ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVI (2000)

Jan Stanisław Lipiński (Gdańsk)

Zygmunt Zahorski (1914–1998)

Zygmunt Zahorski urodził się 30 kwietnia 1914 roku we wsi Szubina położonej w pobliżu Kutna, w której jego ojciec był nauczycielem. Po siedmiu latach ojciec zmarł, pozostawiając żonę, syna i młodszą córkę bez środków do życia. Oszczędności przepadły wskutek dewaluacji, a skromną rentę wdowią matka otrzymała dopiero po siedmiu latach. Matka i dzieci korzystały z mieszkania i utrzymywały się przy pomocy jej rodziny. Nieznaczna poprawa nastąpiła, kiedy Zygmunt, cieszący się opinią najlepszego matematyka wśród uczniów gimnazjum im. Ks. Piotra Skargi w Pułtusku, zaczął zarabiać dając korepetycje.

W roku 1932 ukończył gimnazjum i zdał egzamin konkursowy na Wydział Mechaniczny Politechniki Warszawskiej, znalazłszy się wśród czterech wyróżnionych spośród 190 przyjętych. W czasie studiów borykał się stale z trudnymi warunkami materialnymi. W autobiografii [31], obejmującej jego życie aż do lat osiemdziesiątych, opisane są ciężkie przeżycia dwóch pierwszych lat studiów: brak pieniędzy na żywność, zagrożenie skreśleniem z listy studentów z powodu nieopłacenia czesnego, trudności z zamieszkaniem w bursie studenckiej doprowadzające nawet do czasowego korzystania z noclegowni dla bezdomnych. Sytuacja poprawiła się w roku 1934 po przyznaniu mu stypendium miejskiego. Wtedy rozpoczął studia na kierunku matematycznym Uniwersytetu Warszawskiego, nie rezygnując początkowo z Politechniki.

Tytuł magistra otrzymał w roku 1938, ale już rok wcześniej, za poparciem A. Wundheilera, który znał Zahorskiero jako wyróżniającego się studenta Politechniki, został asystentem w Szkole Podchorążych Lotnictwa. W dniu wybuchu wojny, 1 września 1939 roku, miał już opublikowaną pracę [1] oraz napisaną, przetłumaczoną na francuski i wysłaną do *Bulletin de la Societé Mathématique de France* rozprawę doktorską, a także wezwanie do Szkoły Podchorążych Piechoty na październik. Obrona pracy doktorskiej, której promotorem miał być prof. Mazurkiewicz, była wyznaczona na wrzesień. Wojna przerwała te plany.

Zahorski na wezwanie radiowe, by mężczyźni opuścili Warszawę, udali się na wschód i zgłosili do wojska, wyjechał do Siedlec i zgłosił w jednostce wojskowej, jednak jako niewyszkolony nie został przyjęty. Wtedy z Siedlec udał się do Lwowa, już zajętego przez wojska sowieckie.

Na uniwersytecie lwowskim, przemianowanym wtedy na ukraiński, pracowało wówczas wielu matematyków. Byli wśród nich S. Banach, S. Mazur i inni, a także uchodźcy z różnych miast polskich, jak S. Saks, B. Knaster, E. Szpilrajn-Marczewski, W. Orlicz. Zahorski został asystentem Banacha, później aspirantem. Banach zgodził się przyjąć jako doktorską pracę napisaną w Warszawie u prof. Mazurkiewicza. Jej przedmiotem była charakteryzacja w terminach topologii i miary zbioru punktów nieróżniczkowalności funkcji rzeczywistej jednej zmiennej. Przetłumaczona na rosyjski została wysłana do redakcji *Matematiczeskiego Sbornika* i tam opublikowana [2]. Okazało się jednak, że uniwersytet nie miał wtedy uprawnień doktoryzowania i sprawa się odwlekła. Zahorski był bardzo aktywny w lwowskim środowisku matematycznym. Udowodnił wtedy wiele twierdzeń, wysyłał prace do druku. Banach, zapoznawszy się z nimi, zaproponował mu podjęcie się próby udowodnienia hipotezy Łuzina. że szereg trygonometryczny funkcji całkowalnej z kwadratem jest zbieżny prawie wszędzie. Temat ten stał się głównym przedmiotem badań Zahorskiego w następnych dziesięcioleciach.

W czerwcu 1941 Niemcy zaatakowali Związek Radziecki i zajęli Lwów. Zahorski znalazł się w bardzo trudnej sytuacji, nie tylko dlatego, że stracił pracę i został bez środków do życia. Wcześniej, w listopadzie 1940 roku, ożenił się z absolwentką matematyki Uniwersytetu Warszawskiego Esterą Steinbok, która towarzyszyła mu w tułaczce z Warszawy do Lwowa. Była zameldowana jako Żydówka. Stanowiło to zagrożenie utraty życia dla obojga małżonków. Dorywcze dochody z pokątnego handlu były tak nikłe, że w warunkach głodowych Zahorski zachorował na gruźlicę, a syn urodzony w sierpniu zmarł we wrześniu. W tej sytuacji, posługując się fałszywymi dokumentami żony, państwo Zahorscy powrócili do Warszawy.

