ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXIX (2003)

Piotr Biler (Wrocław)

Równania różniczkowe cząstkowe na przełomie XX i XXI wieku

Wstęp. Zagadnienia prowadzące do równań różniczkowych pojawiły się około czterystu lat temu, m.in. w rozważaniach Galileusza, Kartezjusza i Napiera. Początkowo były to problemy dotyczące równań różniczkowych zwyczajnych, ale wkrótce zaczęto zajmować się (Newton, Euler) również równaniami z pochodnymi względem wielu zmiennych (tj. pochodnymi cząstkowymi we współczesnej terminologii). Konkretne zagadnienia z fizyki i geometrii prowadzące do badania równań różniczkowych stymulowały rozwój metod matematycznych nastawionych głównie na znalezienie jawnej postaci rozwiązania równania. Można przyjąć, że przełom XIX i XX wieku stał się początkiem nowego spojrzenia na to, co ważne i ciekawe w teorii równań różniczkowych. Prekursorem takiego spojrzenia był bez wątpienia Henri Poincaré, por. [28], inicjując publikacją [34] w 1881 roku jakościową teorię równań różniczkowych zwyczajnych, tzn. globalne spojrzenie na własności rozwiązań danego równania, bez konieczności odwoływania się do jawnych formuł analitycznych wyrażających rozwiązania. Symbolicznie też publikacja sześciotomowego dzieła Forsytha [18] zamyka okres badań, kiedy zrozumieć równanie oznaczało rozwiązać je.

Moim zamierzeniem jest podanie, w miarę krótki sposób, mocno subiektywnego (i eklektycznego) przeglądu tego, co istotnego wydarzyło się w XX wieku w teorii i zastosowaniach równań różniczkowych cząstkowych, i co może mieć doniosłe znaczenie dla dalszego rozwoju tej dziedziny.

Zdaję sobie sprawę z uproszczeń, jakie muszę tu uczynić, po pierwsze z powodu ogromu dziedziny: sekcja 35 poświęcona równaniom cząstkowym w *Mathematical Reviews* jest zwykle największa w kolejnych tomach *MR*; na międzynarodowych kongresach matematycznych w sekcji *„P.D.E.”* jest zazwyczaj najwięcej zaproszonych odczytów (a dochodzą również niektóre wystąpienia z fizyki matematycznej i układów dynamicznych). Po drugie: moje

Tekst ten był przedstawiony na zjeździe Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Poznaniu we wrześniu 2003 roku.

spojrzenie jest wybiórcze, bo nie można objąć wszystkich tematów, a zatem znając nieco bliżej matematykę francuską, będę się kierować własnymi preferencjami tematycznymi, jak i geograficznymi przy omawianiu poszczególnych kierunków rozwoju teorii.

Źródła i motywacje. Przystępując do omówienia głównych kierunków rozwoju teorii równań różniczkowych cząstkowych w XX wieku nie sposób nie wspomnieć dwóch matematyków, których wyniki, ale przede wszystkim dalekosiężne spojrzenie z nowej perspektywy skierowało równania różniczkowe na nowe tory. Chodzi tu oczywiście o wspomnianego wyżej Henri Poincarégo i Dawida Hilberta — ostatnich chyba uniwersalnych matematyków, którzy potrafili ogarnąć i zrozumieć wagę poszczególnych gałęzi matematyki. H. Poincaré w końcu XIX wieku dał potężny impuls do rozwoju jakościowej teorii równań różniczkowych. Było to odważne przestawienie nacisku z rozwiązywania równań (najlepiej w zamkniętej postaci, przez kwadratury, ewentualnie z wykorzystaniem funkcji specjalnych) na zrozumienie jak zachowują się rozwiązania — bez ich obliczania. Motywacją do tych badań były m.in. próby rozstrzygnięcia problemu stabilności Układu Słonecznego, czyli zagadnienia n grawitujących ciał [35]. Bez przesady można powiedzieć, że Poincaré stworzył podwaliny pod teorię układów dynamicznych. Teoria ta, na początku zajmująca się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi (por. artykuł W. I. Arnolda w [15, 33–61]), w drugiej połowie XX wieku rozszerza się na zagadnienia ewolucyjne opisane równaniami cząstkowymi, tzn. na **nieskończenie wymiarowe układy dynamiczne**.

Drugim osiągnięciem H. Poincarégo mającym głębokie konsekwencje było w 1890 roku pierwsze kompletne rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a

$$\Delta u = 0 \ \text{ w } \Omega, \qquad u = g \ \text{ zadane na } \partial\Omega, \tag{1}$$

dla dowolnych obszarów $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \leqslant 3$. Tu też jest widoczne przestawienie nacisku z badania problemów w konkretnych obszarach na zagadnienia w obszarach dowolnych. Metody użyte przez Poincarégo (wymiatanie, użycie wzoru Poissona dla zagadnienia w kuli) okazały się dużo ważniejsze niż sam wynik. Dały one początek **teorii potencjału** rozwijanej dla równań eliptycznych i parabolicznych.

D. Hilbert przedstawiając przed Międzynarodowym Kongresem Matematyków w Paryżu w 1900 roku 23 problemy, por. [20] i [27, 1–34] poświęcił kilka z nich równaniom różniczkowym. I tak szósty problem dotyczący aksjomatyzacji fizyki można uważać (z punktu widzenia matematycznego, a nie tylko filozoficznego) za ważne źródło inspiracji do badań nad **równaniem Boltzmanna**, i ogólniej, równaniami kinetycznej teorii gazów, bardzo ściśle związanymi z teorią prawdopodobieństwa. Zasygnalizowane w szóstym problemie zagadnienia dotyczące tworzącej się wówczas **teorii względności** i podstaw **mechaniki kwantowej** także doprowadziły do stworzenia nowych gałęzi matematyki i do istotnego postępu metod matematycznych (choćby) w geometrii i analizie funkcjonalnej. Może mniejsze znaczenie miało pytanie o stworzenie statystycznej teorii promieniowania, choć i tu można znaleźć ważne wyniki inspirowane pytaniem Hilberta.

Część szesnastego problemu Hilberta dotyczy **cykli granicznych w układach dynamicznych** na płaszczyźnie, a więc równań różniczkowych zwyczajnych, por. [10].

Dziewiętnasty, dwudziesty i dwudziesty trzeci problem Hilberta dotyczyły szeroko rozumianego **rachunku wariacyjnego**, a w szczególności analityczności rozwiązań zagadnień wariacyjnych, kwestii rozwiązalności zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych i uogólnieniom rachunku wariacyjnego.

Omówieniu problemów Hilberta i współczesnego ich rozumienia poświęcone są przeglądowe artykuły w [27], a w szczególności A. Wightmana (147–240), J. Serrina (507–524), E. Bombieriego (525–535) i G. Stampacchii (611–628).

Burzliwy rozwój matematyki w XX wieku pokazał, że najistotniejsze wyniki i rozwiązania klasycznych problemów rodzą się tam, gdzie splatają się różne gałęzie matematyki i spotykają się nowe idee. Dlatego, umownie odwołując się do genialnych intuicji Poincarégo i Hilberta, zobaczymy, że i tak nie uda się poklasyfikować osiągnięć w teorii równań różniczkowych cząstkowych w oderwaniu od innych gałęzi. Wszechobecne jest wzajemne przenikanie się różnych części tej teorii z często odległymi odeń innymi dziedzinami: geometrią, topologią, teorią miary, analizą funkcjonalną, ...

