ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXIX (2003)

Zdzisław Skupień (Kraków)

Twierdzenie Cantora-Bernsteina – dowody znane-nieznane

1. Wstęp. Matematyka jest niewątpliwie procesem społecznym – społecznym procesem gromadzenia zobiektywizowanej informacji. Niezawodnym polem jej zastosowań jest więc dydaktyka. Tej zaś ma służyć poniższe zestawienie inspirujących krótkich dowodów i przypomnienie oraz skorygowanie kilku informacji historycznych. Chociaż twierdzenie Cantora-Bernsteina nie zależy od pewnika wyboru, żaden z dowodów nie jest konstrukcyjny w sensie algorytmicznym, bo skończona liczba kroków nie musi wystarczyć dla uzyskania bijekcji. Kontrowersje wokół służebności rozważanego twierdzenia o bijekcji względem pojęcia liczby są celowo przypomniane. Artykuł niniejszy jest również odpowiedzią na matematyczno-merytoryczne uwagi w liście prof. J. Mioduszewskiego [23].

2. Dowody iteracyjne. Przechodząc do matematyki, dla dowolnych zbiorów A i B załóżmy, że istnieją iniekcje: $A \to B$ oraz $B \to A$. Twierdzenie Cantora-Bernsteina orzeka, że:

(α) *Istnieje bijekcja od jednego ze zbiorów A, B na drugi.*

D o w ó d D1. Wystarczy założyć, że żadna z tych iniekcji nie jest bijekcją. Załóżmy więc, że zbiór B jest podzbiorem właściwym zbioru A, gdyż zamiast wyjściowego zbioru B możemy rozważyć jego iniektywny obraz zawarty w A. Niech $f\colon A \to B$ będzie daną iniekcją (gdy $B \subset A$). Niech C oznacza zbiór tych $y \in A$, dla których istnieją $x \in A \setminus B$ i nieujemna liczba n, takie że $y = f^n(x)$, gdzie f^n oznacza n-tą iterację iniekcji f, przy czym f^0 jest identycznością. Zatem $A \setminus B \subset C$ i dla każdego $y \in C$ jednoznacznie wyznaczone są i n, i x, a nadto $f[C] \subset C$ (co więcej, $f[C] = B \cap C$ oraz $A \setminus C = B \setminus f[C]$). Stąd unia iniekcji f zacieśnionej do zbioru C oraz identyczności na $A \setminus C$ jest bijekcją, powiedzmy h, od zbioru A na B, $h = f|C \cup \mathrm{id}|A \setminus C$. □

W powyższym dowodzie (i poniżej) dla odwzorowania φ, $\varphi = \varphi(\cdot)$, symbol $\varphi[\cdot]$ oznacza przedłużenie φ na zbiory, np. $f[C]$ jest obrazem zbioru C poprzez f.

Analogiczny dowód wykorzystujący dodatkowo podział zbioru A na orbity odwzorowania f podaje Mioduszewski w swoim artykule [22] z r. 1998, cytując tylko Papy'ego (1964) jako autora analogicznego dowodu. Dowód D1 można zaś wywieść z artykułu [29] Reichbacha (z Wrocławia) opublikowanego w Colloquium Mathematicum w roku 1955. Reichbach – później Meir Reichaw (p. nota w zestawie *Z żałobnej karty* w [39] (2000); Reichaw-Reichbach u Leetcha w [12]) – nie cytując żadnych źródeł, podaje dowód (którego skrótem jest D2 poniżej) w istocie następującej wersji (β) twierdzenia-hipotezy sformułowanej przez Cantora w § 13 prac [6, 7] już w roku 1883 (powtórzonej w [8, § 2] (1895), gdzie jest też wersja „standardowa" równoważnie sformułowana powyżej jako (α)):

(β) *Jeżeli $M'' \subset M' \subset M$ i zbiory M, M'' są równoliczne, to są one równoliczne z dowolnym zbiorem pośrednim M'.*