Pani Zahorskiej udało się wyrobić dokumenty osobiste jako Polce, przedstawiając autentyczną metrykę urodzenia siostry męża Heleny jako swoją. Znajomy lekarz znalazł mężowi pracę w fabryce Philipsa, zatajając jego wykształcenie. Chroniła ona przed wywozem na roboty do Niemiec. Można było też korzystać ze stołówki fabrycznej, W czasach, gdy przydziały żywności kartkowej były głodowe, pomagało to przeżyć. Nie mogło jednak zapobiec dalszemu pogorszeniu zdrowia. W roku 1944 znalazł się w Szpitalu Dzieciątka Jezus przy ul. Nowogrodzkiej i tam zastał go wybuch powstania. Sam szpital, szybko zajęty przez Niemców, uniknął losu innych, które palono i których pacjentów mordowano.

Po powstaniu szpital oraz chorych i rannych z innych szpitali przeniesiono do Krakowa do Domu Medyka. Wolno było go opuszczać tylko za zgodą gestapo. Nie był jednak strzeżony. Zahorski skorzystał z tego, odszukał matematyków krakowskich i na tajnym zebraniu Polskiego Towarzystwa

Matematycznego przedstawił swoje prace napisane w czasie wojny. Działająca w podziemiu Polska Akademia Umiejętności udzieliła mu pomocy żywnościowej.

Po wyzwoleniu Krakowa wznowił jawną działalność Uniwersytet Jagielloński. Zahorski pracował na nim jako asystent od samego początku. W lutym 1945 roku zakończył przewód doktorski. Promotorem był prof. Ważewski. Temat pracy „O zbiorze punktów osobliwych funkcji mającej pochodne wszystkich rzędów" wskazuje na problematykę inną niż w rozprawie napisanej przed wojną w Warszawie. Dyplom doktora filozofii, bo taki tytuł nadawano wówczas wszystkim promowanym na wydziałach nauk ścisłych i przyrodniczych, został opatrzony zaszczytną adnotacją: *Summis Auspicis Serenissimae Reipublicae Polonorum.* Kolokwium habilitacyjne zdał w grudniu 1947 r. Władze uniwersytetu zatrudniły go jako zastępcę profesora i wystąpiły o nadanie mu tytułu profesora nadzwyczajnego. Nominację profesorską otrzymał w październiku 1948 roku, równocześnie z katedrą matematyki na Uniwersytecie Łódzkim. Rada Wydziału Mat. Fiz. Chem. tego uniwersytetu wystąpiła z wnioskiem o nadanie mu tytułu profesora zwyczajnego już w roku1954, ale prof. Zahorski wstrzymywał dalsze postępowanie w tej sprawie aż do roku 1960, kiedy to uzyskał bardzo ważny wynik w teorii szeregów trygonometrycznych. Nominacja nastąpiła tego samego roku.

W roku 1970 rozwiódł się, po czym ożenił z Janiną Śladkowską, docentem matematyki na Uniwersytecie Łódzkim, z którą następnie przeniósł się na Politechnikę Śląską. Na emeryturę przeszedł w roku 1984, nie zaprzestał jednak intensywnej pracy nad rozwiązaniem hipotezy Łuzina metodą swego pomysłu, która zdawała mu się prowadzić do rozwiązania. Zmarł 8 maja 1998 roku w Gliwicach.

Większość publikacji Zygmunta Zahorskiego to prace z funkcji rzeczywistych. Wiele spośród nich zawiera wyniki o dużym i trwałym znaczeniu, przede wszystkim poświęcone różniczkowalności, własnościom funkcji pochodnych i szeregom trygonometrycznym.

