (por. Bing [5], Haken [18]).

W bliskim związku ze ściągalnością pozostaje zgniatalność („collapsibility" w sensie J. H. C. Whiteheada [80]. Jeśli w kompleksie $K$ występuje sympleks $\sigma^n$, którego pewna $(n-1)$-wymiarowa ściana $\sigma^{n-1}$ jest wolna, tzn. nie jest ścianą żadnego innego sympleksu (rys. 5), to mówimy, że *kompleks*




Rys. 5

*$K$ jest elementarnie zgniatalny do podkompleksu* $K_1$ powstającego z $K$ przez usunięcie wnętrz sympleksu $\sigma^n$ i jego ściany $\sigma^{n-1}$, co zapisujemy $K \searrow K_1$. Mówimy, że *kompleks $K$ jest zgniatalny do kompleksu* $L$, co piszemy $K \searrow L$, gdy istnieje ciąg elementarnych zgnieceń $K \searrow K_1 \searrow \ldots \searrow K_n \searrow L$.

Jeśli $L$ jest punktem, kompleks $K$ nazywa się *zgniatalnym do punktu*, lub krótko i po prostu *zgniatalnym*, co zapisuje się w postaci $K \searrow 0$. Wśród rozmaitości zgniatalne do punktu są tylko kule ([80], twierdzenie 23, wniosek 1).

Oczywiście, kompleks zgniatamy do punktu jest ściągalny do punktu, ale nie na odwrót. Np. *trąbka Borsuka* (zwana przez Anglosasów także *oślą czapką*), powstająca z pełnego trójkąta $ABC$ przez identyfikację jego boków $AB = AC = BC$, jest ściągalna do punktu, ale nie można na niej wykonać żadnego zgniecenia.

Matematyk angielski E. C. Zeeman wysunął następującą hipotezę [86].

Hipoteza Zeemana. *Jeśli* 2*-wymiarowy kompleks $K$ jest ściągalny, to kompleks $K \times I$ jest zgniatalny.*

Z hipotezy Zeemana wynika hipoteza Poincarégo [86]. Mianowicie, jeśli $M^3$ jest sferą homotopijną, to bierzemy jakąkolwiek jej triangulację i usuwamy wnętrze jednego sympleksu. Pozostaje kula homotopijna $N^3$. Zgniatamy ją do 2-wymiarowego kompleksu $K$ (są wolne ściany), który jest ściągalny, bo $N^3$ jest ściągalna. Jeśli hipoteza Zeemana jest prawdziwa, to

$$N^3 \times I \searrow K \times I \searrow 0,$$

a zatem $N^3 \times I$ jest kulą. Przeto $\partial N^3 \subset \partial(N^3 \times I) = S^3$. Ale brzegiem $N^3$ jest brzeg usuniętego sympleksu, a zatem, topologicznie, $\partial N^3 = S^2$, skąd na mocy twierdzenia Schoenfliesa wnosimy, że $N^3$ musi być kulą.

Próby obalenia hipotezy Zeemana (co zresztą nie obalałoby jeszcze hipotezy Poincarégo) trudnymi, specjalnie dobieranymi przykładami 2-wymiarowych kompleksów ściągalnych nie dały dotąd wyniku (por. [30]).

Inną redukcję hipotezy Poincarégo związaną z tą samą drogą uzyskał jakiś czas temu Gross [15]. Wyróżnia on mianowicie klasę $PC$ („Poincaré Category") rozmaitości wymiaru 3, które mają tę własność, że każda kula homotopijna, która w nich leży, jest homeomorficzna z kulą zwyczajną. Okazuje się, że do klasy $PC$ należą wszystkie znane rozmaitości, a m.in. sfera $S^3$, przestrzeń rzutowa $P^3$, produkty $M^2 \times I$ i wiązki z włóknem $M^2$ nad $S^1$, gdzie w obu przypadkach $M^2$ jest dowolną powierzchnią zamkniętą, przestrzenie soczewkowe $L(p,q)$ itp. oraz że klasa ta ma dobre własności formalne, np. jest dziedziczna (tzn. podrozmaitość rozmaitości tej klasy należy do tej klasy), a w przypadku rozmaitości orientowalnych z niepustym brzegiem zachowuje się przy ich sklejaniu wzdłuż dysków leżących na brzegach.

Jak wiadomo, rozmaitość triangulowalna (a każda rozmaitość gładka jest triangulowalna) wymiaru $n$ nazywa się *orientowalną*, gdy $n$-wymiarowym sympleksom jakiejkolwiek jej triangulacji można nadać takie orientacje (np. przez ustalenie kolejności wierzchołków z dokładnością do parzystej permutacji), że orientacje indukowane na $(n-1)$-wymiarowych ścianach przez dwa sympleksy sąsiednie są zawsze przeciwne.

Twierdzenie Grossa. *Jeśli każda rozmaitość z brzegiem należąca do klasy $PC$ ma tę własność, że po doklejeniu do niej pełnego torusa wzdłuż jego brzegu powstaje rozmaitość klasy $PC$, to hipoteza Poincarégo jest prawdziwa.*

Dowód wynika łatwo z pewnego twierdzenia Wallace'a ([75], twierdzenie 7), które głosi, że każda rozmaitość zwarta, orientowalna, spójna i bez brzegu daje się otrzymać ze sfery $S^3$ przez wycięcie w $S^3$ pewnej liczby rozłącznych pełnych torusów i wklejenie ich z powrotem. W szczególności, każda rozmaitość zwarta, orientowalna, spójna i mająca pusty brzeg byłaby w klasie $PC$. Klasa ta zawierałaby więc także sferę homotopijną, a to oczywiście znaczyłoby, że każda sfera homotopijna jest sferą.

