ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVI (2000)

Lech Maligranda (Luleå)
Witold Wnuk (Poznań)

Władysław Orlicz (1903–1990)

1. Biografia. W bieżącym roku mija dziesięć lat od śmierci profesora Władysława Orlicza, jednego ze współtwórców wielkich osiagnięć matematyki polskiej w zakresie szeroko rozumianej analizy. Swoją niezwykle aktywną, wielokierunkową działalność naukową prowadził nieprzerwanie przez 65 lat, w którym to czasie napisał ponad 170 artykułów i książek. Wyniki jego prac, często o charakterze pionierskim, dostrzeżone i uznane przez cały świat matematyczny, wywarły istotny wpływ na rozwój analizy, inspirowały i wytyczały kierunki badań. Na intensywność tych prac tylko niewielki wpływ miały nierzadkie dramatyczne okoliczności życia Profesora mające swe źrodło w skomplikowanych i tragicznych kolejach losu narodu polskiego.

Choć w roku 2000 przypada smutna rocznica śmierci Profesora, to już za 3 lata uczcić możemy setną rocznicę jego urodzin, gdyż właśnie 24 maja 1903 roku w Okocimiu, w rodzinie państwa Franciszka i Marii Orliczów, powitano trzeciego z kolei syna, któremu nadano imiona Władysław Roman. Starszymi braćmi Władysława byli Kazimierz i Tadeusz (późniejszy profesor Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego, specjalista z zakresu obróbki drewna), a młodszymi Michał (także on został profesorem obierając za przedmiot swoich zainteresowań klimatologię i meteorologię) oraz Zbigniew. Najmłodszy z braci zginął podczas walk toczonych o kształt granic Drugiej Rzeczypospolitej, a najstarszy stał się ofiarą nazizmu. Franciszek Orlicz był buchalterem w sławnym dzisiaj okocimskim browarze, któremu dyrektorował jego teść Michał Rossknecht, Radca Cesarski, Kawaler Stosownego Orderu Franciszka Józefa. Franciszek Orlicz wcześnie i niespodziewanie osierocił swoich synów ulegając przypadkowemu śmiertelnemu zatruciu. Matka chłopców wyszła później ponownie za mąż przyjmując nazwisko Patocka. Dzielnie i z oddaniem wypełniała swe rodzicielskie obowiązki potrafiąc wytworzyć i utrzymać głębokie więzi z dziećmi przez całe życie. Wywodząc się z inteligencji (spokrewniona była z rodziną Romerów, w tym z Eugeniuszem, autorem znanych atlasów geograficznych) doceniała rolę wykształcenia i nie zaniedbała należytej edukacji swoich synów, których dalsze losy dowiodły, iż ich talenty nie zostały zmarnowane. W pierwszych dwudziestu latach mijającego wieku rodzina Orliczów dość często zmieniała miejca pobytu. Wiązało się to z koniecznością zmiany szkół, ale fakt ten nie wpływał w sposób istotny na postępy w nauce Władysława, jaką pobierał w Tarnowie, morawskim Znaimiu, wreszcie we Lwowie, dokąd losy przyprowadziły Orliczów tuż po Pierwszej Wojnie Światowej. Władysław, szczególnie w starszych klasach, uczył się doskonale, co stwierdzają jego świadectwa szkolne, a wstępny okres edukacji zakończył 10 czerwca 1920 roku otrzymując w Państwowej Drugiej Szkole Realnej we Lwowie maturę. Zdał ją z odznaczeniem i podjął studia na Politechnice Lwowskiej. Nim stał się członkiem studenckiej braci, dał dowód swego patriotyzmu zgłaszając się ochotniczo do Armii Polskiej, aby czynnie uczestniczyć w wojnie przeciwko Rosji Radzieckiej, stwarzającej śmiertelne niebezpieczeństwo dla odradzającej się Rzeczypospolitej. Poświęcenie młodego Władysława było znaczne, bo jego sprawność fizyczna nie była imponująca, a poglądy na ludzi i świat nie pomagały w szybkiej adaptacji do wojskowego życia. Obowiązki żołnierskie starał się jednak wypełniać należycie. Szczęśliwie uniknął niebezpieczeństw „ogniowej próby”, gdyż zmagania wojenne zakończyły się przed skierowaniem jednostki, w której służył Władysław, do działań bojowych.