Już praca [1], z roku 1937, gdy Z. Zahorski był jeszcze studentem, poświęcona była istnieniu funkcji różniczkowalnej, monotonicznej, niestałej, mającej gęsty zbiór przedziałów stałości. Choć funkcję o takich własnościach skonstruował wcześniej S. Mazurkiewicz [46], przykład Zahorskiego był o wiele prostszy. Na trwałe weszło do literatury twierdzenie z pracy [8], napisanej pierwotnie jako rozprawa doktorska, opublikowanej też po rosyjsku [2], charakteryzujące w terminach teorii mnogości zbiory punktów nieróżniczkowalności funkcji ciągłych. Jej autor stwierdził, że zbiór taki jest zawsze postaci $A \cup B$, gdzie A jest zbiorem G_δ, a B zbiorem $G_{\delta\sigma}$ miary zero, i odwrotnie, dla każdego zbioru tej postaci istnieje funkcja ciągła, nieróżniczkowalna w i tylko w punktach tego zbioru. Opis taki pozostaje prawdziwy zarówno wtedy, gdy punkt, w którym istnieje pochodna nieskończona, uważać za punkt różniczkowalności, jak za punkt nieróżniczkowalności. A. Brudno [35] dowiódł, że charakteryzacja znaleziona przez Zahorskiego jest prawdziwa dla wszystkich funkcji rzeczywistych, a nie tylko dla ciągłych.

O zbiorze punktów, w których pochodna jest nieskończona, było wiadomo od dawna, że jest zbiorem G_δ i miary zero. V. Jarník [42] pokazał, że dla każdego zbioru E, który ma te dwie własności, istnieje funkcja ciągła, mająca w jego punktach pochodną nieskończoną i wszystkie pochodne Diniego w pozostałych punktach skończone. Równocześnie zapytał, czy można zażądać więcej, czy funkcja może być różniczkowalna poza zbiorem E. Zahorski w pracy [3] odpowiedział pozytywnie na to pytanie, otrzymując w ten sposób charakteryzację zbioru punktów, w których funkcja ciągła, mająca w każdym punkcie pochodną skończoną lub nieskończoną, ma pochodną nieskończoną.

W punkcie, w którym nie istnieje pochodna, a więc w takim, w którym nie wszystkie pochodne Diniego są równe, mogą zachodzić między nimi różne nierówności wyznaczające różne typy nieróżniczkowalności. W rozprawie habilitacyjnej Zahorskiego znajdujemy opisy zbiorów punktów, w których występuje nierózniczkowalność niektórych z tych typów. Są to warunki konieczne, dostateczne, a czasami oba równocześnie. Z twierdzeń tych wynikają różne wnioski, np. nie istnieje funkcja ciągła, której pochodne Diniego w pewnych punktach są wszystkie różne, a w pozostałych punktach przyjmują dokładnie trzy wartości. Praca ta nigdy nie została opublikowana w całości, jedynie jej streszczenie [11] ukazało się w dodatku do Roczników PTM.

Najbardziej znane i mające podstawowe znaczenie są klasyfikacje zbiorów i funkcji z pracy [22]. Posiadanie przez zbiory Lebesgue'a funkcji f, czyli zbiory postaci $\{x : f(x) > a\}$ i $\{x : f(x) < a\}$, pewnych własności, jest często warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by funkcja należała do pewnej klasy, np. otwartość tych zbiorów charakteryzuje funkcje ciągłe. Funkcji pochodnych, jak stwierdza jej autor na początku omawianej pracy, nie można tak prosto charakteryzować. Do teorio-mnogościowego opisu zbiorów Lebesgue'a tych funkcji trzeba dołączyć inne warunki. Pytanie „jakie?" pozostaje do dziś bez odpowiedzi. Ponieważ pochodna funkcji ciągłej jest funkcją pierwszej klasy Baire'a i ma własność Darboux, jej zbiory Lebesgue'a są zbiorami F_σ obustronnie w sobie gęstymi. Klasę zbiorów mających te obie własności Zahorski oznaczył przez M_1, a klasę funkcji, której wszystkie zbiory Lebesgue'a należą do M_1 – przez M_1. Pokrywa się ona z klasą funkcji o własności Darboux należących do pierwszej klasy Baire'a. Na mocy twierdzenia Denjoy [39] zbiory Lebesgue'a pochodnych funkcji ciągłych, jeżeli nie są puste, są miary dodatniej. Zahorski wzmocnił ten wynik. Nakładając na zbiory klasy M_1 coraz silniejsze warunki dotyczące gęstości średniej tych zbiorów na przedziałach zawartych w sąsiedztwach punktów tych zbiorów, zdefiniował dalsze, coraz węższe klasy M_i i związane z nimi klasy M_i, $i = 2, 3, \ldots, 5$, funkcji górnie i dolnie M_i-mierzalnych. Klasa M_5 okazała się klasą funkcji aproksymatywnie ciągłych, a klasa M_4 klasą zbiorów Lebesgue'a pochodnych ograniczonych. Zbiory Lebesgue'a pochodnych przyjmujących wartości skończone muszą należeć do M_3, a w przypadku, gdy pochodna funkcji ciągłej przyjmuje też wartości nieskończone, do M_2. Warunek konieczny, by dany zbiór był zbiorem Lebesgue'a pochodnej, znalazł niezależnie G. Choquet [38], okazało się jednak [45], że nie jest on warunkiem charakteryzującym te zbiory. Klasy M_i są dogodnym rozszerzeniem pewnych rodzin funkcji pochodnych. A. Bruckner poświęcił im jeden z rozdziałów swojej monografii [34]. Zajmuje się nimi wielu autorów.