D o w ó d D2. Dla danej bijekcji $f\colon M \to f[M]$, gdzie $(M'' :=)\ f[M] \subset M$, rozważmy dowolny zbiór $E \subset M \setminus f[M]$ a następnie $S := E \cup f[E] \cup f[f[E]] \cup \dots$ Zauważmy, że $S = E \cup f[S]$, skąd $f[M] \setminus S = f[M] \setminus f[S] = f[M \setminus S]$, ponieważ f jest iniekcją. Wtedy $f^* := \mathrm{id}|S \cup f|(M \setminus S)$ jest bijekcją $M \to E \cup f[M]$. □

W oznaczeniach dowodu D1: $M = A$, $E \cup f[M] = B \subset A$. Nadto zbiory C i S z tych dowodów są „identycznie" konstruowane poprzez rekursję, wychodząc od rozłącznych zbiorów odpowiednio $A \setminus B$ i $E = B \setminus f[A]$. Jednakże zbiory C i S nie muszą się dopełniać do A i dlatego bijekcje f^*, $h\colon A \to B$ mogą być różne. Różne bowiem mogą być też bijekcje w pełni wyznaczone przez dane dwie iniekcje. (W D1 jedną z danych iniekcji jest po prostu tożsamość na zbiorze B).

Ciekawsze zaś, że dowód D1 jest wywiedziony z pracy Coxa [10] z r. 1968. Dowód D1 jest ulepszoną adaptacją (z zachowaniem i metody, i „standardowych" oznaczeń A, B, f, h) dowodu lematu, w którym zakłada się bezpośrednio, że $B \subseteq A$. Do dowodu D1 włączona została istotna uwaga, że $f[C] = B \cap C$. Reichbach (i nikt inny) nie jest jednak cytowany przez Coxa. W komentarzu [12, s. 1104] przytoczono tekst J. F. Leetcha (pomijający nazwisko Cox), że dowód Coxa „jest bardzo podobny do podanego przez M. Reichawa-Reichbacha". Dopiero poprzez ten komentarz dotarłem niedawno i do Coxa, i do Reichbacha-Reichawa (tu nazwisko nowe, Reichaw, po łączniku za starym jest napisane wg polskiej tradycji).

Przedstawmy zatem bardzo krótką wersję dowodu, która jest ulepszonym (ale i zbyt sformalizowanym) skrótem dowodu Coxa. Cox unika iteracji złożenia $g \circ f$ dzięki wspomnianemu lematowi.

D o w ó d D3. Załóżmy, że z danych iniekcji $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to A$ żadna nie jest bijekcją, i rozważmy iniekcję $g \circ f\colon A \to A$ oraz podzbiór zbioru A:

$$A_A := A \setminus g[B] \cup (g \circ f)[A \setminus g[B]] \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} (g \circ f)^i [A \setminus g[B]].$$

Wtedy odwzorowanie $h := f|A_A \cup g^{-1}|(A \setminus A_A)\colon A \to B$ jest bijekcją, ponieważ $(g \circ f)[A_A] = g[B] \cap A_A$ i stąd $f[A_A] = g^{-1}[A_A]$, nadto $A \setminus A_A = g[B] \setminus A_A$, a zatem $g^{-1}[A \setminus A_A] = B \setminus f[A_A]$. □

Dowód ten pokazuje, w jakim sensie bijekcja h jest w pełni wyznaczona przez dane iniekcje. Równoliczność danych zbiorów jest wynikiem ich dwupodziałów na części parami równoliczne (jedną z tych dwu par jest A_A i $f[A_A]$). Analizując wcześniej opublikowane dowody, a w szczególności dowód J. Königa [19], fakt ten zauważył i uogólnił Banach [1], a następnie wykorzystał wraz z Tarskim w ich paradoksalnej konstrukcji skończonego podziału kuli, z którego izometrie o rozłącznych dziedzinach wytwarzają dwie kopie tej kuli.

Następny dowód wykorzystujący równolegle rekursje z dowodów D1 i D2 zainspirowany jest dowodem z monografii Jecha [15] (1973), w którym na każdym kroku iteracji tylko zacieśnienia $h = f$ są konstruowane, zaś $h = \mathrm{id}$ dla pozostałych x. Korzysta się z faktu, że dla dowolnej iniekcji f zachodzi równość $f[M \setminus S] = f[M] \setminus f[S]$, por. dowód D2. Dowód pokazuje, że rekursywna konstrukcja jest niealgorytmiczna – wymaga nawet nadskończenie wielu (tzn. $\omega + 1$) kroków, aby wyznaczyć pozostałe x. Dowód u Jecha jest prostszy, ale poniższy dowód sugeruje równie prostą wersję, na każdym kroku której mogą być określane tylko zacieśnienia $h = \mathrm{id}$, a dopiero na końcu $h = f$ dla pozostałych x. Zaletą poniższego dowodu jest wskazanie, że bijekcja h może mieć dwie definicje.