Studia politechniczne nie sprawiały Władysławowi Orliczowi trudności – z wynikiem celującym złożył m.in. egzaminy z matematyki i fizyki. Nie były one jednak dla niego dostatecznie fascynujące i już po roku podjął decyzję

Lwów 1917. Władysław Orlicz (pierwszy z lewej) z matką i braćmi o zmianie uczelni. Jedną z przyczyn owej zmiany była geometria wykreślna, przedmiot spędzający Władysławowi sen z powiek. Zdaje się, że natura, tak hojna w obdarzaniu go talentami, poskąpiła mu wyobraźni przestrzennej. Zapisał się na Wydział Filozoficzny (z którego wkrótce powstał Wydział Matematyczno-Przyrodniczy) Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie, rozpoczynając zgłębianie tajników matematyki. Otrzymał indeks nr 7012 z tytułami poszczególnych rubryk i pierwszą stroną w języku łacińskim. Dokument szybko się zapełnił i jego posiadacz zbierał później podpisy w nowej książeczce legitymacyjnej (takim mianem określano indeks teraz już z polskim nazewnictwem) z numerem 11372. Studiowanie matematyki wyniknęło, jak powiedział Profesor w jednym z wywiadów prasowych udzielonych w jesieni życia, z potrzeby zaspokojenia zainteresowań badawczych, którego nie dawała przygoda obcowania z literaturą, nawet tą największego formatu jaką czytywał. A były to dzieła Wilde'a, Prousta, Przybyszewskiego. Lwów był w okresie międzywojennym miastem bardzo szczególnym, o wyjątkowej atmosferze, jaką tworzyli wybitni naukowcy i twórcy kultury, osoby barwne,

Cursus II Per trimestre I : II — anni scholastici 1922/23 — Nro 7012

Nomen Magistri	Index scholarum	Quot horas	Adnotata
prof. Eustachy Żyliński	Teorja liczb algebraicznych	3	
prof. dr. Stan. Ruziewicz	Równania różniczkowe	3	
"	~~Wybrane kwestje z teorji funkcyj analit.~~	2	
"	Ćwiczenia z równań różniczkowych	1	
prof. S. Ruziewicz, prof. H. Steinhaus	Seminarjum matematyczne wyższe	2	
dr. Stefan Banach	Teorja funkcyj zmiennych rzeczywistych	4	
"	Podstawy geometrji różniczkowej	1	
"	Seminarjum matematyczne	1	
prof. dr. Stan. Loria	Wstęp do fizyki teoretycznej	4	

Trimestre absolutum testatur Decanatus

Strony z indeksu W. Orlicza z okresu studiów na Uniwersytacie Jana Kazimierza we Lwowie z podpisami S. Banacha, S. Lorii, S. Ruziewicza, H. Steinhausa, E. Żylińskiego o silnych, wyrazistych, fascynujących osobowościach, imponujące młodzieży, stanowiące dla nich wzorzec. Nie inaczej było i w środowisku matematyków. Adepci królowej nauk mieli możność uczenia się u mistrzów tej rangi co Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Antoni Łomnicki, Stanisław Ruziewicz, Eustachy Żyliński czy Kazimierz Ajdukiewicz, prowadzący wykłady z zakresu logiki i metodologii nauk. Pracę w szkolnictwie wyższym rozpoczyna Władysław Orlicz bardzo wcześnie, bo już w roku 1923, podejmując skromne obowiązki demonstratora przy Katedrze Matematyki Wydziału Filozoficznego Uniwersytetu Lwowskiego. Studia uniwersyteckie kończy w roku akademickim 1925/26, ale już od 1 sierpnia 1925 roku jest młodszym asystentem przy Pierwszej Katedrze Matematyki Uniwersytetu Jana Kazimierza. Zatrudnienie na asystenturze nie miało charakteru stałego – umowa o pracę dotyczyła zaledwie jednego roku i była sytematycznie odnawiana. Pierwszą pracę naukową, z zakresu teorii sumowalności, opublikował Profesor Orlicz w roku 1926 w Tohôku Mathematical Journal. Przez kolejne dwa lata słuchał wykładów z matematyki na Politechnice Lwowskiej prowadzonych na otwartym tam, staraniem profesora Bartla, Wydziale Ogólnym. Wśród wielu znakomitych wykładowców tego Wydziału znajdował się również profesor Kazimierz Kuratowski.