2) Jeszcze w latach poprzedzających I wojnę światową Heegard zauważył, że każda rozmaitość zamknięta i spójna $M^3$ zawiera kulę z uchami $T^3$ taką, że rozmaitość $M^3 - \operatorname{int} T^3$ jest homeomorficzna z $T^3$. Rozmaitość $M^3$ można więc przedstawić w postaci dwóch takie samych kul z uchami, sklejonych wspólnym brzegiem $P = \partial T^3$. Zaznaczając na powierzchni $P$ kanoniczny układ rozcięć $R_1$ kuli z uchami $T^3$ i kanoniczny układ rozcięć $R_2$ kuli z uchami $M^3 - \operatorname{int} T^3$ otrzymujemy czwórkę $(M^3, T^3, R_1, R_2)$ zwaną *diagramem Heegarda* rozmaitości $M^3$ i stanowiącą pewne przedstawienie tej rozmaitości na powierzchni $P$. Przedstawienie to jest jednoznaczne, każdemu diagramowi Heegarda odpowiada bowiem, z dokładnością do homeomorfizmu, tylko jedna rozmaitość ([63], str. 220), nie jest jednak wzajemnie jednoznaczne, dana rozmaitość może mieć bowiem wiele diagramów Heegarda.

Nadużywając nieistotnie definicji, będziemy mówili, że para $(M^3, T^3)$ jest *diagramem Heegarda rodzaju $p$ dla $M^3$*, gdy $M^3$ jest rozmaitością zamkniętą, $T^3$ jest pełnym torusem rodzaju $p$ (kulą z $p$ uchami) i $M^3 - \operatorname{int} T^3$ jest homeomorficzny z $T^3$.

Rozmaitości, które mają diagram Heegarda rodzaju 1, zostały sklasyfikowane [59]: są to mianowicie sfera $S^3$, produkt $S^1 \times S^2$ oraz wszystkie przestrzenie soczewkowe $L(p,q)$. Wobec tego, że wśród nich tylko sfera $S^3$ jest jednospójna, dla dowodu hipotezy Poincarégo wystarczy pokazać, że sfera homotopijna $M^3$ daje się rozłożyć na dwa pełne torusy rodzaju 1, sklejone wspólnym brzegiem, tzn.

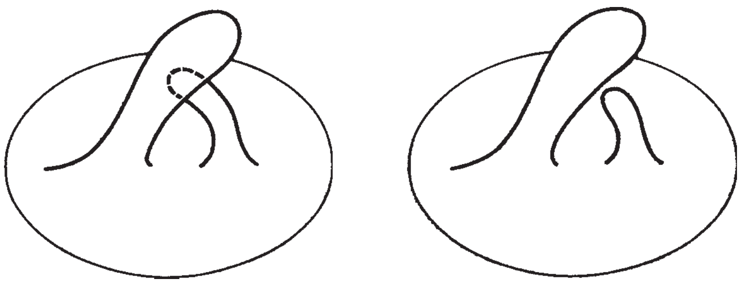
$$M^3 = T^3 \cup (M^3 - \operatorname{int} T^3),$$

gdzie

$$T^3 = M^3 - \operatorname{int} T^3 = S^1 \times D^2.$$

Próby dowodu hipotezy Poincarégo tą drogą polegają zwykle na odpowiednio zręcznym przerabianiu wyjściowego diagramu. Biorąc jakikolwiek diagram Heegarda sfery homotopijnej, powiedzmy diagram Heegarda rodzaju $p$, konstruuje się diagram Heegarda tej sfery rodzaju $p-1$. Po skończenie wielu krokach doszłoby się do diagramu Heegarda rodzaju 1.

Znacznym ułatwieniem tego rodzaju konstrukcji są wyniki Papakyriokopoulosa z lat 1957–1962. Udowodnił on m.in. słynny lemat Dehna [45]: *Jeśli $M^3$ jest rozmaitością z triangulacją, $D^2$ jest 2-wymiarowym dyskiem z triangulacją i $f : D^2 \to M^3$ przekształceniem symplicjalnym, które na pewnym otoczeniu $N$ brzegu $\partial D^2$ (w $D^2$) jest różnowartościowe, to $f(\partial D^2)$ ogranicza dysk wielościenny w $M^3$.* Mówiąc obrazowo: jeśli w $M^3$ mamy dysk z samoprzecięciami leżącymi daleko od brzegu, to nie ruszając brzegu można ten dysk „wygładzić" i samoprzecięcia zlikwidować (rys. 6).



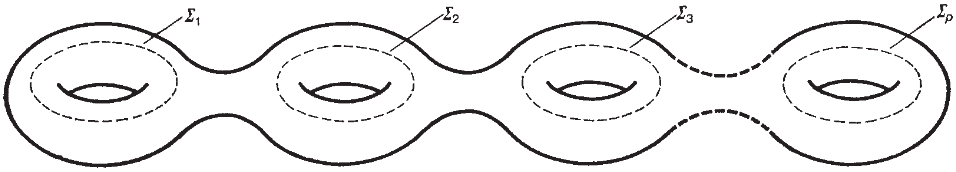
Rys. 6

Papakyriokopoulos pracował także nad hipotezą Poincarégo i udowodnił następujące twierdzenie [47].

Twierdzenie Papakyriokopoulosa. *Jeśli 3-wymiarowa rozmaitość zamknięta i orientowalna $M^3$ ma diagram Heegarda $(M^3, T^3)$ rodzaju $p \geqslant 2$,* *to istnieje krzywa zamknięta $L \subset \partial T^3$, która nie jest ściągalna w $\partial T^3$, ale jest ściągalna zarówno w $T^3$, jak i w $M^3 - \operatorname{int} T^3$.*

Nie powiodło się mu jednak pokazanie, że jeśli $M^3$ jest ponadto jednospójna, to $L$ może być krzywą zwykłą zamkniętą, tj. bez samoprzecięć. Gdyby tak było, to stosując lemat Dehna redukowałoby się indukcyjnie rodzaj aż do $p = 1$, a to znaczyłoby, że $M^3$ jest $S^3$.