W syntetycznym podsumowaniu matematyki pierwszej połowy XX wieku w [14, Guidelines 1900–1950, 1–34] zamieszczona jest lista ponad ośmiuset ważnych wyników uzyskanych w poszczególnych latach. Wielokrotnie pojawiają się na niej — w kontekście równań różniczkowych cząstkowych (łącznie około osiemdziesięciu pozycji) nazwiska Dawida Hilberta, Jacquesa Hadamarda, Sergeja N. Bernsteina, Hermana Weyla, braci F. i M. Rieszów, Juliusza Schaudera, Jeana Leraya, Eberharda Hopfa, Charlesa B. Morreya Jr., Sergeja L. Sobolewa, Iwana G. Pietrowskiego. Z pewnością jeszcze trudniej byłoby ułożyć taką listę dla lat 1950–2000 i zapewne dlatego nie ma takiego spisu w [15]. Prześledzenie tych osiągnięć daje drugą po badaniu wpływów poglądów Poincarégo i Hilberta (chronologiczną) możliwość badania rozwoju teorii równań różniczkowych cząstkowych.

Trzecie podejście do syntetycznego spojrzenia na dwudziestowieczne równania różniczkowe cząstkowe uzyskamy postępując według sposobu przedstawionego w artykule L. Nirenberga w książce [14, 479–515]. Można bowiem omawiać poszczególne klasy równań: eliptycznych, hiperbolicznych, parabolicznych, ... — wyodrębnione z racji formalnej ich klasyfikacji i klasycznego podejścia. W takiej prezentacji widać również dwa potężne źródła interesujących pytań dotyczących równań różniczkowych cząstkowych: fizykę (i w szerszym sensie: przyrodoznawstwo) oraz matematykę samą w sobie. Zresztą według W. I. Arnolda (por.[2, 17]): *„Matematyka jest częścią fizyki, w której doświadczenia są bardzo tanie”*. Nie redukując aż tak matematyki, trzeba jednak przyznać, że w równaniach różniczkowych zjawiska fizyczne są nie tylko źródłem inspiracji, ale pomagają też weryfikować modele matematyczne.

Natomiast w kwestii środków technicznych Louis Nirenberg podkreśla rolę nierówności dla funkcji. Z drobną tylko przesadą określił to żartobliwie Barry Simon mówiąc, że równość w algebrze jest trywialną relacją, a równość w analizie jest konsekwencją dwóch nierówności (i to na ogół nietrywialnych).

Jeżeli chcemy prześledzić zmiany jakościowe w sposobie uprawiania matematyki w teorii równań cząstkowych, to konieczne jest przypomnienie nowych idei, metod i technik, wraz z obejrzeniem ich na konkretnych przykładach zastosowań.

Do takich fundamentalnych **idei** zaliczyłbym:
– koncepcje słabego rozwiązania i dystrybucji,
– jakościową teorię rozwiązań,
– analizę mikrolokalną.

Metody pozwalające na rozwinięcie tych idei dla konkretnych równań obejmują m.in.:
– interpretację pewnych funkcjonałów całkowych (np. całki Dirichleta) jako norm w przestrzeniach funkcyjnych,
– metodę punktu stałego z twierdzeniami Banacha o kontrakcji, a przede wszystkim Leraya–Schaudera dla operatorów zwartych, wraz z metodą przedłużania względem parametru,
– metodę regularyzacji parabolicznej,
– metody renormalizacji,
– metody entropijne.

Do zastosowania tego arsenału środków zostały wypracowane różne **techniki**, w tym m.in.:
– nierówności Sobolewa wraz z uogólnieniami i twierdzenia o zanurzaniu przestrzeni funkcyjnych,
– transformata Fouriera i rozkłady diadyczne,
– operatory pseudoróżniczkowe.
O niektórych z tych metod i technik wspomnę poniżej omawiając pewne klasy zagadnień z równań różniczkowych cząstkowych.

Systematyczne omówienie wielu innych aspektów teorii i zastosowań można znaleźć w obszernym przeglądzie [6].

Perspektywy na progu XXI stulecia. W sprawozdaniach konferencji [27, 35–79] próbowano pokusić się o zwięzłe sformułowanie kluczowych zagadnień współczesnej matematyki na wzór problemów Hilberta. Jest charakterystyczne, że problemy te związane z równaniami różniczkowymi cząstkowymi (por. str. 66–68, 76–79) dotyczą głównie zagadnień fizyki matematycznej: turbulencji, związków mechaniki klasycznej ze statystyczną, zagadnienia n ciał w mechanice kwantowej, sformułowania lokalnej teorii kwantowej zgodnej z ogólną teorią względności. Problemy te nie utraciły aktualności i dziś, po trzydziestu latach.

Wydaje się, że ogłoszenie „Problemów Milenijnych” w roku 2000, por. [35], to jest siedmiu problemów, rozwiązanie których może być nagrodzone milionem dolarów, nie będzie miało aż takiego znaczenia dla rozwoju matematyki jak bardziej wszechstronny zbiór problemów Hilberta. Powodem jest to, że problemy te są bardzo konkretne i (może zbyt emocjonalnie) przyciągają uwagę „wyczynowców” w matematyce, przez których rozumiem matematyków walczących o rozwiązanie znanego zagadnienia, a nie nastawionych na może mniej spektakularne ale systematyczne eksploatowanie pewnego obszaru badań.

Z równaniami różniczkowymi cząstkowymi najbardziej związane są problemy milenijne dotyczące hipotezy Poincarégo, układu Yanga–Millsa oraz **układu równań Naviera–Stokesa**. Ten ostatni problem jest szczegółowo opisany w [21].

Eksperci wskazują na zagadnienia z równań różniczkowych cząstkowych ściśle związane z zastosowaniami (np. w projektowaniu wyrobów przemysłowych, sterowaniu procesami technologicznymi, przesyłaniu informacji) jako na potencjalnie najważniejsze tematy badawcze w XXI wieku, por. artykuły L. C. Evansa (str. 16–17), R. Coifmana (str. 13–14), J. Glimma (str. 18–19), R. Kohna (str. 21–25), N. Kopell, G. Ostera i S. Levina (str. 27–29) w zbiorze [31].

Omawiając poszczególne tematy pozwolę sobie na sformułowanie pewnych uwag na temat co może i co mogłoby stać sie ważnym tematem badawczym w najbliższej przyszłości. Oczywiście, takie uwagi co do tendencji i możliwych kierunków rozwoju są tylko subiektywnymi spekulacjami.

W dalszym ciągu krótko omówię zaznaczone tłustym drukiem poprzednio dziedziny i kierunki badań. Świadomie nie chcę wymieniać nazwisk współczesnych polskich matematyków zajmujących się omawianymi dziedzinami, ponieważ szczupłość miejsca prowadziłaby nieuchronnie do pominięcia wielu z pewnością zasługujących na wspomnienie osób, por. artykuł [33] dotyczący wcześniejszego okresu.