D o w ó d D4. Wystarczy założyć, że $f\colon A \to B$ jest iniekcją oraz $B \subset A$. Konstruujemy dwa ciągi zbiorów (A_n) i (B_n) wg schematu $A_0 := A$, $B_0 := B$ oraz $S_n := f[S_{n-1}]$, gdzie $S = A, B$. Jeśli przyjmiemy

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A_n \setminus B_n,\ n \text{ dowolne}, \\ x & \text{dla } x \in B_n \setminus A_{n+1},\ n \text{ dowolne}, \\ x \text{ (albo } f(x)) & \text{dla wszystkich pozostałych } x, \end{cases}$$

to $h\colon A \to B$ jest bijekcją (ewentualnie jedną z dwu możliwych). □

3. Dowody grafowo-relacyjne. Warto podać spostrzeżenie, że (wbrew stwierdzeniu Bernsteina w [3, s. 121]) bijekcja h na ogół nie jest jednoznacznie wyznaczona przez iniekcje f i g. Spostrzeżenie to (bez odsyłacza do Bernsteina) znajduje się w słynnej teoriografowej monografii [18] z r. 1936 węgierskiego matematyka D. Königa w dowodzie twierdzenia I 12 o pokojarzeniach (*de facto* 1-faktorach) w drogach nieskończonych i cyklach parzystych. Twierdzenie to wykorzystane jest w *multigrafowym* dowodzie twierdzenia Cantora-Bernsteina w części VI § 3 monografii, p. analogiczny *grafowy* dowód u Bertranda i Horáka [4].

Wyżej wspomniany podział na orbity jest tam podziałem na reprezentujące je nieskierowane drogi i cykle. Jednakże warto i należy zauważyć, że te podziały uzyskuje się, stosując pewnik wyboru. Mój dowód w nocie [34] (ale także i dowód Papy'ego) w terminach strzałek i dróg (tj. relacji reprezentujących iteracje iniekcji) można interpretować jako analogiczny dowód *digrafowy*. Równoliczność danych zbiorów A, B uzyskuję (podobnie jak Halmos [13]) dzięki ich trójpodziałom, które da się skonstruować bez użycia pewnika wyboru.

Można uznać, że dowodami w ogólności grafowymi są te, w których rozważa się poszczególne elementy i ciągi albo raczej drogi, czyli specjalne relacje, tworzone z kolejnych obrazów tych elementów. Już w r. 1906 pierwszy taki dowód opublikował Jules König [19] (Julius König w niemieckiej publikacji swego syna [18]). Dowód ten – lakonicznie skomentowany w artykule przeglądowym [21, s. 194] jako oryginalny, raczej długi, prowadzony metodą „tam i z powrotem" – wart jest przypomnienia. Przecież zainspirował on i Banacha, i Sierpińskiego [33], i – oczywiście – D. Königa (który nadto w swoim artykule [17, s. 130] w Fund. Math. (i w monografii) pisze, że wynik Banacha jest *implicite*, a dowód Banacha w zasadzie, taki sam jak u ojca). J. König – świeżo pod wrażeniem opublikowanych zarzutów Poincarégo [27] odnośnie ówczesnych podstaw logiki, arytmetyki i teorii mnogości (jest tam zarzut stosowania liczb zanim zostały zdefiniowane, w szczególności stosowania (nieweryfikowalnej?) indukcji zupełnej, i zarzut błędnego koła w definicjach liczby naturalnej, por. [28]: Księga 2, Rozdz. IV.V oraz III.VI) – stara się unikać zarówno „liczenia" jak i (zresztą bezskutecznie) rekursji. Oto twierdzenie i (nieznacznie skrócony) dowód Königa, gdzie $\sim$ jest ówczesnym oznaczeniem (też u Sierpińskiego) relacji równoliczności zbiorów:

(α') *Jeśli* $X \sim Y_1$ *i* $Y \sim X_1$, *gdzie* $X_1 \subset X$ *i* $Y_1 \subset Y$, *to* $X \sim Y$.