Tą samą drogą zmierzającą do pokazania, że 3-wymiarowa sfera homotopijna ma diagram Heegarda rodzaju 1, próbuje w ostatnich latach rozstrzygnąć hipotezę Poincarégo Poénaru [48], [49]. Przytoczę dwa jego wyniki (oznaczenia jak na rys. 7).




Rys. 7

TWIERDZENIE HOMOTOPIJNE. *Niech $(M^3, T^3)$ będzie diagramem Heegarda rodzaju p. Rozmaitość $M^3$ jest sferą homotopijną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zanurzenia*

$$S_i : S^1 \to \partial T^3 \qquad dla\ i = 1, 2, \ldots, p$$

*takie, że*

$$s_i(S^1) \sim \Sigma_i \quad w\ T^3 \quad oraz \quad s_i(S^1) \sim 0 \quad w\ M^3 - \operatorname{int} T^3.$$

Homeomorfizmy $f, g : X \to Y$ nazywają się *izotopijnymi*, gdy istnieje ciągła rodzina homeomorfizmów $h_t : X \to Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, taka że $h_0 = f$ i $h_1 = g$. Jeśli ponadto $h_{t'}(X) \cap h_{t''}(X) = \emptyset$ dla $t' \neq t''$, mamy *izotopię ścisłą.* Zanurzenie $f : S^1 \to Y$ nazywa się *ściśle izotopijnym zeru*, gdy istnieje zanurzenie $F : D^2 \to Y$ takie, że $F|\partial D^2 = f$.

TWIERDZENIE IZOTOPIJNE. *Jeśli $M^3$ jest sferą homotopijną, to istnieje diagram Heegarda $(M^3, T^3)$ i istnieją zanurzenia*

$$\sigma_i : S^1 \to \partial T^3 \qquad dla\ i = 1, 2, \ldots, p$$

*takie, że*

(i) *$\sigma_i$ i $\Sigma_i$ są ściśle izotopijne w $T^3$,*
(ii) *$\sigma_i$ jest ściśle izotopijne zeru w $M^3 - \operatorname{int} T^3$.*

Twierdzenie izotopijne jest szczególnym przypadkiem tzw. twierdzenia strukturalnego [49], którego dowód liczy 424 stronice maszynopisu. Gdyby kwantyfikator szczegółowy „istnieje diagram” zastąpić ogólnym „dla każdego diagramu” – mielibyśmy hipotezę Poincarégo.

Praca V. Poénaru długo nie ustawała, por. [50], [51], i nadal nie ustaje. Praca [52], jak napisał recenzent Mathematical Reviews (B. Zimmermann, por. MR 93i:57015), „sets the starting point of the author's long journey toward a solution of what may be the most famous problem of topology, that is, the classical 3-dimensional Poincaré conjecture”. Idee i dorobek Poénaru doczekały się już opracowań ze strony innych autorów, por. [14].

Od czasu do czasu pojawiają się też doniesienia o udowodnieniu hipotezy Poincarégo. Najgłośniejszy może przypadek, to dowód C. Rourke i jego doktoranta, który rozchodził się preprincie. A. Casson znalazł jednak błąd i Rourke wycofał dowód. Odpryskiem tego nieudanego dowodu jest praca [60].

Przykładem takiego doniesienia jest też praca [20]. Jest to tylko abstrakt, ale fakt, że mimo upływu kilku lat nie pojawił się pełny dowód, a sprawa ucichła – wydaje się wymowny.

Popularny przegląd nieudanych dowodów hipotezy Poincarégo zawiera trudno dostępny artykuł [71].

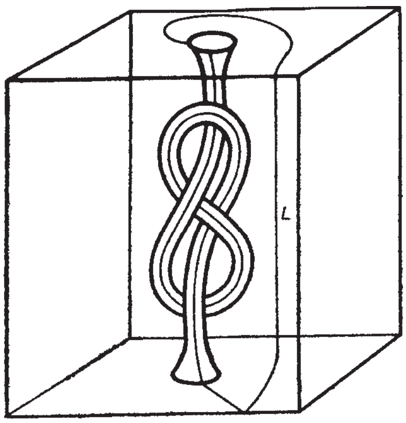
W roku 2001 prasa brytyjska donosiła, że profesor Martin Dunwoody z Southampton University uzyskał dowód hipotezy Poincarégo, ale dotychczas nie było potwierdzenia tej wiadomości.

Czasem pojawiają się też sformułowania równoważne, pokazujące jak daleko sięgają skutki hipotezy Poincarégo, por. [17].

**6. Próby znalezienia kontrprzykładu na hipotezę Poincarégo w wymiarze 3.** Wysiłkom zmierzającym do znalezienia dowodu trudnej hipotezy towarzyszą zwykle próby skonstruowania kontrprzykładu. Punktem wyjścia takich prób w badaniach nad hipotezą Poincarégo były rozmaitości dodekaedralne, które dały początek klasie sfer homologicznych, tzn. rozmaitości zamkniętych wymiaru 3, których grupy homologii są identyczne z grupami homologii sfery $S^3$. Sfer takich, topologicznie różnych, jest nieskończenie wiele, a stosunkowo prosty sposób konstrukcji pewnej ich klasy podał Gross [16]. Sposób ten polega na tym, że w sferze $S^3$ bierzemy węzeł $k$ (tj. obraz homeomorficzny okręgu $S^1$), lekko go pogrubiamy do torusa, a następnie usuwamy wnętrze tego torusa. Otrzymujemy rozmaitość, zwaną *dopełnieniem węzła $k$*, której brzegiem jest torus. Bierzemy teraz dwa egzemplarze tej rozmaitości i sklejamy je brzegami (torusami właśnie) w ten sposób, by równik jednego torusa przeszedł na południk drugiego, a południk na równik. Identyczność grup homologii tak otrzymanej rozmaitości z grupami homologii sfery $S^3$ wynika z ciągu Mayera–Vietorisa. To zaś, że taka sfera homologiczna nie jest sferą homotopijną, pochodzi stąd, że jeśli w sferze homotopijnej mamy torus łagodnie w niej leżący (z dwustronnym kołnierzem), to dzieli on tę sferę na dwie części, z których jedna – na mocy lematu Dehna i twierdzenia o pętli (Papakyriokopoulos [46]) – ma grupę podstawową okręgu.