W pracy [22] znajduje się też silne kryterium monotoniczności funkcji. Stanowi je koniunkcja trzech warunków:

1) własność Darboux badanej funkcji,

2) istnienie jej pochodnej poza zbiorem przeliczalnym (jest więc funkcją pierwszej klasy Baire'a),

3) jej pochodna jest prawie wszędzie nieujemna.

Podobne kryterium znalazł G. Tolstoff [53]. Jego warunki różniczkowalności są słabsze, posługuje się pochodną aproksymatywną, natomiast dotyczący samej funkcji, czyli jej ciągłość, mocniejszy niż 1) i 2) łącznie. O żadnym z tych kryteriów nie można więc powiedzieć, że jest mocniejsze.

Omawiana praca spotkała się z dużym zainteresowaniem matematyków amerykańskich, związanych z czasopismem *Real Analysis Exchange.* Wpłynęły na to nie tylko zawarte w niej wyniki, ale i duża ilość sformułowanych wyraźnie, bądź wynikających z treści, problemów otwartych. Praca wyznaczała kierunki dalszych badań. Redakcja wymienionego czasopisma przełożyła pracę opublikowaną po francusku w *Trans. Amer. Math. Soc.* na angielski i ogłosiła, że dostarczy ją bezpłatnie każdemu, kto o nią poprosi. Od tego czasu w każdym wydanym do dziś zeszycie *Real Analysis Exchange*, prócz jednego, można znaleźć artykuł cytujący prace Zahorskiego. 28 lat po ukazaniu się pracy [22] o pierwszej pochodnej A. Bruckner rozpoczął wstęp do monografii [34] słowami: *It has now been about forty years since the publication of Saks' book, „Theory of the Integral", a book which deals considerably with topics which are related to differentiation theory. Since that time, particularly since the publication of Zahorski's paper in 1950, much work has been done related to the differentiation of real functions,...* Artykuł [35], napisany z okazji siedemdziesięciolecia Zahorskiego, rozpoczyna słowami: *The impact and influence of Zahorski's work in differentiation theory is well known to all researchers in the field. Indeed, his monumental work [10]* [czyli [22] w spisie prac] *is the most widely quoted paper on the subject because it opened so many directions of further research for scholars of the next generations. Those engaged in research on monotonicity, or in the behavior of various forms of generalized differentiation have been very much* *influenced by both the results and the techniques of Zahorski's work [10]. There may exist hundreds of mathematical articles, written during the last thirty years, in which Zahorski's influence is immediately apparent.*

Część problemów z pracy [22] zostało rozwiązanych dość szybko. Pytanie, czy wszystkie zbiory klasy M_2, względnie M_3, są zbiorami Lebesgue'a pochodnych skończonych, względnie przyjmujących też wartości nieskończone pochodnych funkcji ciągłych, znalazło w pracy [46] odpowiedź negatywną. W ten sposób problem charakteryzacji zbiorów Lebesgue'a dla obu wymienionych klas pochodnych pozostał otwarty do czasu, gdy w roku 1982, a więc 32 lata po opublikowaniu problemu, D. Preiss w pracy [49] przedstawił jego rozwiązanie. Inny problem dotyczył kryteriów monotoniczności. Zahorski pytał, czy dla stwierdzenia monotoniczności i ciągłości wystarczy stwierdzić własności 1) i 2) z jego kryterium i warunki dotyczące pochodnej aproksymatywnej z kryterium Tołstowa, czy można w ten sposób otrzymać kryterium mocniejsze od obu wymienionych. Ten trudny problem doczekał się pozytywnej odpowiedzi dopiero po 15 latach. Znaleźli ją niezależnie i niemal równocześnie A. Bruckner [33] i T. Świątkowski [52]. Podstawowy problem, jak scharakteryzować posługując się zbiorami Lebesgue'a pochodne ograniczone, pozostaje nadal otwarty. Prof. Zahorski w rozmowie z piszącym te słowa powiedział, że być może można to zrobić znajdując odpowiednie relacje między zbiorami Lebesgue'a funkcji pochodnej ograniczonej klasy M_4.