D o w ó d D5. Zdanie $X \sim Y_1$ oznacza regułę (I), że każdy element $x \in X$ wyznacza jedyne $y \in Y_1$, i na odwrót: temu y odpowiada to x [przy czym wszystkie $y \in Y_1$ są użyte – Z.S.]. Podobnie $Y \sim X_1$ oznacza analogiczną regułę (II). Weźmy więc dowolny element $x_1 \in X$. Wg (I) z x_1 otrzymujemy następnik $y_1 \in Y$, temu y_1 zgodnie z (II) odpowiada następnik $x_2 \in X_1$ itd. Jeśli $x_1 \in X_1$, to wg (II) istnieje $y_0 \in Y$ bezpośrednio poprzedzające x_1 w ciągu, i ciąg przedłużamy w lewo, ale nie jest to możliwe, gdy $x_1 \in X \setminus X_1$. Ostatecznie są trzy możliwości:
(i) ciąg ma początek w X, (ii) – początek w Y, (iii) ciąg nie ma początku, czyli jest stale przedłużalny w lewo. Nadto dla różnych $x \in X$ odpowiadające ciągi albo mają ten sam element jako wyraz w obu ciągach i wtedy ciągi są identyczne, albo nie (czyli są rozłączne). Wśród ciągów może być ciąg

okresowy i nie ma on początku. Dla ustanowienia, że $X \sim Y$, mając dowolny $x_1 \in X$ i odpowiadający ciąg, w przypadku (i) lub (iii) elementowi x_1 przyporządkowujemy jego następnik y_1 w ciągu, zaś w przypadku (ii) – jego poprzednik y_0. □

Zatem dowód ten nie jest długi, ale – podobnie jak zupełnie analogiczne dowody: Papy'ego (w terminach relacji, tj. następstw strzałek) i Mioduszewskiego – zależy on od pewnika wyboru, który gwarantuje konstrukcję podziału unii $X \cup Y$ na rozważane ciągi. Halmos, który też nie cytuje J. Königa, konstruuje te same ciągi co König, a następnie trójpodziały i dwupodziały, Banach uzyskuje zbiory wyrazów tych ciągów za pomocą przecięć zbiorów, Sierpiński zaś rozważa ciągi utworzone tylko z poprzedników u Königa.

Dowód Papy'ego zasługuje na uwagę jako dowód czysto relacyjny. Nadto książka Papy'ego – rzetelnie napisana i znakomicie kolorowo ilustrowana – jest zadziwiającym dowodem optymizmu dydaktycznego zarówno autora jak i belgijskiego ministerstwa edukacji. Przeznaczona dla uczniów 12–13-letnich ale z programem eksperymentalnym, wypracowanym pod auspicjami UNESCO i już wcześniej realizowanym przez kilka lat, książka ta zgrabnie i precyzyjnie omawia teorię mnogości, grupy permutacji i przekształceń geometrycznych, pierścień liczb całkowitych, system dwójkowy, algebrę wektorów, kończąc na grupach abstrakcyjnych. Zawiera wkładki z portretami i życiorysami kilku matematyków, w tym Cantora, ale twierdzenie Cantora-Bernsteina (jako stwierdzenie, *proposition*) przypisuje tylko Bernsteinowi (podobnie czyni Poincaré w [27]).

4. Dowód nieiteracyjny. Wszystkie dowody wyżej omawiane lub wzmiankowane wykorzystują rekursje. Z rekursji korzysta oryginalny dowód A. Zelevinsky'ego [35] opublikowany jako jeden z dowodów doskonałych w książce *Dowody z Księgi* Aignera i Zieglera (1998, 2001). Nierekursywny dowód podaje monografia [16, ss. 46–47]. Poniżej podaję nierekursywną wersję swojego dowodu z [34] korzystającą z pewnego ogólnego lematu (w którym odwzorowanie jest dowolne, niekoniecznie iniektywne). Sam lemat i jego dowód sugerują uproszczenia dowodu z monografii [16].