Metody wariacyjne. Na związki zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych z rachunkiem wariacyjnym funkcjonałów wielu zmiennych zwracali już uwagę w XIX wieku G. Green, W. Thomson, P. G. Lejeune Dirichlet i B. Riemann. Mianowicie, rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla funkcji harmonicznych (1) realizuje minimum funkcjonału całki Dirichleta $\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$ w klasie funkcji u spełniających warunek brzegowy $u = g$. Nieścisłości w rozważaniach Riemanna wytknął K. Weierstrass. Nie wiadomo bowiem, czy minimum powyższego funkcjonału jest realizowane, a poza tym jak regularne powinny być funkcje u (np. $u \in C^1$?, lub ∇u istnieje prawie wszędzie?). Wątpliwości rozwiały dopiero wspomniane we wstępie rezultaty Poincarégo. Dalszy krok w kierunku uogólnienia na szerszą klasę równań eliptycznych, szerszą klasę warunków brzegowych, i badanie regularności rozwiązań uczynili S. Bernstein, I. G. Pietrowski, a następnie J. Schauder i J. Leray. Punktem wyjścia były oszacowania (*a priori*) Bernsteina z 1910–12, które pozwoliły mu udowodnić analityczność rozwiązań we wnętrzu obszaru Ω (a zatem rozwiązany został dziewiętnasty problem Hilberta). Idea Bernsteina wykorzystana przez Pietrowskiego doprowadziła także do uzyskania rozwiązania zagadnienia Dirichleta dla laplasjanu w $d > 3$ wymiarach. Połączenie oszacowań typu Bernsteina i metody przedłużania względem parametru (a więc metody topologicznej wykorzystującej ideę homotopii, a pozwalającej na redukcję zagadnień dla równań o zmiennych współczynnikach do przypadku równań o stałych współczynnikach) zaowocowało pięknymi wynikami Schaudera (1933–34) o istnieniu rozwiązań równań eliptycznych w klasach funkcji spełniających warunek Höldera. Dalsze rozwinięcie tej teorii polegało na zastosowaniu tych idei do ogólnych zagadnień brzegowych dla równań typu eliptycznego i parabolicznego, dla tych ostatnich niedawno definitywne wyniki uzyskał G. Lieberman.

Twierdzenie o punkcie stałym Leraya–Schaudera (1934) użyte przez nich w konstrukcji rozwiązań, wykorzystuje w istotny sposób zwartość pewnych operatorów, w oryginalnym podejściu autorów operatorów całkowych związanych z funkcją Greena dla równań eliptycznych o stałych współczynnikach. Dzięki swej naturalności i sile, twierdzenie to jest niezmiernie użytecznym środkiem dowodowym również w zagadnieniach nieliniowych. Często w skrócie mówi się (O. A. Ładyżenska) o nim jako o metodzie, w której jednoznaczność implikuje istnienie, mając na myśli fakt, że wspólna ograniczoność w odpowiedniej normie rozwiązań $u = u_\lambda$ równania $\lambda\mathcal{T}(u) = u$ z operatorem zwartym $\mathcal{T}$ przy $\lambda \in [0, 1]$, pociąga istnienie punktu stałego dla $\lambda = 1$, tzn. rozwiązalność równania funkcyjnego $\mathcal{T}(u) = u$.

Twierdzenie to dało początej teorii stopnia topologicznego i dużej klasie twierdzeń o punktach stałych wykorzystujących pojęcia homotopijne. Teoria topologiczna jest z powodzeniem rozwijana obecnie, niekoniecznie w ścisłym związku z konkretnymi zagadnieniami analizy.

Dokładniejsze informacje o metodach wariacyjnych można znaleźć w artykule J. Serrina w [27, 507–524].

Prawdziwą rewolucją było jednak wprowadzenie pojęcia *słabego rozwiązania*, motywowanego właśnie podejściem wariacyjnym do równań cząstkowych. Słabe rozwiązania jest stosunkowo łatwo znaleźć używając metod analizy funkcjonalnej w „dużych" przestrzeniach, a trudniej pokazać ich jednoznaczność i regularność. Pionierami tej teorii byli J. Leray i S. L. Sobolew. Ten pierwszy zaatakował w taki sposób nietrywialne zagadnienie nieliniowe — układ Naviera–Stokesa (1933–34). Od tego momentu, układ Naviera–Stokesa jest bardzo często kamieniem probierczym nowych pomysłów w równaniach cząstkowych, por. [21].

Systematyczne podejście funkcjonalne przy użyciu słabych rozwiązań do innych zagadnień nieliniowych dla równań różniczkowych cząstkowych przedstawił Jacques-Louis Lions w monografii [24]. Wokół osoby jej autora powstała w ostatnich trzydziestu latach francuska szkoła zastosowań matematyki do zagadnień nieliniowych. Stworzyła ona pewne standardy w *„mathématiques appliquées"*, do której we Francji zalicza się właśnie równania nieliniowe, rezerwując miejsce dla równań różniczkowych cząstkowych liniowych w *„mathématiques pures"*. Podział ten jest oczywiście często umowny, a na pewno nieostry. Zwracał uwagę na to sam J.-L. Lions, klasyfikując żartobliwie niektóre publikacje z analizy nieliniowej jako *niestosowalną matematykę stosowaną* (w oryginale: *„RANA"* $\equiv$ *recherche appliquée – non applicable*).

Moc oszacowań *a priori* i użyteczność słabych rozwiązań pokazały O. A. Ładyżenska i N. N. Uralcewa budując teorię istnienia, jednoznaczności i regularności dla ogólnych eliptycznych równań quasiliniowych (tzn. liniowych względem pochodnych najwyższego rzędu, tu: drugiego). Inne ważne idee dotyczące regularności rozwiązań równań eliptycznych i parabolicznych wynikają z prac J. F. Nasha, J. Mosera i E. De Giorgiego.

Metody wariacyjne (wraz ze spektralnymi, tj. metodą momentów Faedo–Galërkina) okazały się niezwykle przydatne do praktycznego (w tym numerycznego) rozwiązywania nie tylko zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych, ale również zagadnień ewolucyjnych dla równań typu hiperbolicznego (jak np. równanie falowe) i typu parabolicznego (jak np. równanie przewodnictwa cieplnego czy równania typu Fokkera–Plancka). Z kolei metoda różnic skończonych — jedna z najprostszych używanych w analizie numerycznej — stała się też ważną metodą teoretycznych badań w równaniach cząstkowych, np. w pracach L. Lusternika, A. N. Tichonowa i późniejszych.

Użycie metod sensu stricto wariacyjnych (tzw. bezpośrednich metod rachunku wariacyjnego) dało narzędzia do badania wielu zagadnień dla równań i układów równań eliptycznych (w tym nieliniowych) pochodzenia geometrycznego jak równanie powierzchni minimalnych czy odwzorowania harmoniczne i ich uogólnienia (np. układy z energią typu Ginzburga–Landaua).

Szerzej o tym pisze E. Bombieri w [27, 525–535] oraz H. Brezis w fascynującym eseju [5]. Tamże znajdziemy zaskakujące wyniki o strukturze topologicznej przestrzeni odwzorowań o ustalonej regularności między rozmaitościami różniczkowymi i związki teorii osobliwości takich odwzorowań z topologią.

Inne aspekty geometryczne (geometryczne równania ewolucyjne i asymptotyka jądra ciepła na rozmaitościach) omawiają G. Huisken w [30, 593–604] oraz J. Jorgenson i S. Lang w [30, 655–683].

Wokół dwudziestego trzeciego problemu Hilberta rozwinęły się też inne uogólnienia metod wariacyjnych takie jak teoria operatorów monotonicznych, nierówności wariacyjne (i quasiwariacyjne) stanowiące język wielu zastosowań w teorii sterowania optymalnego czy w zagadnieniach ze swobodnym brzegiem. Pisał o tym m.in. Guido Stampacchia w [27, 611–628] oraz Luis Caffarelli w [29, 7–13] omawiając przede wszystkim metody monotoniczności związane z konstrukcją nad- i podrozwiązań. Również w rachunku wariacyjnym tkwią źródła teorii wielowartościowych operatorów akretywnych, stworzonej przez m.in. G. Minty'ego i H. Brezisa, a zastosowanej np. do badania mocno nieliniowych równań ewolucyjnych przez Ph. Bénilana. Jeszcze inne aspekty rozwoju rachunku wariacyjnego są poruszone w artykule F. H. Clarke'a w [15, 313–328].