Oznaczając przez $M^n$ rozmaitość otrzymaną z węzła toroidalnego typu $(2, 2n+1)$, Gross pokazał [16], że jeśli $2p+1$ i $2q+1$ są liczbami pierwszymi oraz $(4p+3)! < 2q+1$, to $M_p$ i $M_q$ są topologicznie różne.

Próby znalezienia kontrprzykładu na hipotezę Poincarégo polegają na „rozejrzeniu się” w klasie sfer homologicznych z nadzieją znalezienia w niej sfery homotopijnej różnej od $S^3$. Na tej drodze kandydata na kontrprzykład można szukać jak następuje (Bing [4]). Bierzemy kulę $C$ z zawęźloną dziurą (rys. 8) i na jej brzegu kreślimy południk $L$, tzn. taką krzywą zwykłą




Rys. 8

zamkniętą, która przechodzi przez dziurę raz i nie ogranicza w $R^3 - \operatorname{int} C$, a następnie do kuli $C$ doklejamy pełny torus $T$ w taki sposób, by południk $L$ nakleił się na równik torusa $T$, tzn. na krzywą zwykłą zamkniętą leżącą na jego brzegu, która ogranicza w $T$, ale nie w $R^3 - \operatorname{int} T$. Jak można pokazać, grupa podstawowa kuli $C$ pokazanej na rys. 5 ma postać

$$G = \{a, b, c, d : cyc^{-l}b^{-1} = bdc^{-1}d^{-1} = aca^{-1}d^{-1} = 1\},$$

a po doklejeniu $T$ przybiera postać

$$G' = \{a, b, c, d : cac^{-l}b^{-1} = bdc^{-l}d^{-1} = aca^{-l}d^{-1} = c^{-1}da^{-l}ba = 1\}.$$

To, czy tak otrzymana sfera homologiczna jest sferą homotopijną, zależy od trywialności grupy $G'$.

Być może wycinając w $D^3$ podobne dziury i wklejając z powrotem pełne torusy otrzymamy grupę podstawową, której relacje, dzięki jakiejś sztuczce, okażą się relacjami grudy trywialnej, chociaż sama rozmaitość nie będzie sferą $S^3$. Są tu jednak dwie poważne trudności. Po pierwsze, algebra jest

„wściekła” i chyba tylko przez przypadek można pokazać, że grupa jest trywialna. A po drugie, nawet jeśli algebra „puści”, trzeba jeszcze pokazać, że rozmaitość jest topologicznie różna od $S^3$. Badania jednak trwają i w tej chwili np. wiadomo, że pewne węzły, m.in. powszechnie znana koniczynka, nie prowadzą do kontrprzykładów (por. Bing [4], str. 103). Jak się ma sprawa z węzłem pokazanym na rys. 7, nie wiadomo. Inną drogę szukanie kontrprzykładu zaproponował Fox [11].

W roku 1992 J. Rubinstein opisał, w serii wykładów wygłoszonych w Technion (Haifa, Izrael), algorytm rozpoznawania, czy zamknięta i orientowalna 3-wymiarowa rozmaitość z ustalona triangulacją (którą w tym wymiarze możemy zawsze zakładać) jest homeomorficzna z $S^3$ [61], p. także [62], [73], [34], [35].

Rodzi to nadzieje na zbudowanie podobnego algorytmu rozpoznawania, czy zamknięta 3-wymiarowa rozmaitość z ustaloną triangulacją jest sferą homotopijną. Dokładniej, wobec twierdzenia, że 3-wymiarowa rozmaitość zamknięta jest sferą homotopijną wtedy i tylko wtedy, gdy ma trywialną grupę podstawową [21] – wystarczy algorytm rozpoznawania, czy zamknięta 3-wymiarowa rozmaitość z ustaloną triangulacją ma trywialną grupę podstawową. Ale to wiąże się z zagadnieniem słowa dla grup 3-wymiarowych rozmaitości, które – jak wiadomo – jest nierozstrzygalne.

W tej chwili takiego algorytmu nie ma, choć prace trwają. Ale nawet gdybyśmy go mieli, to i tak nie dałby on jeszcze sam przez się odpowiedzi na hipotezę Poincarégo w wymiarze 3. Stanowiłby jednak istotny krok w kierunku jej rozstrzygnięcia. Mając mianowicie algorytm rozpoznawania 3-wymiarowej sfery homotopijnej moglibyśmy poszukiwać kontrprzykładu na hipotezę Poincarégo jak następuje: stosujemy algorytm rozpoznawania sfery homotopijnej, a następnie w przypadku znalezienia takiej sfery stosujemy znany już algorytm rozpoznawania sfery w celu sprawdzenia, czy dana sfera homotopijna jest sferą. Jeśli istnieje kontrprzykład na hipotezę Poincarégo, to ta procedura do niego doprowadzi. Ale jeśli go nie ma, to będzie się ona ciągnąć w nieskończoność.

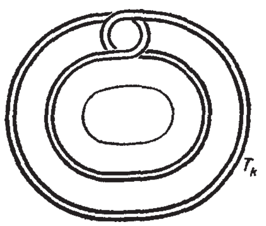
**7. Znaczenie hipotezy Poincarégo dla topologii.** Przez sam sposób postawienia zagadnienia, a w szczególności przez wysunięcie naprzód środków algebraicznych, hipoteza dała początek intensywnym badaniom w zakresie topologii rozmaitości i topologii algebraicznej, dwu szybko się rozwijającym i blisko z sobą związanym kierunkom topologii.