Przygotowanie rozprawy doktorskiej „Z teorji szeregów ortogonalnych" nie zajęło Władysławowi Orliczowi wiele czasu. Obronił ją 30 lipca 1928 roku. Profesor nigdy nie wyjaśnił dlaczego promotorem dysertacji nie był Hugo Steinhaus, najwybitniejszy ówczesny polski specjalista z tematyki szeregów ortogonalnych, lecz Eustachy Żyliński.

Rok 1928 przyniósł też ważną zmianę w życiu Profesora Orlicza, gdyż 12 lipca wstąpił w związek małżeński z panną Zofią Krzysikówną, asystentką przy Katedrze Fizyki Uniwersytetu Jana Kazimierza i nauczycielką w Żeńskim Gimnazjum Notre Dame we Lwowie. Żona Profesora była osobą bez reszty angażującą się w sprawy narodowe w chwilach szczególnie dla Polski ważnych i dramatycznych. Z pełnym poświęceniem pracowała w ochotniczych formacjach sanitarnych podczas walk o wschodnie tereny Rzeczypospolitej po Pierwszej Wojnie Światowej. Jako żołnierz Armii Krajowej, narażając niezliczoną ilość razy własne życie, ratowała polskich Żydów, a zwłaszcza żydowskie dzieci (jej bezpośrednią zasługą było m.in. uchronienie przed zagładą córki zamordowanego przez Gestapo Juliusza Schaudera). Osłabiała też przez długi czas zdrowie dostarczając Instytutowi Weigla swoją krew zawierającą przeciwciała zwalczające dur plamisty, które powstawały w wyniku bezpośredniego kontaktu ciała z wszami zakażonymi tą chorobą. W uznaniu wyjątkowych zasług pani Zofii Orlicz nadano jej, jeszcze w trakcie trwania Drugiej Wojny Światowej, Order Virtuti Militari. Władze komunistyczne wytoczyły jej w roku 1948 proces oskarżając o wydawanie nielegalnej prasy. W więzieniach spędziła ponad 5 lat (od marca 1948 do maja 1953).

Pani Zofia budziła sympatię i szacunek wszystkich, którzy ją znali. Chętnie szukano jej towarzystwa i słuchano tego co chciała powiedzieć, a do przekazania miała wiele i robiła to w sposób zajmujący. Zakończyła swoje barwne życie 5 listopada 1999 roku, które rozpoczęła 26 września 1898 w bośniackiej miejscowości Foči.

W latach dwudziestych Profesor Orlicz poddał się dość skomplikowanej procedurze zdobywania uprawnień do nauczania w szkolnictwie średnim matematyki i fizyki, jakich nie posiadał mimo pracy w szkole wyższej. Oprócz egzaminu z zakresu pedagogiki i odbycia praktyki, należało przejść pomyślnie egzamin z przedmiotu kierunkowego oraz złożyć pisemną pracę na zadany temat. W latach 1927/29 Władysław Orlicz był dodatkowo zatrudniony, jako nauczyciel, w wymienionym już wcześniej Prywatnym Gimnazjum Żeńskim SS de Notre Dame, a w roku szkolnym 1930/31 znów związał się z wojskiem nauczając w Korpusie Kadetów nr 1 we Lwowie.