Lemat. *Jeśli X jest dowolnym zbiorem, Z dowolnym podzbiorem, $Z \subseteq X$, oraz $\varphi\colon X \to X$ dowolnym odwzorowaniem, to istnieje najmniejszy z możliwych podzbiór $C_Z \subseteq X$ taki, że $C_Z = \varphi[C_Z] \cup Z$.*

D o w ó d. Zauważmy, że $C_Z = \emptyset$, dokładnie gdy $Z = \emptyset$. Niech

$$\mathcal{S}_Z = \{C \subseteq X\colon\ \varphi[C] \subseteq C \text{ oraz } Z \subseteq C\}.$$

Stąd dla każdego elementu $C \in \mathcal{S}_Z$ zbiór $C' := \varphi[C] \cup Z$ jest oczywiście podzbiorem zbioru C. Dlatego $\varphi[C'] \subseteq \varphi[C] \subseteq C'$, a zatem $C' \in \mathcal{S}_Z$. Ponieważ zaś $\mathcal{S}_Z$ jest rodziną podzbiorów (ale również $\mathcal{S}_Z \neq \emptyset$, bo $X \in \mathcal{S}_Z$), więc zbiór $C_Z := \bigcap \mathcal{S}_Z$ jest jednoznacznie określony. Udowodnimy, że $C_Z \in \mathcal{S}_Z$. Mianowicie C_Z jest nadzbiorem dla Z oraz

$$\varphi[C_Z] = \varphi\left[\bigcap_{C\in\mathcal{S}_Z} C\right] \subseteq \bigcap_{C\in\mathcal{S}_Z} \varphi[C] \subseteq \bigcap_{C\in\mathcal{S}_Z} C = C_Z,$$

gdzie obie równości wynikają z definicji C_Z, inkluzje zaś z submultyplikatywności $\varphi[\cdot]$ i z monotoniczności operacji przecinania $\cap$. Stąd C_Z jest najmniejszym elementem (w sensie inkluzji) w $\mathcal{S}_Z$, a zatem $C_Z = (C_Z)' = \varphi[C_Z] \cup Z$. □

Powyższy lemat i jego dowód prosto i nieco ogólniej ujmują Dedekindową ideę nierekusywnego określenia zbioru C_Z, nazwanego przez Dedekinda „łańcuchem podzbioru" Z. Idea ta jest wykorzystana w klasycznych dowodach Dedekinda [9, s. 449] (1932, w nieopublikowanym wcześniej liście (1899) do Cantora) i Zermela [38] (1908, p. też eleganckie sformułowanie tego dowodu u Hausdorffa [14, s. 50] (1914)), a u Peana (1906, bez cytowania Dedekinda) jest metodą przedstawiania unii iterowanych obrazów jako przecięcia podzbiorów. Zatem lemat niezależnie od aksjomatu wyboru dowodzi istnienia unii $C_Z = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi^i[Z]$.

U w a g a. Modyfikując definicję rodziny $\mathcal{S}_Z$ w powyższym dowodzie, możemy uzyskać istnienie najmniejszych podzbiorów:

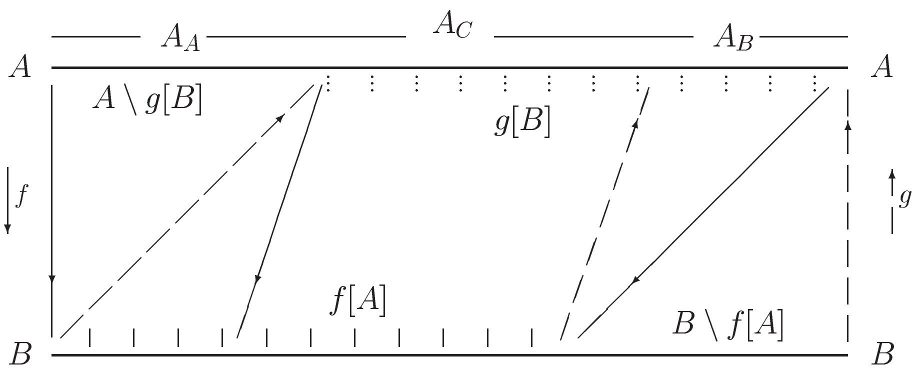
$$C_Z^- = \varphi^-[C_Z^-] \cup Z, \qquad C_Z^{\pm} = \varphi[C_Z^{\pm}] \cup \varphi^-[C_Z^{\pm}] \cup Z,$$

gdzie $\varphi^-[\cdot]$ oznacza przejście do przeciwobrazu poprzez φ, zaś $C_Z^{\pm}$ jest unią orbit elementów zbioru Z.