Żeby dać tylko jeden przykład bezpośredniego wpływu hipotezy na sposób stawiania zagadnień, zauważmy, że jeśli sformułować ją w postaci: istnieje tylko jedna rozmaitość wymiaru 3, która ma typ homotopii sfery $S^3$, mianowicie sama sfera $S^3$, to łatwo widzieć, że podstawiając w niej za $S^3$ różne rozmaitości $M^n$ otrzymujemy całą rodzinę pytań dotyczących charakteryzacji rozmaitości przez ich typy homotopii. Trudne te zagadnienia były przedmiotem intensywnych badań i dziś już np. wiadomo, że typy homotopii na ogół nie klasyfikują rozmaitości (np. przestrzenie soczewkowe $L(7,1)$ i $L(7,2)$ mają ten sam typ homotopii, ale nie są homeomorficzne [81]). Pozostaje jednak ciągle przypuszczenie, poparte pomyślnym rozstrzygnięciem uogólnionej hipotezy dla wyższych wymiarów, że jeśli ten typ jest w jakimś sensie prosty, to istnieje tylko jedna rozmaitość przezeń reprezentowana.

Prosty typ mają niewątpliwie sfera $S^3$, najprostsza rozmaitość w klasie 3-wymiarowych rozmaitości zamkniętych i kula $D^3$, najprostsza rozmaitość w klasie 3-wymiarowych rozmaitości zwartych z brzegiem. Odrzucając w tym drugim przypadku zwartość otrzymujemy kulę otwartą (tj. bez brzegu), najprostszą 3-wymiarową rozmaitość otwartą, tj. rozmaitość bez brzegu, nie zwartą. Przez analogię z hipotezą Poincarégo można wysunąć przypuszczenie: każda rozmaitość otwarta, która ma typ homotopii kuli otwartej (tj. każda rozmaitość nie zwarta, bez brzegu, spójna i jednospójna., homologicznie trywialna) jest homeomorficzna z kulą otwartą.

Jak delikatna jest hipoteza Poincarégo świadczy najlepiej to, że nieznaczne tylko wychylenie się poza nią, zawarte w wysuniętym przed chwilą przypuszczeniu, okazuje się fałszywe. Znane są już dziś liczne rozmaitości otwarte mające typ homotopii kuli otwartej, ale z nią nie homeomorficzne [37]. Tu przytoczę elegancką konstrukcję pierwszej z nich, podaną jeszcze w 1935 r. przez J. H. C. Whiteheada [79].

Rozmaitość Whiteheada $W$ jest sumą ciągu rosnącego pełnych torusów $T_1, T_2, \ldots$ w $R^3$, z których każdy jest zawęźlony w następnym tak, jak to pokazuje rys. 9.




Rys. 9

Rozmaitość $W$ jest jednospójna, każda bowiem krzywa zwykła zamknięta $C \subset W$ leży w którymś torusie $T_k \subset W$ dla dostatecznie dużego $k$ (bo $W$ jest sumą ciągu rosnącego przestrzeni zwartych), ale $T_k$ jest ściągalny w $T_{k+1} \subset W$, a zatem także $C$ jest ściągalne w $T_{k+1} \subset W$. Podobnie pokazuje się, że także wyższe grupy homotopii są trywialne, skąd wynika homologiczna trywialność $W$.

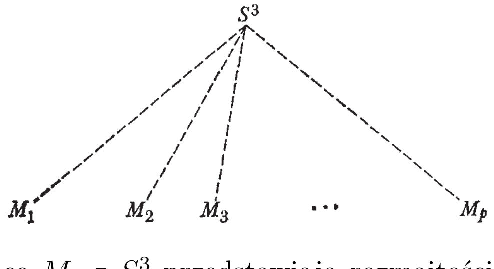
Rozmaitość $W$ nie jest homeomorficzna z $R^3$, zawiera ona bowiem krzywą zwykłą zamkniętą, która nie leży w żadnej 3-wymiarowej kuli $K \subset W$. Taka jest np. środkowa krzywa torusa $T_l$. (Rozmaitość $W$ ma także różne inne interesujące własności, por. [19].)

Tak silny wpływ hipotezy Poincarégo na topologię jest oczywiście możliwy tylko dzięki temu, że jest ona mocno związana z podstawowymi jej zagadnieniami. Jednym z nich jest tzw. *zagadnienie klasyfikacyjne*, polegające na tym, by dla ustalonej klasy rozmaitości (np. zamkniętych, orientowalnych) i ustalonego wymiaru $n$ znaleźć w tej klasie taki ciąg $M_1^n, M_2^n, \ldots$, by każda $n$-wymiarowa rozmaitość tej klasy była homeomorficzna z jedną i tylko jedną z rozmaitości tego ciągu (znaleźć znaczy podać konstrukcję). Związane z tym jest *zagadnienie homeomorfizmu*: podać algorytm rozstrzygający, czy dwie dane rozmaitości wymiaru $n$ są, czy nie są homeomorficzne. W klasie rozmaitości zwartych oba zagadnienia są rozwiązane dla $n = 2$ [63], otwarte dla $n = 3$, a – jak udowadnia Markow [32], [33] – zagadnienie homeomorfizmu jest nierozwiązalne dla $n \geqslant 4$. Z tego punktu widzenia przypadek $n = 3$ jest szczególnie interesujący.

Do zagadnienia klasyfikacji rozmaitości wymiaru 3 można podchodzić różnymi sposobami, tu przedstawię tylko pewne związki między zagadnieniem klasyfikacji rozmaitości orientowalnych zamkniętych wymiaru 3 a hipotezą Poincarégo.