Aczkolwiek metody wariacyjne stosują się nie do wszystkich zagadnień (wymagana jest specjalna struktura równania i warunków dodatkowych nałożonych na rozwiązanie), to zdecydowaną większość problemów motywowanych fizyką można sformułować w postaci wariacyjnej, a zatem mogą one być badane takimi metodami. Dostrzeżenie dodatkowych własności wariacyjnych badanych zagadnień pozwala na skojarzenie pomysłów z innych dziedzin, tak jak to jest w szybko rozwijającej się obecnie teorii metod entropijnych (pochodzących z analizy równań kinetycznych, por. dalej uwagi o równaniu Boltzmanna) dla badania asymptotyki rozwiązań zagadnień z dysypacją, por. [1]. Jak się wydaje, można na tej drodze spodziewać się wielu nowych interesujących rezultatów z jakościowej analizy rozwiązań właśnie dla (mocno nieliniowych) zagadnień eliptycznych natury geometrycznej i dla zagadnień dopuszczających funkcjonały entropii.

Teoria potencjału i związki z teorią prawdopodobieństwa. Konstrukcje teoriomiarowe służące do badania zagadnienia Dirichleta dla funkcji harmonicznych (1), które pojawiły się najwcześniej w pracach H. Poincarégo (1890) i O. Perrona (1923), por. [22], znalazły swoje rozwinięcie w teorii potencjału leżącej na styku równań różniczkowych cząstkowych, teorii miary i analizy funkcjonalnej. Wyrafinowane wyniki dotyczące rozwiązalności zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych w obszarach o brzegach spełniających (tylko) warunek Lipschitza otrzymali w latach osiemdziesiątych XX wieku D. Jerison i C. E. Kenig.

Kluczowa dla równań różniczkowych drugiego rzędu, typu eliptycznego lub parabolicznego własność dodatniości rozwiązań dla dodatnich danych pozwala na zauważenie analogii z teorią prawdopodobieństwa oraz związanie równań z procesami stochastycznymi (P. Lévy, S. Kakutani, W. Feller, J. L. Doob, E. B. Dynkin, D. W. Stroock, N. W. Kryłow). Dzięki probabilistycznemu spojrzeniu na równania cząstkowe udaje się zapisać rozwiązania zagadnień brzegowych w postaci specjalnych funkcjonałów zdefiniowanych dla procesów dyfuzji. W teorii półgrup Schrödingera znajdujących zastosowania w mechanice kwantowej ważną rolę grają idee związane ze wzorem Feynmana–Kaca, por. [37, Th. X.68].

Teoria stochastycznych równań różniczkowych cząstkowych osiągnęła już pewien stan dojrzałości i obecnie matematycy atakują z coraz większym powodzeniem zagadnienia jakościowego opisu rozwiązań dla problemów pochodzenia fizycznego i geometrycznego, por. esej D. W. Stroocka w [30, 1105–1113].

Układ Naviera–Stokesa. Równania ruchu cieczy nieściśliwej mają następującą postać

$$u_t - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u = f, \quad \nabla\cdot u = 0, \quad u = 0 \ \text{ na } \partial\Omega, \tag{2}$$

gdzie $u = (u_1, \ldots, u_d)$ jest polem prędkości określonym dla $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ oraz $t > 0$, $\nu > 0$ jest współczynnikiem lepkości cieczy, a f opisuje siły zewnętrzne. Najbardziej interesujący z punktu widzenia zastosowań jest przypadek trójwymiarowy $d = 3$. Jest on też najbardziej intrygujący matematycznie z powodu trudności i całego szeregu otwartych zagadnień. Na układzie Naviera–Stokesa testowane są nowe metody matematyczne jak np. koncepcja słabych rozwiązań Leraya–Hopfa–Ładyżenskiej rozwijana w [23], podejście półgrupowe Kato–Fujity, metody aproksymacji (J.-L. Lions, R. Temam, por. [41]), spojrzenie w duchu układów dynamicznych (C. Foias, R. Temam, G. Sell). Szczególnie uniwersalna okazuje się metoda pochodząca od Kato zastąpienia nieliniowego układu Naviera–Stokesa przez równanie całkowe (tzw. formułę Duhamela) otrzymane ze wzoru wyrażającego rozwiązanie równania niejednorodnego (wariacja parametrów):

$$u(t) = e^{t\Delta}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\,ds - \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}(u\otimes u)(s)\,ds, \tag{3}$$

gdzie $e^{t\Delta}$ oznacza półgrupę generowaną przez operator Stokesa Δ na zbiorze bezdywergencyjnych pól wektorowych $\{u : \nabla\cdot u = 0\}$, a w przekształceniach wyrazu całkowego wykorzystano właśnie warunek nieściśliwości $\nabla\cdot u = 0$. Takie podejście, redukujące ewolucyjne równanie cząstkowe do równania zwyczajnego w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, daje nieco inne niż teoria rozwiązań słabych podejście do wielu nieliniowych zagadnień ewolucyjnych, por. [8], [21].

Kluczowa dla fizyki jest kwestia zrozumienia asymptotyki rozwiązań układu Naviera–Stokesa dla dużych czasów ($t \to \infty$), co pozwoliłoby opisać zjawisko turbulencji, por. np. artykuły P. Constantina w [30, 353–360], D. Ruelle'a w [28, 141–154], A. Majdy w [29, 351–394] i R. Temama w [15, 1049–1106]. W szczególności, interesujące jest zbadanie zachowania się rozwiązań przy $\nu \to 0$ i porównanie ich z rozwiązaniami układu Eulera cieczy nielepkiej (tj. gdy $\nu = 0$). Warto przy tym wspomnieć, że sam układ Eulera (konserwatywny, bo całkowita energia jest zachowywana) był i jest obiektem intensywnych badań, począwszy od pionierskiej publikacji [43] z 1933 roku Witolda Wolibnera aż do czasów współczesnych.

Nieskończenie wymiarowe układy dynamiczne. W teorii tej próbuje się opisać asymptotykę ważnych dla zastosowań (w fizyce czy biologii) równań, z których najprostsze mają postać

$$u_t - Au = F(u),$$

gdzie A jest operatorem eliptycznym (np. Δ), a F nieliniowością. Używa się do tego pojęcia globalnego atraktora, czyli zbioru przyciągającego wszystkie (lub większość) rozwiązań układu dynamicznego, i bada jego wielkość (zwartość, wymiar) i strukturę (rozwiązania stacjonarne, okresowe w czasie, quasiokresowe, ...). Fundamentalne jest tu zrozumienie, jakie efekty przynosi oddziaływanie wyrazów dysypatywnych Au i nieliniowych $F(u)$.

Mimo znacznych osiągnięć i przebadania ogromnej ilości istotnych dla zastosowań równań, pozostają tu intrygujące i trudne problemy, choćby te związane z układem równań Naviera–Stokesa (hydrodynamiki cieczy nieściśliwej) z siłami zewnętrznymi w trzech wymiarach przestrzennych, por. [21]. Inny ogólny problem polega na zrozumieniu efektów słabej dysypacji (słabszej niż w przypadku eliptycznego operatora A) — nie gwarantującej na ogół zwartości globalnych atraktorów.

Wśród sporej liczby monografii poświęconych tym problemom książka Rogera Temama [40] jest jedną z najistotniejszych. Wypada także wymienić monografie J. K. Hale'a, A. V. Babina i M. I. Vishika oraz J. W. Cholewy i T. Dłotki [9].