D o w ó d D6. Wystarczy określić bijekcję $h\colon A \to B$ za pomocą danych iniekcji $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to A$, tylko gdy ani f, ani g nie są bijekcjami. Dla ułatwienia prezentacji (i umożliwienia wizualizacji) załóżmy, że zbiory A, B są rozłączne (bo rozłączne są równoważne zbiory $A\times\{\emptyset\}$, $B\times\{\{\emptyset\}\}$). Zatem na pewnych podzbiorach zbioru A, powiedzmy A_A i A_B o własnościach $A_A \supseteq A\backslash g[B]$ i $g^{-1}[A_B] \supseteq B\backslash f[A]$, musi być odpowiednio $h = f$ na A_A i $h = g^{-1}$ na A_B. Powyższy lemat umożliwia znalezienie najmniejszych takich podzbiorów, a to może prowadzić do dwóch wersji bijekcji h. Stosujemy bowiem lemat, przyjmując $\varphi = g \circ f|X$ oraz $C_Z =: A_A$ dla $Z = A \setminus g[B]$ i $X = A$, a wtedy bijekcja h może być następującą unią zacieśnień: $h = f|A_A \cup g^{-1}|A \setminus A_A$.

Jeśli zaś $C_Z =: A_B$ dla $Z = g[B \setminus f[A]]$ i $X = A \setminus A_A$, to h może mieć następującą drugą wersję: $h = g^{-1}|A_B \cup f|A \setminus A_B$.

Zatem jeśli zbiór $A_C := A \setminus (A_A \cup A_B)$ jest niepusty, to na A_C albo $h = f|A_C$ albo $h = g^{-1}|A_C$, p. rys. □



Rozważane zbiory A_A i A_B uzyskuje się rekursywnie:

$$A_A = \bigcup_{i=0}^{\infty} (g \circ f)^i \left[A \setminus g[B]\right], \ A_B = \bigcup_{i=0}^{\infty} (g \circ f)^i \left[g[B \setminus f[A]]\right].$$

Te zbiory można określić też za pomocą istnienia dróg w relacji $\phi := f \cup g$, która jest zbiorem strzałek między elementami zbioru $A \cup B$. *Drogą*, powiedzmy $a \rightsquigarrow z$, czyli *drogą od elementu* a *do elementu* z, nazywamy (skończony) zbiór strzałek (podzbiór relacji ϕ) tworzących „następstwo” strzałek: $a \to b, b \to c, \ldots, x \to y, y \to z$; ewentualnie tylko $a \to z$ albo $\emptyset$ dla $z = a$. Mówimy, że dwa elementy są *połączalne*, jeśli istnieje droga od jednego z nich do drugiego. Zatem A_A i A_B – to zbiory elementów w A, które są połączalne odpowiednio z $A \setminus g[B]$ i z $B \setminus f[A]$; A_C zaś – to reszta elementów w A. Stąd, ponieważ każdy element jest końcem co najwyżej jednej strzałki, zbiory A_A i A_B są rozłączne.