Innym ważnym zbiorem analizy matematycznej opisanym przez Zahorskiego w pracy [9] jest zbiór punktów rozbieżności całki osobliwej. Warunki konieczne dla tego zbioru podał Faddiejew w pracy [40], przy czym jądro było funkcją trzech zmiennych: wolnej, całkowania i przejścia do granicy. Zahorski zajął się warunkami wystarczającymi w przypadku szczególnym, gdy jądro ma postać $\Phi_n(t-x)$. Ten przypadek obejmuje jednak jądra najważniejsze w analizie matematycznej: jądro Fejéra, ogólniej jądro Cesàro (C,r) oraz Abela–Poissona dla sumowalności szeregów trygonometrycznych Fouriera, jądra różniczkowania jednostronnego, symetrycznego i innych. Daje to charakteryzację zbiorów punktów nieróżniczkowalności funkcji absolutnie ciągłych, a nawet funkcji spełniających warunek Lipschitza, jako zbiorów $G_{\delta\sigma}$ miary zero. To po zapoznaniu się z treścią tej pracy Banach zaproponował Zahorskiemu zajęcie się problemem Łuzina.

Praca [10] zawiera charakteryzacje pewnych zbiorów, związanych z szeregami Taylora funkcji f klasy C_∞. Promień zbieżności takiego szeregu może w pewnych punktach równać się zero, wtedy nazywamy je osobliwymi w sensie Pringsheima. Jeżeli promień jest dodatni i dla wszystkich h z pewnego otoczenia zera szereg jest zbieżny do $f(x+h)$, to punkt x nazywa się punktem regularnym. Punkt, który nie jest ani regularny, ani osobliwy w sensie Pringsheima, nazywa się osobliwy w sensie Cauchy'ego. Zbiory punktów osobliwych w obu sensach są rozłączne, ich suma jest zbiorem domkniętym i, jak wykazał Zahorski, zbiór punktów osobliwych w sensie Pringsheima jest G_δ, a w sensie Cauchy'ego jest F_σ i pierwszej kategorii. Co więcej, dla dwu dowolnych zbiorów rozłącznych A i B, pierwszego G_δ, a drugiego F_σ pierwszej kategorii, istnieje funkcja klasy C_∞ mająca osobliwości w sensie Pringsheima w i tylko w punktach zbioru A, w sensie Cauchy'ego dokładnie w punktach zbioru B, a wszystkie pozostałe punkty to punkty regularne. Konstrukcja tej funkcji jest bardzo złożona i długa. Z jej istnienia wynika jednak, że wymienione tu wlasności obu zbiorów, a więc wynikające z nich własności dopełnienia ich sumy, charakteryzują całkowicie trójki postaci (zbiór punktów osobliwych w sensie Pringsheima, zbiór punktów osobliwych w sensie Cauchy'ego, zbiór punktów regularnych). Dowód tego twierdzenia został później zmodyfikowany przez M. Salzmana i K. Zellera [50], uogólniony na funkcje dwu zmiennych przez J. Siciaka [51] oraz w pewnej części przez T. Banga [32] i H. Zahorską [57].

Praca o punktach osobliwych powstała w związku z problemem Ulama, który Banach zakomunikował Zahorskiemu w następującej postaci: Czy istnieje funkcja ciągła $f(x)$ taka, że dla każdej funkcji analitycznej $g(x)$ zbiór rozwiązań równania $f(x) = g(x)$ jest co najwyżej przeliczalny. Odpowiedź pozytywną Zahorski opublikował w pracy [10]. Ulam jednak wpisał do Księgi Szkockiej pytanie w formie „Czy nie istnieje funkcja...", a więc przeciwne do zadanego przez Banacha. Przeczytawszy, że Zahorski odpowiedział pozytywnie, nie wiedząc o sformułowaniu Banacha, zrozumiał, że Zahorski dowiódł nieistnienia funkcji o którą pytał, i takie twierdzenie, jak widać fałszywe, przypisał mu publikując Książkę Szkocką.

S. Mazur postawił następujący problem z pogranicza geometrii różniczkowej i funkcji rzeczywistych. Wiadomo było (A. J. Ward [56]), że krzywa Jordana, mająca styczną poza przeliczalnym zbiorem punktów, ma przedstawienie parametryczne różniczkowalne prawie wszędzie. Mazur pytał, czy można je poprawić tak, by było różniczkowalne wszędzie. Zahorski odpowiedział pozytywnie [18], zakładając przy tym mniej niż Ward. Zamiast istnienia stycznej wystarczy lokalna wpisywalność krzywej w stożki kołowe i pewien warunek ograniczający ilość punktów wielokrotnych. Już bez żadnych warunków krzywa prostowalna ma przedstawienie parametryczne wszędzie różniczkowalne z pochodnymi ograniczonymi. Do tego samego działu matematyki należy, przedstawiona w pracach [24] i [25], konstrukcja krzywej o pewnych nieoczekiwanych własnościach. Jest nią łuk zwykły, prostowalny, którego styczna przyjmuje na każdym łuku częściowym wszystkie kierunki. Autor dowodzi przy tym, że taka krzywa nie może posiadać stycznej w gęstym i nieprzeliczalnym zbiorze punktów. Przykład w pewnym sensie przeciwny, bo łuku zwykłego, mającego wszędzie styczną, którego indykatrysa sferyczna, różna od punktu, posiada domknięcie będące zbiorem zerowymiarowym, stanowi treść pracy [6].