W tym miejscu pragnę wspomnieć o zagadnieniu, które z powodzeniem badane jest przy użyciu tak metod geometrycznych (bliskich układom dynamicznym), jak i metod czysto analitycznych (związanych z różnymi podstawieniami funkcyjnymi, a prowadzącymi do badania specjalnych rozwiązań automorficznych, tzn. niezmienniczych na pewne przekształcenia). Problemem tym jest badanie rozwiązań nieliniowych równań ewolucyjnych eksplodujących w skończonym czasie. Zjawisko to (zwane po angielsku *„blow up”*) polega na ucieczce rozwiązań $u(t)$ przy $t \nearrow T$ z pewnym $T < \infty$, z przestrzeni, w której skonstruowano rozwiązania lokalne w czasie. Wtedy $u(t)$

wybucha w chwili T, i nawet gdy uda się je w jakiś sposób przedłużyć dla $t > T$, to i tak w trakcie ewolucji pozostaje osobliwość rozwiązania dla $t = T$.

Pionierskie dla tego kierunku były prace Y. Gigi i R. V. Kohna z lat osiemdziesiątych XX wieku poświęcone nieliniowym równaniom parabolicznym typu

$$u_t = \Delta u + u^p. \tag{4}$$

Pokazali oni, że przy pewnych założeniach na wykładnik p, wymiar przestrzeni i wielkość danych początkowych, zjawisko wybuchu zachodzi, a sama eksplozja pojawia się w sposób asymptotycznie automorficzny: $\lim_{t \nearrow T}(T - t)^{1/(p-1)} u(x,t) = \mathrm{const} > 0$, lokalnie jednostajnie względem $x(T-t)^{-1/2}$.

Obecnie przebadano wiele równań, których rozwiązania mogą eksplodować i w inny sposób, np. równania konwekcji-dyfuzji $u_t - \Delta u = a \cdot \nabla f(u)$, czy (lepkie) równanie Hamiltona–Jacobiego $u_t - \Delta u = |\nabla u|^q$. Mimo tego istnieje jeszcze sporo problemów, dla których nie potrafimy scharakteryzować sposobu w jaki wybuchają rozwiązania, por. np. [8]. Nie wiadomo też czy rozwiązania układu Naviera–Stokesa w trzech wymiarach mogą wybuchać, a jeżeli tak — to w jaki sposób.

Kinetyczne równanie Boltzmanna. W 1872 roku Ludwig Boltzmann zaproponował do opisu ewolucji w czasie gęstości gazu $f = f(x, v, t) \geqslant 0$ następujące równanie

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f = Q(f, f),$$

gdzie zmienne niezależne x, $v \in \mathbb{R}^d$ opisują położenia i prędkości, $t \geqslant 0$, F jest gęstością sił zewnętrznych, a Q — funkcjonałem kwadratowym, w którym występuje całkowanie względem prędkości v, opisującym zderzenia par cząsteczek gazu. Wyprowadzenie tego równania korzysta, oprócz zasad mechaniki klasycznej układów punktów materialnych, z założenia o „molekularnym chaosie” pozwalającym napisać konkretną postać całki zderzeń $Q(f, f)$. Założenie to w subtelny sposób wiąże się z nieodwracalnością w czasie ewolucji gęstości f, co wyrazić można faktem malenia w czasie funkcjonału (neg)entropii (słynne H-twierdzenie Boltzmanna)

$$H(t) = \iint f(x, v, t) \log f(x, v, t)\, dx\, dv.$$

Istota matematycznego problemu nieodwracalności tkwi, jak się wydaje, w przejściu granicznym od skończonych do nieskończonych układów cząstek.

Powyższy statystyczny model gazu jest prosty, ale badanie jego rozwiązań jest niezmiernie trudne. Mimo wysiłków czołowych matematyków i fizyków (D. Hilbert, T. Carleman, S. Chapman, H. Grad, C. Cercignani, ...)

i zrozumienia niektórych własności regularnych rozwiązań równania Boltzmanna, nie udawało się przez ponad sto lat udowodnić, że zagadnienie początkowe dlań jest dobrze postawione (tzn. ma jedyne rozwiązanie zależne w sposób ciągły od danych początkowych). Dopiero w latach osiemdziesiątych XX wieku Ronald J. DiPerna i Pierre-Louis Lions zdołali udowodnić istnienie globalnych w czasie rozwiązań równania Boltzmanna, por. [32]. Zastosowali przy tym metodę renormalizacji polegającą na tym, że równanie sprowadza się do takiej postaci, w której prawa strona ma sens dla funkcji f jedynie całkowalnych na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (na ogół iloczyn funkcji z L^1 nie jest całkowalny, i stąd wynikają trudności w poszukiwaniu rozwiązań $f \in L^1$, co jest fizycznie naturalnym założeniem). Oryginalne podejście R. DiPerny i P.-L. Lionsa opierało się na metodach monotoniczności (konstrukcje nad- i podrozwiązań). Później część argumentów została uproszczona przy użyciu całkowych operatorów Fouriera, a więc niebanalnych narzędzi analizy harmonicznej.

Techniki wypracowane przy okazji badania równania Boltzmanna okazały się niezmiernie przydatne w analizie równań hiperbolicznych pierwszego rzędu opisujących prawa zachowania, a także w teorii sterowania.

P.-L. Lions został nagrodzony w 1994 roku medalem Fieldsa za wybitny wkład w wiele działów teorii równań różniczkowych cząstkowych a wyniki dla równania Boltzmanna były w jego dorobku jednymi z najważniejszych.

W ostatnich latach XX wieku nastąpił ogromny postęp w analizie równań kinetycznych typu Własowa, Własowa–Poissona, Maxwella–Własowa, Fokkera–Plancka itd. Do badania asymptotyki rozwiązań (w tym określenia stanów równowagowych i szybkości zbieżności dowolnych rozwiązań do takich stanów) używane są metody skalowania czaso-przestrzennego i analiza funkcjonałów entropii wraz z subtelnymi nierównościami funkcyjnymi typu logarytmicznej nierówności Sobolewa, por. [1] i prace szkoły francuskiej: J. Dolbeault, C. Villaniego i innych.

Na styku teorii kinetycznej i hydrodynamicznej pojawiały się od dawna modele, w których pochodne cząstkowe występują w sposób „nieklasyczny”, np. w nieskończonych układach równań czy łącznie z operatorami całkowymi. Służą one do opisu różnych zjawisk w mechanice ośrodków ciągłych: koagulacji cząsteczek, fragmentacji (np. łańcuchów polimerów), ewolucji cząstek oddziaływujących ze sobą elektrycznie lub grawitacyjnie (równania typu samouzgodnionego pola). Modele te pochodzą od takich fizyków jak M. Smoluchowski, M. Planck czy P. Debye. Problemy związane z tego typu równaniami prowadzą do interesujących wyników jakościowych dotyczących asymptotyki rozwiązań, por. np. artykuł [44].

Wydaje się, że zagadnienia związane z równaniami kinetycznymi, asymptotyką ich rozwiązań i przejściem do granicy hydrodynamicznej jeszcze długo będą w centrum badań nad równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Również fizycznie motywowane zagadnienia brzegowe dla klasycznego równania Boltzmanna w obszarach ograniczonych nadal czekają na pełną analizę.

Układy praw zachowania. Równania różniczkowe cząstkowe postaci $\mathrm{div}_{x,t} F = G$ wyrażają bilans zmian pewnej wielkości fizycznej F w sytuacji, gdy G określa produkcję tejże wielkości. Na przykład: mogą to być prawa zachowania masy, pędu i energii dla poruszającej się cieczy. Tak ogólne sformułowanie pozwala uzyskać, jako przykłady układów praw zachowania, równania dynamiki gazów, elektromagnetyzmu, (magneto)hydrodynamiki, (termo)sprężystości, teorii spalania i wiele innych.