5. Jeszcze trochę historii. Ponieważ literaturowe odwołania i do Bernsteina, i do nieco późniejszych prac bywają błędne, podkreślmy, że Bernstein nie opublikował swojego dowodu z r. 1897 nawet w swojej rozprawie z lat 1901, 1905. Podaje w niej jedynie, że jego dowód opublikował Borel (1898) oraz Schönflies (1900), i że inny dowód podał Zermelo (1901) (przy czym sam Zermelo nie cytuje później swego dowodu). Bernstein cytuje tylko anons [31] (1896) (zresztą błędnego) dowodu Schrödera. 29 sierpnia 1899 Dedekind przesłał Cantorowi swój ww. dowód, a w odpowiedzi już następnego dnia Cantor napisał, że Schröder przedstawił swój dowód jesienią 1896 na konferencji we Frankfurcie nad Menem i że opublikował go w [32, od s. 337] oraz że młody Bernstein przedstawił swój dowód około Wielkanocy 1897 na seminarium w Halle. Wszystko wskazuje, że Bernstein – przygotowując przedruk [3] (1905) swojej dysertacji – nie wiedział, że dowód Schrödera nie jest poprawny. Błąd wykrył Korselt, który w maju 1902 przesłał kontrprzykład oraz swój dowód twierdzenia (β) najpierw Schröderowi, potem – po otrzymaniu od niego szybkiej odpowiedzi – do Mathematische Annalen również jeszcze tegoż maja. Redakcja Math. Ann. opublikowała drugą wersję [20] tej pracy (z roku 1910), w której Korselt stwierdza, że błąd nie jest znany, oraz cytuje dawną odpowiedź Schrödera. Schröder już wcześniej wykrył swój błąd, latem lub jesienią roku 1901 powiedział o nim Maxowi Dehnowi, przyjacielowi Bernsteina, i obiecał zawiadomić Cantora, ale listu – zaczętego 1. IX. 1901 – nie ukończył ... Schröder był autorem znanego podręcznika z algebry i logiki, p. cytat u Zermela w [38]. A opublikowany dowód Korselta – to dowód Mioduszewskiego, tyle tylko że zamiast o orbitach Korselt mówi o cyklach i łańcuchach (tj. drogach). Korselt też nie cytuje Königa, ale twierdzi, że podobne(?) dowody znaleźli później Zermelo i Peano, i że jego dowód też nie wykorzystuje liczb i indukcji zupełnej.

Na koniec uwag historycznych podkreślmy, że dowody Zermela [38] (1908) i Peana [25] (1906) są niezależne. W styczniu 1906 Zermelo wysłał swój dowód Poincarému, który w [27] już w maju 1906 przytoczył i dowód Bernsteina, i Zermela, dyskwalifikując oba – Bernsteina za rekurencję, Zermela za rzekome błędne koło. W swoim artykule [37] Zermelo nie zarzuca Peanowi plagiatu, lecz wyraża żal, że ten, polemizując w [26] z artykułem Poincarégo, przytacza swój dowód, nawet nie wspominając o analogicznym dowodzie Zermela u Poincarégo jakby dlatego, aby następnie zwalczanie aksjomatu wyboru tym dobitniej kierować ku Zermelowi. Dopiero w komentarzu przy swoim dowodzie w [38] (1908) Zermelo stwierdza, że wykorzystał metodę „łańcuchów" Dedekinda [11], zaś w komentarzu [9, s. 451] do ww. listu do Cantora z dowodem Dedekinda słusznie podkreśla, że te dowody różnią się nieistotnie. Faktycznie – tylko oznaczeniami(!). Reasumując, o nierekurencyjnym dowodzie twierdzenia Cantora-Bernsteina, wykorzystującym analogon powyższego lematu, można więc mówić, że to Dowód DPZ (Dedekinda-Peana-Zermela).

Nie twierdzę, że ten ostatni dowód (niewątpliwie najlepszy w sensie logiki) należy wykładać adeptom matematyki. Teoria mnogości w ramach wstępu do matematyki ma poszerzyć i ugruntować znajomość języka struktur matematycznych. Subtelności warto jednak przynajmniej wzmiankować. Przecież ambicją matematyków-mnogościowców jest skonstruowanie prawie całego bogactwa matematyki, np. bogactwa struktur liczbowych, w ramach teorii mnogości. Jeśli więc dowód twierdzenia Cantora-Bernsteina, które ma posłużyć do zdefiniowania i uporządkowania liczb kardynalnych, skażony jest użyciem liczb (np. ciągów), to warto wspomnieć o remedium. Przy okazji – owym adeptom znającym ciągi – uzasadni się celowość korowodów z definicją par itp. niby-ciągów.