Koniec roku 1929 i część 1930 spędził profesor Orlicz w znanym i cenionym niemieckim ośrodku naukowym jakim była i jest Getynga, dokąd

Władysław Orlicz i jego żona Zofia, 1945 r.

udał się celem studiowania wcale nie matematyki, ale mechaniki teoretycznej. Wyjechał dzięki stypendium uzyskanemu w Ministerstwie Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego. Otrzymał bezpłatny paszport i 8000 ówczesnych złotych. W Niemczech zetknął się z wieloma znakomitościami w tym z E. Landau'em, R. Courantem, H. Bohrem, M. Bornem. Wspominając po latach swój pobyt w Getyndze opowiadał Profesor Orlicz o swoim pierwszym spotkaniu z E. Landau'em, które miało charakter nieformalnego egzaminu, kiedy to Landau sprawdzał wiedzę stypendysty z zakresu znajomości aktualnych wyników badań nad zbieżnością szeregów Fouriera. Ten krótki okres miał wywrzeć bardzo znaczący wpływ na dalszy przebieg pracy Profesora. Nawiązał tu kontakty, które trwały i owocowały przez lata (m.in. z Gotfriedem Köthe, wybitnym specjalistą z zakresu analizy funkcjonalnej, dziedziny gdzie aktywność naukowa Władysława Orlicza była największa). W Getyndze rozpoczął także, początkowo we współpracy z lwowskim kolegą Wilhelmem Z. Birnbaumem, a później samodzielnie, badanie przestrzeni funkcyjnych, nazwanych po latach przestrzeniami Orlicza. Z terminem „przestrzenie Orlicza" wiążą sie dwie anegdoty. Pierwsza z nich głosi, iż kiedyś Profesor złożył podanie o przydział w Poznaniu większego mieszkania. Urzędnik odmówił spełnienia prośby argumentując, że nie może ubiegać się o dodatkową powierzchnię mieszkalną właściciel całej przestrzeni. Druga z angdot dotyczy odpowiedzi, jakiej Profesor udzielał pytającym o cel rozważania ogólniejszych od L^p przestrzeni Orlicza. Odpowiedź ta brzmiała następująco: proszę mi najpierw powiedzieć, po co rozważać przestrzenie L^p zamiast ograniczyć się do L^2.

Z początkiem października 1930 roku Władysław Orlicz zmienił miejsce pracy. Został starszym asystentem w Drugiej Katedrze Matematyki na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lwowskiej. Kierownik tejże Katedry, profesor Antoni Łomnicki, interesował się bardzo zastosowaniami matematyki i był autorem szeregu artykułów naukowych na temat probabilistyki i kartografii matematycznej. Młody współpracownik profesora Łomnickiego, choć nigdy osobiście nie rozwijał twórczo dziedzin matematyki stosowanej, dobrze rozumiał ich doniosłość i znaczenie. W późniejszych latach, kiedy zajmował się szkoleniem kadry naukowej, zawsze zachęcał młodszych kolegów do podejmowania tej problematyki sugerując odpowiednie tematy prac seminaryjnych i dyplomowych. Wspierał też swym autorytetem wszelkie inicjatywy na rzecz zastosowań, działając aktywnie w Komitecie Nauk Matematycznych Polskiej Akademii Nauk. Zawsze chętnie przyjmował zaproszenia do uczestnictwa w Krajowych Konferencjach Zastosowań Matematyki organizowanych przez Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.

Kariera Władysława Orlicza rozwijała się bardzo dynamicznie. W 6 lat po uzyskaniu stopnia doktora, a dokładnie 22 czerwca 1934 roku, został

3

charakterystycznymi e_i. Oczywiście $h(s(t)) = \sum_{1}^{n} h(a_i)\chi_{e_i}(t)$

2. Wprowadźmy następujące oznaczenia dla $x \in S$

$$\mathcal{I}(x) = \int_T x(t)\,d\mu, \quad \mathcal{I}_\varphi(x) = \int_T \varphi(|x(t)|)\,d\mu, \quad \mathcal{I}_\varphi(x,e) = \int_e \varphi(|x(t)|)\,d\mu,\ e \in \mathcal{E}.$$

Jak wiadomo $\mathcal{I}_\varphi(x)$ jest w S' modularem w sensie [ ].