Do początku XX wieku prawa zachowania pojawiały się przede wszystkim w teorii gazów i były badane m.in. przez B. Riemanna, H. Hugoniota i J. W. S. Rayleigha. Istotny postęp w matematycznej teorii praw zachowania nastąpił od lat pięćdziesiątych XX wieku dzięki pracom Eberharda Hopfa, Olgi Olejnik, Izraela Gelfanda, Petera Laxa. Główne wyniki dotyczą pojedynczych równań (nie układów), lub zagadnień słabo nieliniowych, lub układów z jedną zmienną przestrzenną x, np. $u_t + f(u)_x = 0$ uogólniające najprostsze (nielepkie) równanie Burgersa $u_t + uu_x = 0$.

Najczęściej spotykana jest sytuacja gdy nie można liczyć na istnienie rozwiązań klasycznych (gładkich) z uwagi na spodziewane osobliwości w miejscach przecinania się charakterystyk, a rozwiązania słabe nie są jednoznaczne. Konieczne są wtedy dodatkowe własności i kryteria doboru fizycznie wyróżnionych słabych rozwiązań, np. wyrażające się przez odpowiednie funkcjonały entropii.

Ogromna ilość problemów związanych z równaniami i układami w wielu wymiarach, uzupełnionymi niekoniecznie małymi warunkami początkowymi, czeka nadal na rozwiązanie, por. artykuł Denisa Serre'a w [30, 1061–1080].

Oprócz zasadniczych kwestii jak dobre postawienie (w sensie Hadamarda) zagadnienia Cauchy'ego dla równań magnetohydrodynamiki pozostają otwarte problemy opisu rozwiązań typu biegnącej fali $u(x,t) = U(x + vt)$ i ich (lokalnej) stabilności dla ogólnych układów praw zachowania. Listę tego typu pytań i obszerną bibliografię znajdziemy w przeglądowym artykule D. Serre'a wspomnianym powyżej. Dość ściśle wiążą się z tą tematyką zagadnienia dla układów reakcji-dyfuzji, w których występują jednak dodatkowo wyrazy dysypacyjne, por. [38]. Natomiast o pewnej metodzie konstrukcji rozwiązań lepkościowych, używanych także w teorii układów praw zachowania, można przeczytać w [7].

Inne podejście do modelowania ośrodków ciągłych (wraz z problemami) możemy znaleźć w przeglądach S. S. Antmana w [30, 1–21] i Weinana E w [30, 409–432].

Nieliniowe równania falowe. Jednym z najbardziej intrygujących odkryć w XX wieku było stwierdzenie, że równanie Kortewega–de Vriesa (KdV — zaproponowane w 1895 roku jako model rozchodzenia się fal w kanale)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{5}$$

jest nieskończenie wymiarowym układem hamiltonowskim, i to całkowalnym. Wielu matematyków (m.in. M. Kruskal i jego współpracownicy, P. D. Lax, V. E. Zakharov, L. D. Faddeev) znajdowało takie zadziwiające własności równania KdV, jak np. istnienie nieskończenie wielu całek pierwszych, związki z liniowymi operatorami Schrödingera, istnienie solitonów, czyli rozwiązań falowych poruszających i oddziaływujących ze sobą bez zmiany kształtu fali. Odkrycia te pozwoliły na wyjaśnienie zaskakujących wyników eksperymentów numerycznych dla układu oddziaływujących nieliniowych oscylatorów, którymi zajmowali się z pomocą pierwszych komputerów E. Fermi, J. R. Pasta i S. Ulam (zaobserwowali oni brak stochastycznego zachowania się układu). Przypadek równania KdV pokazuje, że ważne fizycznie istotnie nieliniowe modele mogą zachowywać się w pewnym sensie podobnie jak modele liniowe, dla których zachodzi zasada superpozycji rozwiązań. Z drugiej strony, równanie KdV spowodowało żywe zainteresowanie analityków badaniem własności ogólnych równań dyspersyjnych, tzn. takich, w których efekty falowe opisane są operatorami antysymetrycznymi (ogólniejszymi niż $\partial^3/\partial x^3$) i nieliniowościami typu $f(u)_x$. Okazało się, że w badaniach tych przydatne są subtelne narzędzia analizy harmonicznej takie jak np. całki oscylujące. Wyniki otrzymane m.in. przez J. Bonę, C. E. Keniga, G. Ponce'a, J.-C. Saut, L. Vegę oraz J. Bourgaina, pokazują jak ściśle związane są ze sobą własności regularności i przestrzennej asymptotyki, por. [3].

Inna ważna klasa problemów falowych obejmuje, motywowane relatywistyczną mechaniką kwantową, równania typu

$$u_{tt} - \Delta u = F(u). \tag{6}$$

Dla potęgowych nieliniowości F wiadomo już bardzo wiele o istnieniu i asymptotyce rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dzięki pracom m.in. J. Ginibre'a i G. Velo oraz M. Struwe.

Ogólna teoria operatorów różniczkowych z pochodnymi cząstkowymi. Idea badania rozwiązań słabych w przestrzeniach funkcji, których pochodne spełniaję warunki całkowalności, doprowadziło z jednej strony do burzliwego rozwoju teorii przestrzeni funkcyjnych typu Sobolewa (i ogólniejszych: Besowa, Triebela, Lizorkina, ...) badanych przy użyciu nowych nierówności funkcyjnych. Z drugiej strony, w latach 1945–1950 Laurent Schwartz stworzył elegancką teorię dystrybucji, która natychmiast stała się mocnym narzędziem do badania ogólnych operatorów różniczkowych z pochodnymi cząstkowymi.

W przeciwieństwie do teorii liniowych operatorów różniczkowych zwyczajnych, dla operatorów liniowych z pochodnymi cząstkowymi nie może być za wiele bardzo ogólnych (tj. nie uwzględniających struktury współczynników) wyników o lokalnej rozwiązalności równań.

I tak, jeżeli $L = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha$ jest operatorem o stałych współczynnikach, to równanie $Lu = F$ ma zawsze lokalne rozwiązanie, co udowodnili w latach pięćdziesiątych XX wieku B. Malgrange, L. Ehrenpreis i S. Łojasiewicz rozwiązując problem dzielenia dystrybucji. Natomiast już w przypadku zmiennych współczynników H. Lewy podał w 1957 roku przykład równania (o współczynnikach zespolonych) nie posiadającego rozwiązań. Przykład ten uproszczony został przez Garabediana i Gruszyna: jeżeli równanie $u_x + ixu_y = F(x, y)$ ma rozwiązanie, to u jest funkcją analityczną, a zatem dla F nieanalitycznych rozwiązania u nie mogą istnieć.

Od tego czasu teoria operatorów liniowych ogromnie rozwinęła się. Pewnym podsumowaniem stanu wiedzy na początku lat osiemdziesiątych XX wieku jest czterotomowa monografia L. Hörmandera [19], w której w systematyczny sposób, używając narzędzi analizy funkcjonalnej (teorii dystrybucji) i harmonicznej (transformata i całkowe operatory Fouriera), badane są operatory różniczkowe i pseudoróżniczkowe.

Ważną klasę tworzą operatory typu Hörmandera $L = X_1^2 + \ldots + X_m^2$, gdzie pola wektorowe $X_1, \ldots, X_m$ spełniają pewne warunki geometryczne wyrażone w terminach komutatorów. Operatory takie w naturalny sposób pojawiają się w wielu zagadnieniach geometrii różniczkowej, analizy harmonicznej na grupach Liego i przestrzeniach symetrycznych, a także w teorii prawdopodobieństwa, i dlatego są intensywnie badane.