Rozpatrzmy dwa pełne torusy tego samego rodzaju $p > 0$ (kula z $p$ uchami). Identyfikując ich brzegi w różny sposób otrzymujemy przeliczalną rodzinę topologicznie nierównoważnych rozmaitości zamkniętych wymiaru 3. W rodzinie tej wyróżniają się dwie skrajne identyfikacje: ta, w której wyniku powstaje sfera zwyczajna $S^3$ i ta, która daje sferę z $p$ uchami $M_p$. Rozmaitość $M_p$ można opisać jak następuje: bierzemy sferę $S^3$, w niej $2p$ rozłącznych 3-wymiarowych kul, a następnie usuwamy wnętrza tych kul i identyfikujemy brzeg $i$-tej kuli z brzegiem $(i + p)$-tej kuli, $i = 1, 2, \ldots, p$, w taki sposób, by rozmaitość, która powstaje, była orientowalna.

Grupa podstawowa $\pi_1(M_p)$ jest grupą wolną o $p$ generatorach. Pytanie o implikację odwrotną: czy jeśli grupa podstawowa rozmaitości zamkniętej orientowalnej jest grupą wolną o $p$ generatorach, to rozmaitość jest sferą z $p$ uchami? – ma odpowiedź pozytywną, ale tylko przy założeniu hipotezy Poincarégo [45]. Rozpatrzmy teraz diagram




gdzie kropki łączące $M_p$ z $S^3$ przedstawiają rozmaitości powstałe ze sklejenia dwóch torusów rodzaju $p$ w sposób różny od identyfikacji dających

$S^3$ i $M_p$. Rozmaitości skrajne $S^3, M_1, M_2, \ldots$ są scharakteryzowane (z dokładnością do homeomorfizmu) przez ich grupy podstawowe, jeśli hipoteza Poincarégo jest prawdziwa [45], rozmaitości leżące między $S^3$ a $M_1$ zostały sklasyfikowane przez Reidemeistera [59] przy założeniu innej hipotezy, tzw. *Hauptvermutung* (dowiedzionej dla rozmaitości wymiaru 3 przez Moisego [43]), reszta jest niewiadoma. Zagadnienie klasyfikacji polegałoby więc na zbadaniu, jakie to są te rozmaitości, które leżą między $S^3$ a $M_p$ dla $p > 1$ i jak można je scharakteryzować (z dokładnością do homeomorfizmu).

Z zagadnieniem klasyfikacji wiąże się pytanie o rodzaj rozmaitości. Wiadomo, że rozmaitość zamknięta, orientowalna może się pojawić na różnych liniach $S^3$—$M_p$ diagramu. Najmniejsza z takich liczb $p$ nazywa się *rodzajem rozmaitości*, tzn. rozmaitość ma rodzaj $p$, gdy można ją otrzymać przez sklejenie brzegami dwóch pełnych torusów rodzaju $p$ i nie można jej otrzymać przez sklejenie brzegami dwóch pełnych torusów rodzaju $p' < p$.

Pytanie o rodzaj rozmaitości zwartej orientowalnej ma duże znaczenie dla zagadnienia klasyfikacji tych rozmaitości, ale jak dotąd jest otwarte. Jedynie w specjalnym przypadku, gdy grupa podstawowa jest grupą wolną o $p$ generatorach, możemy dać na nie odpowiedź i to tylko przy założeniu hipotezy Poincarégo: rozmaitość taka jest sferą o $p$ uchach, a zatem jej rodzaj wynosi $p$. Dla $p = 0$ mamy hipotezę Poincarégo.

Mimo nie rozstrzygnięcia dotąd hipotezy Poincarégo, wiemy dziś już jednak sporo o rozmaitościach wymiaru 3, ale niemal wszystko co wiemy zawdzięczamy w znacznym stopniu znajomości sfery $S^2$. Brak podobnej wiedzy o sferze $S^3$ jest przeszkodą nie tylko do jeszcze lepszego poznania rozmaitości 3-wymiarowych, w szczególności ich klasyfikacji, ale także do poznania rozmaitości wyższych wymiarów. Na przykład, jeśli hipoteza Poincarégo jest prawdziwa, to każda triangulowalna rozmaitość wymiaru 4 jest rozmaitością kombinatoryczną ([4], str. 125).

**8. Zakończenie.** Wieloletni wysiłek badaczy doprowadził do sytuacji, w której powiązania hipotezy Poincarégo zostały już nieźle poznane. Wiemy, że jeśli hipoteza jest prawdziwa, to daje nie tylko poręczną charakteryzację sfery $S^3$ i innych rozmaitości, m.in. przestrzeni rzutowej $P^3$ [31], sfery z uchami $M_p$ [31], kuli z brzegiem $D^3$ itp., ale także – wobec kluczowego znaczenia sfer w topologii – przełamuje ważną barierę w poznaniu rozmaitości, a w szczególności w ich klasyfikacji. A jeśli nie jest prawdziwa, to użyte środki algebraiczne okażą się nieadekwatne i mamy nowe, raczej nieoczekiwane, ale niezwykle ciekawe zjawisko: sferę homotopijną, która nie jest sferą zwyczajną. Sfera taka stałaby się niewątpliwie natychmiast przedmiotem intensywnych badań, ale już samo jej istnienie świadczyłoby dobitnie, że wśród rozmaitości niskich wymiarów istnieją nie przeczuwane zjawiska geometryczne, których dotychczasowymi środkami algebraicznymi nie jesteśmy w stanie uchwycić.