Najpoważniejszym zadaniem, przed którym stanął Zahorski, była próba dowodu hipotezy Łuzina z roku 1912, że szereg Fouriera funkcji całkowalnej z kwadratem jest zbieżny prawie wszędzie. Wielu wybitnych matematyków podejmowało bezskutecznie próby rozstrzygnięcia, czy jest ona prawdziwa. Prof. Zahorski, mający za sobą w roku 1960 bardzo ważny wynik w teorii szeregów trygonometrycznych i cieszący się z tego powodu autorytetem międzynarodowym, doszedł do wniosku, że hipotezę wykazał i anonsował to pośpiesznie w nocie [28], chcąc zapewnić sobie pierwszeństwo rozwiązania problemu. Jednak w trzy tygodnie później, referując swój wynik na seminarium prof. Mazura, zauważył błąd we fragmencie dowodu. Ponieważ nota [28] była już w druku i nie można było jej wycofać, powiadomił o błędzie prof. Zygmunda, który z kolei informację, że otrzymał od autora pracy wiadomość o błędzie, zamieścił w jej recenzji w *Math. Rev.* Poprawny dowód prawdziwości hipotezy Łuzina opublikował L. Carleson [37] w pięć lat później, za co otrzymał medal Fieldsa. Mimo to prof. Zahorski, przekonany, że jego metoda dowodu prawdziwości hipotezy okaże się skuteczna, nie zaniechał pracy nad dowodem twierdzenia Carlesona tą metodą w ciągu wielu lat.

Wcześniej, w roku 1960, duże poruszenie, wśród matematyków zajmujących się szeregami trygonometrycznymi wywołała praca [28]. Jej treścią był dowód twierdzenia Kołmogorowa opublikowanego bez dowodu w pracy [43], wspólnej z Mienszowem, w roku 1927: Istnieje funkcja całkowalna z kwadratem, której szereg Fouriera po pewnym przestawieniu wyrazów jest rozbieżny prawie wszędzie. Mimo licznych zapytań i próśb o wskazówki, jak przeprowadzić dowód, Kołmogorow dowodu nie opublikował, a wskazówki, których udzielał, nigdy nie były wystarczające, by dowód przeprowadzić. Nie znano ani funkcji, ani permutacji szeregu. Odnalazł je Zahorski, a następstwa tego odkrycia są znaczne. Natychmiast po opublikowaniu pracy Zahorskiego posłużyła ona za wzór P. Ulianowowi [54] i [55], który zastosował metodę Zahorskiego do szeregów ortogonalnych Haara i Walsha, a następnie do dowolnych układów ortogonalnych zupełnych w L^2. Następnie A. M. Olewski [48] zrobił to samo dla rozwinięć względem dowolnych baz w L^2.

Ostatnim artykułem, który wyszedł spod pióra prof. Zahorskiego, jest jego autobiografia [31]. Zawiera ona nie tylko opis życia, warunków, w których przyszło mu pracować, wspomnienia o wspierających go matematykach, kolegach, lekarzach, ale też przemyślenia o miejscu matematyki wśród innych nauk, o znaczeniu nauki, perspektywach jej rozwoju, ogólnie o życiu ludzkim i swoim własnym. Zapewne licząc się z cenzurą nie napisał, że córka po wydarzeniach radomskich wyemigrowała do Australii, nie wyjaśnił czemu jego żona, prof. Śladkowska-Zahorska, nie mogła w roku 1982 opiekować się synem. Była wtedy internowana.

Zasługą prof. Zahorskiego jest stworzenie łódzkiej szkoły funkcji rzeczywistych. W artykule „Osiągnięcia naukowe XX-lecia w zakresie matematyki” [18] zredagowanym przez komisję PAN, czytamy o niej: *W zakresie* *funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej pracowała głównie szkoła łódzka (Zahorski,... i ich uczniowie). Tematyka tych prac obejmowała mnogościową charakteryzację różnych klas funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, zbiorów, w których funkcje lub ciągi funkcji określonego typu mają określone własności itd. Nie jest to wprawdzie najmodniejszy w tej chwili na świecie kierunek badań, ale trzeba stwierdzić, ze szkoła łódzka osiągnęła w tych badaniach prawdziwe mistrzostwo, dochodząc do rezultatów, których nie przekroczyli na ogół uczeni innych krajów (na przykład wyniki Zahorskiego co do funkcji pochodnych,...).* Zgromadzony wokół Zahorskiego zespół uczniów i ich współpracowników tworzy do dziś aktywną grupę specjalistów funkcji rzeczywistych, zajmującą dobrą pozycję wśród ośrodków tej specjalności w innych krajach i współpracującą z nimi. Należą do niej matematycy niekoniecznie doktoryzowani przez prof. Zahorskiego, ale pozostający pod wpływem jego prac i kontynuujący ich tematykę. Najbardziej znani z nich to śp. T. Świątkowski, W. Wilczyński, M. Filipczak, a także ich uczniowie, których już nie wymienię.