W ostatnich latach na styku analizy harmonicznej, teorii przestrzeni funkcyjnych i równań różniczkowych powstała teoria falek („*wavelets*”), w której stworzenie wielki wkład mieli Y. Meyer, R. Coifman i I. Daubechies, a motywacje z teorii równań różniczkowych są wyraźnie widoczne choćby we wpływie prac J. - M. Bony'ego i M. E. Taylora, por. artykuł S. Jaffarda w [15, 609–634].

Spośród operatorów różniczkowych, dla których zagadnienie Cauchy'ego jest dobrze postawione ważną rolę grają operatory hiperboliczne, ogólniejsze niż operator (d'Alembertian) z równania falowego $\partial^2/\partial t^2 - \Delta$.

Na początku XX wieku J. Hadamard prowadził badania równań hiperbolicznych drugiego rzędu uwieńczone w 1932 roku monografią, w której zdefiniował pojęcia zagadnienia dobrze postawionego. W późniejszych latach wiele wyników uzyskał I. G. Pietrowski badając m.in. równania hiperboliczne wyższych rzędów i wprowadzając pojęcie lakuny (1937–1945), które dało początek współczesnej teorii osobliwości.

Następne ważne etapy rozwoju teorii wiążą się z pracami K. O. Friedrichsa (1954–58) o układach symetrycznych i metodach energetycznych, metodach numerycznych (wraz z R. Courantem i H. Lewym), oraz A. Calderóna używającymi operatorów z całkami osobliwymi (1962). Te ostatnie prace otworzyły drogę do szerszego stosowania metod analizy harmonicznej. W ostatnich latach istotne wyniki o równaniach hiperbolicznych pojawiających się w teorii względności uzyskał S. Klainerman.

Rozwijana jest teoria mikrolokalna, w której analizę rozwiązań prowadzi się równocześnie w zmiennych czasowo-przestrzennych (t, x) i dualnych — dla transformat Fouriera względem x, patrz artykuł J. Sjöstranda w [15, 967–991]. Ma to ścisłe związki z zasadą nieoznaczoności Heisenberga w fizyce kwantowej.

Mechanika kwantowa i równania różniczkowe. Teoria kwantowa przyczyniła się do ogromnego postępu w matematyce, choćby w analizie funkcjonalnej, teorii reprezentacji grup, czy równaniach różniczkowych. Pisze o tym A. Wightman w [27, 159–232]. Pragnąłbym tu zasygnalizować inne niż w powyższym przeglądzie aspekty mechaniki kwantowej związane z rozwojem teorii spektralnej i asymptotycznej teorii równań różniczkowych. Chodzi przykładowo o badanie wartości i funkcji własnych operatorów Schrödingera typu $Lu = -\hbar^2\Delta u + Vu$, gdzie $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jest potencjałem. Badania te były zapoczątkowane twierdzeniem H. Weyla z 1910 roku (i uzupełnionym przez L. Hörmandera w 1968 roku). Dla operatorów ze stałą Plancka $\hbar$ traktowaną jako małym parametr, $\hbar \to 0$, ostatnio głębokie wyniki uzyskali m.in. B. Helffer i J. Sjöstrand. Nie można też zapominać o subtelnych rezultatach B. Simona i E. B. Daviesa dotyczących półgrup Schrödingera $e^{t(\Delta+V)}$, por. też [37].

Metody wariacyjne w teorii kwantowej stosuje się zaś do badania zagadnienia stabilności materii (E. H. Lieb) i, ogólniej, do badania wiązań międzycząsteczkowych (chemia kwantowa). Znaczące wyniki osiągnął tu P. - L. Lions ze współpracownikami (teorie Hartree–Focka dla lekkich atomów i Thomasa–Fermiego dla ciężkich atomów), por. też artykuł Ch. Feffermana w [29, 27–36] i [32].

Biologia matematyczna. Równania różniczkowe były stosowane do opisu zjawisk biologicznych od co najmniej czasów Th. Malthusa i jego modelu wykładniczego wzrostu populacji. Bardziej realistyczny model logistyczny, pochodzący od Verhulsta, nadal oparty jest o równania zwyczajne, ale już uwzględnienie dyfuzji prowadzi do równań dla gęstości populacji N

$$N_t = DN_{xx} + f(N) \tag{7}$$

badanych około roku 1937 przez A. N. Kołmogorowa, I. G. Pietrowskiego i N. S. Piskunowa. Rozważali oni m.in. rozwiązania typu biegnącej fali postaci $N(x + vt)$ z warunkami brzegowymi $N(-\infty) = 0$, $N(+\infty) = K =$

const. Interpretację probabilistyczną tego równania podał w 1975 roku H. P. McKean.

Układy nieliniowych równań parabolicznych pojawiają się jako modele współzawodnictwa drapieżnik–ofiara po uwzględnieniu efektów migracji, czyli po dodaniu wyrazów dyfuzyjnych do układów równań zwyczajnych typu Lotki–Volterry.

Współcześnie, ilość modeli opisanych równaniami różniczkowymi w biologii rośnie lawinowo. Istnieje nawet specjalne czasopismo *Journal of Mathematical Biology*. Modele te są używane w bardzo różnych kontekstach, por. Ch. S. Peskin w [29, 395–415].

Spośród najbardziej intrygujących, o niezmiernie interesującej strukturze rozwiązań, wyróżniają się modele chemotaksji Keller–Segela (czyli ruchu mikroorganizmów u ukierunkowanego przez substancję v wydzielaną przez nie same) typu

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla \cdot (\nabla u - \chi(u)\nabla v)\,, \\ v_t &= \varepsilon\Delta v - v + u. \end{aligned} \tag{8}$$

Matematyków interesują tu kwestie globalnego w czasie istnienia rozwiązań i możliwość eksplozji rozwiązań w skończonym czasie. W ostatnich latach M. A. Herrero i J. J. L. Velázquez skonstruowali dla $\chi(u) \equiv u$ (trudne!) przykłady rozwiązań wybuchających w skończonym czasie.

W artykule C. K. R. T. Jonesa w [30, 631–645] przedstawione są poglądy na bardziej realistyczne sposoby modelowania matematycznego w biologii, wymagające nowego spojrzenia na układy dynamiczne opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi lub cząstkowymi, w warunkach niepełnej informacji.

W całej dziedzinie biologii matematycznej należy w najbliższym czasie spodziewać się szybkiego rozwoju modeli i metod badawczych.

Komputery i równania różniczkowe. Druga połowa XX wieku przyniosła rewolucję w analizie numerycznej równań różniczkowych. Komputery stały się narzędziem przeprowadzania eksperymentów numerycznych (czasami prowadzących do stawiania hipotez i formułowania twierdzeń), obliczania rozwiązań konkretnych zagadnień, wreszcie wspomagania dowodów twierdzeń matematycznych. Artykuły zamieszczone w [30], których autorami są I. Babuška, J. Tinsley Oden (23–28), B. Engquist, G. Golub (433–448), H. Langtanen, A. Tveito (809–825), A. Quarteroni (961–970), H. von Storch, J.-S. von Storch, P. Müller (1179–1194), dają dokładniejsze wyobrażenie o obliczeniach w meteorologii (równania opisujące oddziaływania oceanu i atmosfery), w modelowaniu ruchu samolotów i pojazdów kosmicznych (z pomocą równań kinetycznych), w biologii (modelowanie przepływów krwi), czy w chemii (również kwantowej). Wspomina się tam o takich narzędziach analizy numerycznej jak metoda elementu skończonego, metody ze zmiennym (adaptującym się) podziałem obszaru (*multigrid*) i algorytmy z elementami losowego wyboru (np. typu *Monte Carlo*). Większość z nich bez mocy obliczeniowej współczesnych komputerów byłaby bezużyteczna, bo ilość elementarnych obliczeń potrzebnych do ich stosowania przekracza możliwości człowieka dysponującego kartką papieru i ołówkiem. Z pomocą pakietów oprogramowania przeznaczonych do rozwiązywania konkretnych zagadnień można obecnie w minuty (jeśli nie w sekundy) obliczać to, co dawniej zajmowało lata (np. w astronomii).