Powszechne zainteresowanie towarzyszące badaniom nad tą hipotezą ma, jak się wydaje, kilka źródeł. Przede wszystkim hipoteza okazała się bardzo trudna i mimo wieloletnich wysiłków pozostaje otwarta, a posmaku legendy dodają jej największe nazwiska w topologii (Poincaré, Moise, Bing, Papakyriokopoulos i inni), którym się nie udało. Prócz tego rozumie się jednak także jej znaczenie dla weryfikacji użytych metod algebraicznych, a także – co może jest tu najważniejsze – dla dalszego postępu topologii rozmaitości niskich wymiarów, głównej dostarczycielki idei, przykładów i kontrprzykładów dla topologii rozmaitości w ogóle.

Intensywne badania trwają. Trwaj próby pozytywnego rozstrzygnięcia hipotezy, nadal poszukuje się kontrprzykładów, ale ponadto zaczynają się już tu i ówdzie pojawiać głosy sceptyków uważających, że hipoteza może się okazać niezależna lub nierozstrzygalna.

**Prace cytowane**

[1] D. Barden, *The structure of manifolds*, Ph.D. thesis, Cambridge Univ., 1963.
[2] R. H. Bing, *Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be $S^3$*, Ann. of Math. 68 (1958), 17–37.
[3] R. H. Bing, *An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated*, ibid. 69 (1959), 37–65.
[4] R. H. Bing, *Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré Conjecture*, Lectures on Modern Mathematics, Vol. II, 93–128.
[5] R. H. Bing, *Mapping a sphere onto a homotopy 3-sphere*, Topology Seminar Wisconsin 1965, 89–99.
[6] M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1970), 74–76.
[7] S. S. Cairns, *The triangulation problem and its role in analysis*, ibid. 52 (1946), 545–571.
[8] M. M. Cohen, *A Course in Simple-Homotopy Theory*, Springer, New York, 1970.
[9] E. H. Connell, *A topological h-cobordism theorem for $n \geqslant 5$*, Illinois J. Math. 11 (1967), 300–309.
[10] F. T. Farrell, W.-C. Hsiang, *The Whitehead groups of poly-(finite or cyclic) groups*, J. London Math. Soc. 24 (1981), 308–324.
[11] R. H. Fox, *Construction of simply connected 3-manifolds*, Topology of 3-manifolds and related topics, 1961, 213–216.
[12] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. 17 (1982), 357–453. MR 84b:57006.
[13] M. H. Freedman, F. Quinn, *Topology of 4-Manifolds*, Princeton Math. Ser. 39, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1990.
[14] D. Gabai, *Valentin Poénaru's program for the Poincaré Conjecture*, w książce [83], 139–166. MR 96k:57006.
[15] J. L. Gross, *Manifolds in which the Poincaré Conjecture is true*, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), 177–189.
[16] J. L. Gross, *An infinite class of irreducible homotopy 3-spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 173–176.

[17] P. Hajłasz, *Equivalent statement of the Poincaré conjecture*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 167 (1994), 25–31. MR 95k:57015.

[18] W. Haken, *On homotopy* 3*-spheres*, Illinois J. Math. 10 (1966), 159–180.

[19] W. Haken, *Some results on surfaces in* 3*-manifolds*, MAA Stud. Math., vol. V, 39–98.

[20] Bai He, *A proof of* 3*-dimensional Poincaré conjecture*, J. Math. Res. Exposition 13 (1993), 241–244. MR 94d:57032.

[21] J. Hempel, 3*-Manifolds*, Ann. Math. Stud. 86, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1976. MR 54#3702.

[22] M. W. Hirsch, J. E. Marsden, M. Shub (eds.), *From Topology to Computation*: *Proceedings of the Smalefest*, Springer, 1993. MR 94f:00026.

[23] M. W. Hirsch, *The work of Stephen Smale in differential topology*, w książce [22], 83–106. MR 97b:57001.

[24] J. F. P. Hudson, *Piecewise Linear Topology*, Benjamin, New York, 1969.

[25] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*; Comment. Math. Helv. 34 (1960), 257–270.

[26] M. Kervaire, *Le théorème de Barden–Mazur–Stallings*, ibid. 40 (1965), 31–42.

[27] M. Kervaire, J. Milnor, *Groups of homotopy spheres*, Ann. of Math. 77 (1963), 504–537.

[28] K. Koseki, *Poincarésche Vermutung in Topologie*, Math. J. Okayama Univ. 8 (1958), 1–106.

[29] K. Koseki, *Bemerkung zu meiner Arbeit „Poincarésche Vermutung"*, ibid. 9 (1959/60), 165–172.

[30] W. B. R. Lickorish, *An improbable collapse*, Topology 12 (1973), 5–8.

[31] G. R. Livesay, *Fixed point free involutions of the* 3*-sphere*, Ann. of Math. 72 (1960), 603–611.

[32] A. Markow, *O nierazreszimosti niekotorych problem topołogii*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 123 (1958), 978–980 (po rosyjsku).

[33] A. Markow, *Insolvability of the problem of homeomorphy*, Proc. Internat. Congress of Mathematicians 1958, Cambridge, 1960, 300–306.

[34] S. V. Matveev, *Algorithms for the recognition of the three-dimensional sphere after Thompson*), Mat. Sb. 186.5 (1995), 69–84 (po rosyjsku). MR 96g:57016.

[35] S. V. Matveev, A. T. Fomenko, *Algorithmic and computer methods in three-dimensional topology*, Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1991 (po rosyjsku). MR 93f:57002.

[36] B. Mazur, *Relative neighbourhoods and the theorems of Smale*, Ann. of Math. 77 (1963), 232–249.

[37] D. R. McMillan, Jr., *Some contractible open* 3*-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 373–382.

[38] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. 64 (1956), 399–405.

[39] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton, 1963.

[40] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton, 1965.

[41] J. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 358–426.

[42] J. Milnor, *The work of M. H. Freedman*, w książce: Proc. Internat. Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986, 13–15.

[43] E. E. Moise, *Affine structures in* 3*-manifolds*, *V. The triangulation problem and Hauptvermutung*, Ann. of Math. 56 (1952), 96–114.