Oznaczmy

$$L^{*\varphi} = \{x \in S : \mathcal{I}_\varphi(\lambda x) < \infty \text{ przy pewnym } \lambda > 0\},$$

$$L^{*\varphi}_f = \{x \in S : \mathcal{I}_\varphi(\lambda x) < \infty \text{ przy każdym } \lambda > 0\},$$

$$K^\varphi = \{x \in L^{*\varphi} : \mathcal{I}_\varphi(x) \le 1\},\ K^\varphi_f = \{x \in L^{*\varphi}_f : \mathcal{I}_\varphi(x) \le 1\}.$$

Jak wiadomo $L^{*\varphi}$ jest przestrzenią wektorową przy standartowych działaniach na funkcjach i przy określeniu równości $x = y$ w sensie równości $x(t) = y(t)$ μ-prawie wszędzie w T.

W $L^{*\varphi}$ można określić F-normę zupełną przyjmując

$$\|x\|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathcal{I}_\varphi(x/\varepsilon) \le \varepsilon\}.$$

$L^{*\varphi}_f$ (przestrzeń elementów skończonych) jest podprzestrzenią wektorową $L^{*\varphi}$, domkniętą względem normy $\|x\|_\varphi$.

Relacja $\|x_n\|_\varphi \to 0$ jest równoważna z relacją $\mathcal{I}_\varphi(\lambda x_n) \to 0$ przy każdym $\lambda > 0$. Oprócz zbieżności normowej w $L^{*\varphi}$ używa się zbieżności modularnej. Ciąg $(x_n) \subset L^{*\varphi}$ nazywa się modularnie zbieżny do $x \in L^{*\varphi}$, w symbolach $x_n \xrightarrow{m} x$,

Rękopis pracy W. Orlicza

doktorem habilitowanym, przedstawiając Radzie Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Jana Kazimierza rozprawę „Z badań nad układami ortogonalnemi". Rezultaty prac Profesora nad układami ortogonalnymi miały charakter fundamentalny i wnosiły bardzo istotny wkład w rozwój tej części analizy, co zostało podkreślone np. w książce B. S. Kashina i A. A. Saakjana „Szeregi ortogonalne", wydanej 50 lat później. Podobnie jak dzisiaj, w okresie przedwojennym uzyskiwało się wyższy stopień doktorski na podstawie opublikowanych wyników prac badawczych. Do dziś zachowała się pewna liczba egzemplarzy broszury zawierającej rozprawę habilitacyjną Profesora. Jedną z nich autor ofiarował żonie, zaopatrując go w bardzo osobistą, intymną dedykację: Kochanemu Bureczkowi – Rudasek.