Podsumowanie. Równania różniczkowe cząstkowe są rozwijane w bardzo wielu ośrodkach na świecie. Niewątpliwie do najważniejszych, zajmujących się głównie problemami nieliniowymi, należy Paryż (promieniujący na całą Francję, z widocznym oddziaływaniem na Włochy i Hiszpanię), w USA: Courant Institute w New York University, od niedawna Institute of Mathematics and Applications w Minnesocie, w Rosji: Moskwa i Sankt Petersburg. W Polsce silne grupy zajmujące się wyselekcjonowanymi powyżej aspektami równań cząstkowych działają w Katowicach, Krakowie, Łodzi, Warszawie, Wrocławiu.

Jak widać nawet z tak pobieżnego przeglądu, teoria i zastosowania równań różniczkowych cząstkowych rozwijają się w ogromnej ilości kierunków, przenikają inne dziedziny matematyczne i prowadzą do ważnych i nierzadko pięknych (również w znaczeniu: estetycznych) wyników.

Na zakończenie chciałbym zaznaczyć, że bibliografia nie pretenduje do pokazania wszystkich najważniejszych prac i monografii (bo jest to po prostu niemożliwe dla tak dynamicznie rozwijającej się dziedziny). Pragnąłem jedynie zasygnalizować ważne książki, które wyznaczyły pewne etapy rozwoju (np. [11], [12], [16], [19], [22], [23], [24], [25], [26], [37], [38], [39], [40], [41], [45]) i standardy dydaktyczne (np. współcześnie [17] i kompendium [13]). Na tym tle widać też, w jakim skromnym zakresie studenci kierunków matematycznych zapoznają się obecnie z klasycznymi fragmentami teorii równań różniczkowych cząstkowych, por. [42].

Literatura zawiera też referencje do niedawnych artykułów przeglądowych [3], [7], [8], [21], [32] i [44] z tej tematyki, oraz z historii równań różniczkowych w Polsce [32] zamieszczonych w *Wiadomościach Matematycznych*.

Miło mi w tym miejscu podziękować Grzegorzowi Karchowi, Andrzejowi Krzywickiemu, Tadeuszowi Nadziei, Andrzejowi Palczewskiemu, Andrzejowi Raczyńskiemu, Robertowi Stańczemu, Janowi (Jean-Marie) Strelcynowi i Dariuszowi Wrzoskowi za cenne uwagi.

Literatura

[1] A. Arnold, P. A. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, *On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker–Planck type equations*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), 43–100.

[2] W. I. Arnold, *O nauczaniu matematyki*, Wiadom. Mat. **37** (2001), 17–26.

[3] P. Biler, *Jean Bourgain*, Wiadom. Mat. **31** (1995), 87–91.

[4] P. Biler, T. Nadzieja, *Problems and Examples in Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[5] H. Brezis, *The interplay between analysis and topology in some nonlinear problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (2003), 179–201.

[6] H. Brezis, F. Browder, *Partial differential equations in the 20th century*, Adv. Math. **135** (1998), 76–144.

[7] K. Chełmiński, *Od metody Minty'ego–Browdera do teorii rozwiązań lepkościowych*, Wiadom. Mat. **36** (2000), 1–12.

[8] J. Cholewa, *Pewne nietypowe własności rozwiązań nieliniowych równań ewolucyjnych*, Wiadom. Mat. **38** (2002), 53–60.

[9] J. W. Cholewa, T. Dłotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[10] *Concerning the Hilbert 16th problem*, Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko, Eds., Transl. Amer. Math. Soc., Ser. 2, **165**, AMS, Providence, RI, 1995.

[11] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, *Partial Differential Equations*, Interscience, New York, 1962.

[12] C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, Berlin, 2000.

[13] R. Dautray, J.-L. Lions, éd., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1984–1985. Translation: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Springer, Berlin, 1990–1993.

[14] *Development of Mathematics 1900–1950*, J.-P. Pier, Ed., Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994.

[15] *Development of Mathematics 1950–2000*, J.-P. Pier, Ed., Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[16] P. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer, New York, 1984.

[17] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, RI, 1998. Przekład polski: *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa, 2002.

[18] A. R. Forsyth, *Theory of Differential Equations*, I–VI, Cambridge University Press, 1890–1906.

[19] L. Hörmander, *Analysis of Partial Differential Operators*, 1–4, Springer, Berlin, 1983–1985.

[20] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), 407–436 (reprint).

[21] G. Karch, *Szósty problem milenijny: istnienie i regularność rozwiązań układu Naviera–Stokesa*, Wiadom. Mat. **38** (2002), 121–130.

[22] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, J. Springer, Berlin, 1929.

[23] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, 2nd English ed., Gordon and Breach, New York, 1969.

[24] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[25] P.-L. L i o n s, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics I, II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, 1998.

[26] A. M a j d a, A. B e r t o z z i, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[27] *Mathematical Developments arising from Hilbert Problems*, F. E. B r o w d e r, Ed., Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.

[28] *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, F. E. B r o w d e r, Ed., Proc. Symp. Pure Math. **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[29] *Mathematics into the Twenty-first Century*, 1988 Centennial Symposium, F. E. Browder, Ed., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[30] *Mathematics Unlimited — 2001 and Beyond*, B. Engquist, W. Schmid, Eds., Springer, Berlin, 2001.

[31] *Opportunities for the Mathematical Sciences*, June 26–27, 2000; Workshop Report NSF.

[32] A. P a l c z e w s k i, *Pierre-Louis Lions*, Wiadom. Mat. **31** (1995), 91–94.

[33] A. P e l c z a r, *Równania różniczkowe w Polsce. Zarys historii do połowy lat siedemdziesiątych XX wieku*, Wiadom. Mat. **37** (2001), 63–118. Corrigenda et addenda: ibidem **38** (2002), 223–224.

[34] H. P o i n c a r é, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures Appl. **7** (1881), 375–422.

[35] H. P o i n c a r é, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1892–1899.

[36] *Problemy milenijne*, Wiadom. Mat. **38** (2002), 61–62.

[37] M. R e e d, B. S i m o n, *Methods of Modern Mathematical Physics*, 1–4, Academic Press, New York, 1972–1979.

[38] J. S m o l l e r, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer, New York, 1983.

[39] M. S t r u w e, *Variational Methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1996.

[40] R. T e m a m, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd edition, Springer, New York, 1997.

[41] R. T e m a m, *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[42] *Warsztaty z równań różniczkowych cząstkowych — Toruń, 12–22.11.2002*, (P. Biler *Równania falowe*, G. K a r c h *Równania paraboliczne*, T. Nadzieja *Równania eliptyczne*, D. W r z o s e k *Zagadnienia ewolucyjne*), Lecture Notes in Nonlinear Analysis 4, Centrum Badań Nieliniowych im. J. P. Schaudera, Toruń, 2003. Por. też: `http://www.math.uni.wroc.pl/torun`.

[43] W. W o l i b n e r, *Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long*, Math. Z. **37** (1933), 698–726.

[44] D. W r z o s e k, *Osobliwe własności rozwiązań równania Smoluchowskiego*, Wiadom. Mat. **35** (1999), 11–35.

[45] V. E. Z a k h a r o v, S. V. M a n a k o v, S. P. N o v i k o v, L. P. P i t a e v s k i i, *Teoria solitonov — metod obratnoi zadači*, Nauka, Moskva, 1980.