Bibliografia

[1] S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fund. Math. 6 (1924), 236–239.
[2] F. Bernstein, Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1901 (p. nieco zmieniony przedruk w [3]).
[3] F. Bernstein, *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Math. Ann. 61 (1905), 117–155.
[4] E. Bertram, P. Horák, *Some applications of graph theory to other parts of mathematics*, Math. Intellig. 21 (1999), 6–11.
[5] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
[6] G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Math. Ann. 21 (1883), 545–586 (przedruk w [7, 9]).
[7] G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Leipzig, 1883.
[8] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Ann. 46 (1895), 481–512 (przedruk w [9]; tł. na ang. i red. Ph.E.B. Jourdain: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, New York, 1915).
[9] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, red. E. Zermelo, Springer, Berlin, 1932.
[10] R. H. Cox, *A proof of the Schroeder-Bernstein theorem*, Amer. Math. Monthly 76 (1968), 508.
[11] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, 1888.
[12] D. Drasin, R. Gilmer, *Complements and comments*, Amer. Math. Monthly 79 (1971), 1104–1106.
[13] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Van Nostrand Reinhold Co., New York et al., 1960.
[14] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit & Co., Leipzig, 1914.
[15] T. J. Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland, Amsterdam; Amer. Elsevier, New York, 1973.
[16] W. Just, M. Weese, *Discovering Modern Set Theory. I: The Basics*, Amer. Math. Soc., 1996.
[17] D. König, *Sur les correspondances multivoques des ensembles*, Fund. Math. 8 (1926), 114–134.
[18] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akad. Verlag., Leipzig, 1936 (przedruk: Teubner Verlag., Leipzig, 1986).
[19] Jules König (cyt. jako Julius w [18]), *Sur la théorie des ensembles*, C. R. Acad. Sci. Paris 143 (1906), 110–112.
[20] A. Korselt, *Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes*, Math. Ann. 70 (1911), 294–296.
[21] R. Mańka, A. Wojciechowska, *O dwóch twierdzeniach Cantora*, Wiadom. Mat. 25 (1984), 191–198.
[22] J. Mioduszewski, *Twierdzenie Cantora-Bernsteina — znany dowód zapisany inaczej*, Matematyka 4'98 (272), rok 51 (1998), 207–211.
[23] J. Mioduszewski, *W sprawie artykułu Z. Skupienia* (*List do Redakcji*), Wiadom. Mat. 37 (2001), 181–182.
[24] Papy (avec F. Papy), *Mathématique moderne*, Wyd. M. Didier, Bruxelles–Paris, 1964.
[25] G. Peano, *Super theorema de Cantor-Bernstein*, Rend. del Circolo Matematico di Palermo 21 (1906), 360–366.

[26] G. Peano, *Super theorema de Cantor-Bernstein*, Rivista di Matematica 8 (no. 5), 136–157.
[27] H. Poincaré, *Les mathématiques et la logique*, Rev. de Metaphysique et de Morale 14 (1906) 294–317.
[28] H. Poincaré (tł. M.H. Horwitz), *Nauka i Metoda*, Nakład J. Mortkowicza, Warszawa, 1911, G. Centnerszwer; Lwów, Księgarnia H. Altenberga.
[29] M. Reichbach (później Reichaw), *Une simple démonstration du théorème de Cantor-Bernstein*, Colloq. Math. 3 (1955), 163.
[30] A. Schoenflies, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmanningfaltigkeiten*, Jahresber. Deutschen Math.-Verein. 8 (1900), Heft 2.
[31] E. Schröder, *Über G. Cantorsche Sätze*, Jahresber. Deutschen Math.-Verein. 5 (1896), Heft 1, 81–82.
[32] E. Schröder, *Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantorsche Sätze*, Nova Acta Leop. 71 (1898), 303–366.
[33] W. Sierpiński, *Cardinal and Ordinal Numbers*, PWN, Warszawa, 1958.
[34] Z. Skupień, *Prosty dowód twierdzenia Cantora-Bernsteina*, Wiadom. Mat. 35 (1999), 49–53.
[35] A. Zelevinsky, w: M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, 2001 (*Dowody z Księgi*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa, 2002, ss. 118–119).
[36] E. Zermelo, Göttinger Nachr. 10 (1901), 1–5 (p. Bernstein [3, s. 121]).
[37] E. Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Math. Ann. 65 (1908), 107–128.
[38] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* I, Math. Ann. 65 (1908), 261–281.
[39] (*Z żałobnej karty*) *Meir Reichaw* (1923–2000), Wiadom. Mat. 36 (2000), 189–191.