Znaczący i systematycznie wzbogacany dorobek Władysława Orlicza został doceniony przez władze obu lwowskich uczelni. Począwszy od 1 października 1935 roku został awansowany na stanowisko adiunkta na Politechnice i równocześnie otrzymał *veniam legendi* na Uniwersytecie, co oznaczało prawo wykładania. Kolejny szczebel kariery naukowej pokonał dwa lata później, kiedy to z nominacji prezydenta Ignacego Mościckiego w dniu 14 września 1937 roku został profesorem nadzwyczajnym matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Poznańskiego, obejmując stanowisko po zmarłym Kazimierzu Abramowiczu. Opuszczenie Lwowa nie było dla Władysława Orlicza decyzją łatwą. Tracił codzienny kontakt z najsilniejszą w owych czasach w skali świata grupą wybitnych matematyków rozwijających analizę funkcjonalną. Grupę tę nazwano później Lwowską Szkołą Matematyczną. Zasłynęła ona także niekonwencjonalnymi metodami pracy. Do legendy przeszły systematyczne spotkania i dyskusje jej członków w lokalu Kawiarni Szkockiej. Tam powstawała słynna „Księga Szkocka". Był to gruby zeszyt-notatnik, do którego wpisywano problemy, jakich w danej chwili nie udawało się rozwiązać. Często stawiający problem dopisywał obietnicę uhonorowania osoby, która znajdzie rozwiązanie, nagrodą w postaci butelki wina lub piwa. Za rozwiązanie zagadnienia istnienia bazy w przestrzeni Banacha Stanisław Mazur zobowiązał się sprezentować żywą gęś. Uskrzydloną nagrodę odebrał z rąk fundatora szwedzki matematyk Per Enflö w roku 1972. Jak widać, na uporanie się z niektórymi problemami trzeba było czekać wiele lat. Cóż, we Lwowie nie zajmowano się banałami. Znakomita większość pytań wpisanych do Księgi Szkockiej ma już dzisiaj swoje odpowiedzi. Pytań tych było ponad 190. Autorem, lub współautorem, 14 spośród nich był Profesor Orlicz (zainteresowanych Księgą Szkocką i losami zapisanych tam problemów odsyłamy do książki R. D. Mauldina, *The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1981, MR 84m:00015). W Poznaniu owych czasów uprawiano „twardą analizę" i funkcje analityczne, ale ośrodek w tym mieście, bardzo skromny kadrowo, nie mógł w żaden sposób równać się ze Lwowem. Wspominając swoje poznańskie początki lat 1937–1939 Władysław Orlicz stwierdzał, że takich zadań z całek krzywoliniowych i powierzchniowych, jakie przeliczano na ćwiczeniach w Poznaniu, nigdy przedtem nie widział i próbując zmierzyć się z nimi samodzielnie miewał często ogromne kłopoty. Plotkując o sprawach obsady stanowisk tego okresu można dodać, że na profesurę w Poznaniu kandydował też przyjaciel Władysława Orlicza, Stanisław Mazur, człowiek numer 2, zaraz po Banachu, Szkoły Lwowskiej. Jak opowiadała wiele lat później pani Zofia Orliczowa, jedną z przyczyn odrzucenia wniosku Mazura były nieskrywane przez niego mocno lewicowe poglądy. Jesienią 1939 roku powinien też rozpocząć pracę na Uniwersytecie Poznańskim Józef Marcinkiewicz, doskonale zapowiadający się uczeń Antoniego Zygmunda, profesora w Wilnie.

Wybuch Drugiej Wojny Światowej zastał Profesora Orlicza we Lwowie, gdzie przebywał na wakacjach. Do Poznania nie miał oczywiście po co wracać. Tragiczne lata okupacji spędził we Lwowie mieszkając przy ulicy Kopcowej 3. Znajomości w tutejszym środowisku okazały się niezwykle pomocne w znalezieniu pracy, gdyż już w listopadzie 1939 roku został zaangażowany na Politechnice, gdzie objął wakującą adiunkturę po nieobecnym Stefanie Kaczmarzu (nikt nie wiedział wtedy, że poległ on pod Umiastowem). Mógł też wykładać na Uniwersytecie Lwowskim – w okresie od 31 grudnia 1939 do 22 czerwca 1941 był profesorem przy Katedrze Matematyki. Władysław Orlicz uniknął szczęśliwie losu tysięcy rodaków wywiezionych przez Rosjan na odległy Wschód, nie znalazł się też w grupie wybitnych polskich uczonych i twórców kultury zamordowanych przez nazistowskich zbrodniarzy na Wzgórzach Wóleckich w początkach lipca 1941 roku, po opanowaniu Lwowa przez Niemców. W czasie hitlerowskich rządów pracował oficjalnie jako nauczyciel w Publicznej Rzemieślniczej Szkole Zawodowej, a zupełnie nieoficjalnie prowadził tajne nauczanie gimnazjalne i akademickie. Zdumiewającym i niewiarygodnym zdaje się być fakt wypromowania przez Władysława Orlicza pierwszego doktora, którym został Andrzej Alexiewicz, broniąc w maju 1944 roku rozprawy „O ciągach operacji" przed Komisją złożoną z profesorów: Nikliborca, Orlicza i Zierkhoffera. Z obroną doktorską profesora Alexiewicza wiąże się pewna anegdota. Otóż po kilkudziesięciu latach, w czasie spotkania szerszego grona matematyków w Poznaniu z okazji imienin Profesora Orlicza, ten ostatni zaczął wspominać ową obronę podkreślając, że doktorant był doskonale przygotowany i egzaminujący byli bardzo zadowoleni z udzielanych im odpowiedzi. Wówczas przysłuchujący się tej relacji profesor Albrycht powiedział: nie dziwię się zachwytom Komisji, bo dobrze pamiętam, iż w dniu obrony było silne bombardowanie Lwowa i zapewne huk eksplozji zagłuszał złe odpowiedzi. W swojej książce *Wspomnienia i zapiski* (Aneks, Londyn 1992) Hugo Steinhaus wymienia Władysława Orlicza jako osobę, dzięki której uratowano znaczną część zbiorów bibliotecznych istniejących przy grupie seminaryjnej działającej we Lwowie. Po wypędzeniu Niemców latem 1944 roku, nowe władze ukraińskie szybko reaktywowały lwowskie uczelnie i przywróciły do pracy dawną, ocalałą kadrę. Profesor Orlicz przez kilka miesięcy, od września 1944 roku do początków lutego 1945 roku, był kierownikiem Katedry Teorii Funkcji w Państwowym Uniwersytecie Lwowskim im. Iwana Franki. Wypadki ostatniego okresu wojny przekonały go, że Lwów nie znajdzie się w granicach odradzającej się Polski. Opuścił na zawsze miasto semper fidelis Rzeczypospolitej i 5 maja 1945 roku przybył do Poznania, gdzie przyszło mu spędzić resztę życia.