W latach 1961–1979 prof. Zahorski był radnym Dzielnicowej Rady Narodowej Łódź-Górna i przez pewien czas członkiem prezydium tej rady. Zajmował się sprawami oświaty. Dwukrotnie pełnił funkcje prezesa Oddziału Łódzkiego PTM. W latach 1975–1977 był członkiem Zarządu Głównego tego Towarzystwa.

Polskie Towarzystwo Matematyczne przyznało Z. Zahorskiemu w roku 1949 nagrodę im. S. Zaremby, a w roku 1996 godność członka honorowego. Wśród odznaczeń, które posiadał, najwyższym był Krzyż Kawalerski Orderu Odrodzenia Polski. Uniwersytet Łódzki nadał mu tytuł doktora honoris causa.

Spis prac naukowych, popularnych i dydaktycznych Zygmunta Zahorskiego

[1] *Über die Konstruktion einer differentierbaren, monotone, nicht konstanten Funktion, mit überall dichter Menge von Konstanzintervallen*, Sprawozdania Tow. Naukowego Warszawskiego, Wydział III, 30 (1937), 202–206.

[2] *O množestve toček nediferenciruemosti nepreryvnoj funkcii*, Mat. Sbornik N.S. 9 (51), 3 (1941), 487–510.

[3] *Über die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist*, Tohôku Math. J. 28 (1941), 321–330.

[4] *Sur les intégrales singulières*, C. R. Acad. Sci. Paris 223 (1946), 300–401.

[5] *Sur les dérivées des fonctions partout dérivables*, C. R. Acad. Sci. Paris 223 (1946), 415–417.

[6] *Problèmes de la théorie des ensembles et des fonctions*, C. R. Acad. Sci. Paris 223 (1946), 449–451.

[7] *Un problème de la théorie des ensembles et des fonctions*, C. R. Acad. Sci. Paris 223 (1946) 465–467.

[8] *Sur l'ensemble des points de non-dérivabilité d'une fonction continue*, Bull. Soc. Math. France 74 (1946) 147–178.

[9] *Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulieres*, Ann. Soc. Polon. Math. 19 (1946), 66–105.
[10] *Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres*, Fund. Math. 34 (1947), 183–245.
[11] *O zbiorze punktów nieróżniczkowalności funkcji dowolnej*, Dodatek do Rocznika Pol. Tow. Mat. 21 (1949), 25–26.
[12] *Sur un problème de M. G. Choquet*, Interm. Recherches Math. 3 (1947), 37.
[13] *On zeros of quasi-analitic* (B) *functions*, Bull. Calcutta Math. Soc. 39, No. 4 (1947), 157–165.
[14] *On a problem of M. F. Leja*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), 215–222.
[15] *O žordanowych krivych, obladajuščich w každoj točke kasatel'noj*, Mat. Sbornik N.S. 22 (64), (1948), 3–26.
[16] *On a problem of G. Choquet*, Časopis Pěst. Mat. Fys. 73 (1948), 69–77.
[17] *Sur l'ensemble des racines de l'équation* $W(x) = f(x)$, Sprawozd. Tow. Naukowego Warszawskiego, Wydz. III, 41 (1948), 43–45.
[18] *Osiągnięcia naukowe XX-lecia w zakresie matematyki*, Wiadom. Mat. 8 (1965), 1–21.
[19] *Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque*, Ann. Soc. Polon. Math. 21, cz. II (1948), 306–323.
[20] *Supplement au memoire „Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres"*, Fund. Math. 36 (1949), 319–320.
[21] *Sur les courbes dont la tangente admet sur chaque arc toutes les directions*, Časopis Pěst. Mat. Fys. 74 (1949), 233–235.
[22] *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 1–54.
[23] *Recenzja książki „S. Banach. Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych. Warszawa–Wrocław, 1951"*, Ann. Soc. Polon. Math. 24 (1951), 203–206.
[24] *Sur les courbes dont la tangente prend sur tout arc partiel toutes les directions*, Czechoslovak Math. J. 1 (76) (1952), 105–117.
[25] *O kriwych, kasatel'naja kotorych prinimaet na ljubom otrezke dugi vse vozmožnye napravlenija*, Čechoslovackij Matematičeskij Žurnal 1 (76) (1952), 125–139.
[26] *Wykłady Matematyki*, cz. III. Skrypt. PWN, Łódź 1959.
[27] 8 komentarzy do prac S. Banacha (S. Banach *Oeuvres*, Vol. I, Warszawa 1967).
[28] *Une série de Fourier permutés d'une fonction de classe* L^2 *divergente presque partout*, C. R. Acad. Sci. Paris 251 (1960), 501–503.
[29] *Sur la convergence presque partout des séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 252 (1961), 2366–2367.
[30] *O królowej nauk*, Przekrój 1557 (1975), 10–11 i 23.
[31] *Zarys biografii*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 953, Matematyka-Fizyka 48 (1986), 7–25.