[44] M. H. A. Newman, *The engulfing theorem for topological manifolds*, Ann. of Math. (2) 84 (1966), 555–571. MR 34#3557.

[45] C. D. Papakyriokopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math. 66 (1957), 1–26.

[46] C. D. Papakyriokopoulos, *On solid tori*, Proc. London Math. Soc. 7 (1957), 281–299.

[47] C. D. Papakyriokopoulos, *Reduction of the Poincaré Conjecture to other conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 360–366.

[48] V. Poénaru, *Quelques remarques sur les diagrammes de Heegard*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 24 (1970), 37–52.

[49] V. Poénaru, *Sur la structure des sphères d'homotopie lisses en dimension* 3, Publ. Math. d'Orsay, Juin 1971 (preprint).

[50] V. Poénaru, *Infinite processes and the* 3*-dimensional Poincaré Conjecture*: *An outline of the proof* (preprint).

[51] V. Poénaru, *Infinite processes and the* 3*-dimensional Poincaré Conjecture*: *An outline of the outline of the proof*, preprint 89-06, Univ. Paris XI, Orsay, 1989.

[52] V. Poénaru, *The collapsible pseudo-spine representation theorem*, Topology 31 (1992), 625–656. MR 93i:57015.

[53] H. Poincaré, *Analysis Situs*, J. École Polytech. 1 (1895), 1–121. (Istnieje przekład rosyjski prac Poincarégo: H. Poincaré, *Izbrannyje trudy*, Moskwa, 1972.)

[54] H. Poincaré, *1$^r$ Complément de l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo 13 (1899), 285–343.

[55] H. Poincaré, *2$^d$ Complément*, Proc. London Math. Soc. 32 (1900), 277–308.

[56] H. Poincaré, *3$^e$ Complément*, Bull, Soc. Math. France 30 (1902), 49–70.

[57] H. Poincaré, *4$^e$ Complément*, J. Math. Pures Appl. 8 (1902), 169–214.

[58] H. Poincaré, *5$^e$ Complément*, Rend. Circ. Math. Palermo 18 (1094), 45–110.

[59] K. Reidemeister, *Homotopieringe von Linsenräume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1935), 102–109.

[60] C. Rourke, *Characterization of the three-sphere following Haken*, Turkish J. Math. 18 (1994), 60–69. MR 95b:57014.

[61] J. H. Rubinstein, *The solution to the recognition problem for $S^3$*, Lectures, Haifa (Israel), May 1992.

[62] J. H. Rubinstein, *An algorithm to recognize the* 3*-sphere*, Proc. Internat. Congress of Mathematicians, Zurich, 1994 (Switzerland), Birkhäuser, Basel, 1995.

[63] H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, 1934.

[64] S. Smale, *The generalized Poincaré Conjecture in higher dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 373–376.

[65] S. Smale, *Generalized Poincaré Conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. 74 (1961), 391–406.

[66] S. Smale, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. 84 (1962), 387–399.

[67] S. Smale, *The story of the higher dimensional Poincaré conjecture* (*What actually happened on the beaches of Rio*), w książce [22], 27–40.

[68] J. Stallings, *Polyhedral homotopy spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 485–488.

[69] J. Stallings, *How not to prove the Poincaré Conjecture*, Topology Seminar Wisconsin 1965, 83–88.

[70] J. Stallings, *Lectures on Polyhedral Topology*, Technical Report, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay, 1967. (Notes by G. Ananada Swarup).

[71] G. Taubes, *What happens when Hubris meets Nemesis*, Discover, July 1987.

[72] R. Thom, *Sur les travaux de Stephen Smale*, w książce: *Trudy Meždunarodnowo Kongresa Matematikow*, Moskwa, 1966, Mir, Moskwa, 1968, 25–28.

[73] A. T h o m p s o n, *Algorithmic recognition of* 3*-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1998), 57–66.

[74] K. V o l k e r t, *The early history of Poincaré conjecture*, w książce: *Henri Poincaré: science et philosophie*, Publ. Henri Poincaré Arch., Akademie Verlag, Berlin, 1996, 241–250. MR 97e:01013.

[75] A. H. W a l l a c e, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. 12 (1960), 503–528.

[76] A. H. W a l l a c e, *Modifications and cobounding manifolds II*, J. Math. Mech. 10 (1961), 773–809.

[77] J. H. C. W h i t e h e a d, *Certain theorems about three-dimensional manifolds*, *I*, Quart. J. Math. Oxford 5 (1934), 308–320.

[78] J. H. C. W h i t e h e a d, *Three-dimensional manifolds* (*corrigendum*), ibid. 6 (1935), 80.

[79] J. H. C. W h i t e h e a d, *A certain open manifold whose group is unity*, ibid. 6 (1935), 268–279.

[80] J. H. C. W h i t e h e a d, *Simplicial spaces*, *nuclei*, *and* $m$*-groups*, Proc. London Math. Soc. 45 (1939), 243–327.

[81] J. H. C. W h i t e h e a d, *On incidence matrices*, *nuclei and homotopy types*, Ann. of Math. 42 (1941), 1197–1239.

[82] J. H. C. W h i t e h e a d, *Simple homotopy types*, Amer. J. Math. 72 (1950), 1–57.

[83] S.-T. Y a u (ed.), *Geometry*, *Topology*, *and Physics*, *For Raoul Bott*, Conference Proc. and Lecture Notes in Geometry and Topology VI, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995. MR 96f:00038.

[84] E. C. Z e e m a n, *The generalized Poincaré conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 270.

[85] E. C. Z e e m a n, *The Poincaré Conjecture for* $n \geqslant 5$, Topology of 3-manifolds and related topics, 1961, 198–204.

[86] E. C. Z e e m a n, *On the dunce hat*, Topology 2 (1964), 341–358.