Bibliografia

[32] T. Bang, *Sur les points singuliers dans un sens généralisé des fonctions indéfiniment dérivables*, Den 11e Skandiviske Matematikerkongress, Trondheim (1949), 259–263.
[33] A. Bruckner, *An affirmative answer to a problem of Zahorski and some consequences*, Michigan Math. J. 13 (1966), 15–26.
[34] —, *Differentiation of Real Functions*, Springer-Verlag, 1978.
[35] —, *Some indirect consequences of a theorem of Zahorski*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 853, Matematyka i Fizyka 48 (1986), 47–54.

[36] A. B r u d n o, *Nepreryvnost' a differenciruemost'*, Mat. Sbornik 13 (55) (1943), 119–144.
[37] L. C a r l e s o n, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 116 (1966), 1–48.
[38] G. C h o q u e t, *Application des propriétes descriptives de la fonction contingent à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes*, J. Math. Pures Appl. 26 (1947), 115–226.
[39] A. D e n j o y, *Sur une propriété des fonctions dérivées*, Enseign. Math. 18 (1916), 320–328.
[40] D. K. F a d d e e w, *O predstavlenii summiruemych funkcij singuljarnymi integralami w točkach Lebesgue'a*, Mat. Sbornik 11 (43) (1936), 351–368.
[41] P. W. G a w r o n, *Działalność profesora Zygmunta Zahorskiego na Politechnice Śląskiej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 853, Matematyka i Fizyka 48 (1986), 27–29.
[42] V. J a r n í k, *Über die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich wird*, Tohôku. Math. J. 37 (1933), 248.
[43] A. K o l m o g o r o f f, D. M e n s c h o f f, *Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales*, Math. Z. 26. (1927), 432–441.
[44] J. S. L i p i ń s k i, *Prace Zygmunta Zahorskiego z teorii funkcji rzeczywistych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 853, Matematyka i Fizyka 48 (1986), 29–36.
[45] —, *Sur certains problèmes de Choquet et de Zahorski concernant les fonctions dérivées*, Fund. Math. 44 (1957), 94–102.
[46] —, *Sur les ensembles* $\{f'(x) > a\}$, Fund. Math. 42 (1955) 254–260.
[47] S. M a z u r k i e w i c z, *Konstrukcya funkcyi różniczkowalnej, mającej wszędzie gęsty zbiór przedziałów stałości*, Prace Matematyczno-Fizyczne 27 (1915), 87–91.
[48] A. M. O l ' e v s k i j, *Raschodjaščiesja rjady iz* L^2 *po polnym sistemam*, DAN SSSR 138 (1961), 545–548.
[49] D. P r e i s s, *Level sets of derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 161–184.
[50] H. S a l z m a n, K. Z e l l e r, *Singularitäten unendlich oft differenzierbaren Funktionen*, Math. Z. 62 (1955), 354–357.
[51] J. S i c i a k, *Punkty regularne i osobliwe funkcji klasy* C^∞, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 853, Matematyka i Fizyka 48 (1986), 127–136.
[52] T. Ś w i ą t k o w s k i, *On the condition of monotonicity of functions*, Fund. Math. 59 (1968), 189–201.
[53] G. T o l s t o f f, *Sur quelques propriétés des fonctions approximativement continues*, Rec. Mat. (Mat. Sbornik) N.S. 5 (1939), 637–645.
[54] P. L. U l ' j a n o v, *Raschodjaščiesja rjady Furie*, Usp. Mat. Nauk 16 (1961), 61–142.
[55] —, *Raschodjaščiesja rjady po sisteme Haara i po bazisam*, DAN SSSR 138 (1961), 556–559.
[56] A. J. W a r d, *On Jordan curves possessing a tangent everywhere*, Fund. Math. 28 (1937), 280–288.
[57] H. Z a h o r s k a, *Über die singulären Punkte einer Funktion der Klasse* C_∞, Acta. Math Acad. Sci. Hungar. 15 (1964), 77–94.