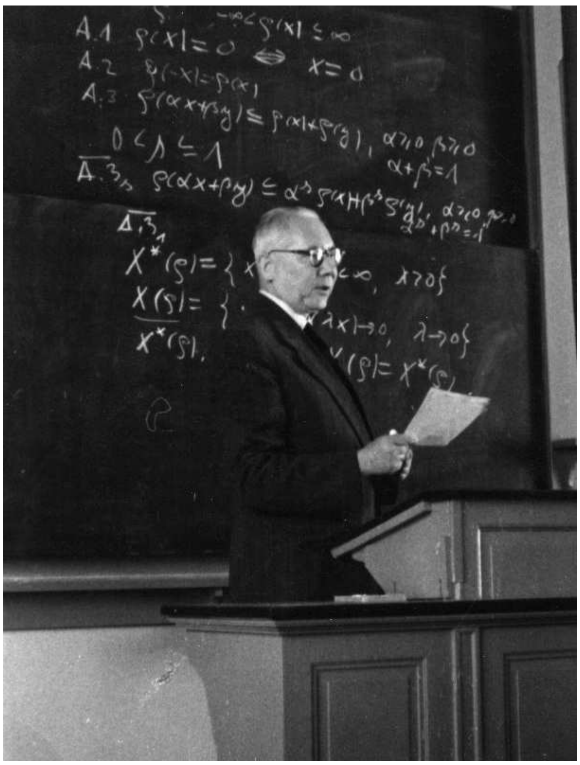
Uniwersytet Poznański bardzo ucierpiał w wyniku działań wojennych. Straty w każdej dziedzinie były ogromne, problemy i trudności niewyobrażalne. Zrujnowane, zalewane deszczami sale wykładowe Collegium Chemicum, rozwleczone, częściowo spalone zbiory biblioteczne, malutkie, zaledwie kilkuosobowe grono współpracowników – oto cała rozpaczliwa baza powojennej poznańskiej matematyki uniwersyteckiej. Jedyny optymistyczny akcent sytuacji stanowiła znaczna liczba chętnych do nauki studentów. Dydaktyka bardzo obciążała szczupłą kadrę skupioną wokół Profesora Orlicza, bo zajęcia trzeba było prowadzić nie tylko na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii, ale również na innych kierunkach przyrodniczych. Jesienią 1945 roku Władysław Orlicz otrzymał propozycję pracy w tworzonej we Wrocławiu śląskiej Szkole Głównej razem z grupą swoich lwowskich kolegów i mistrzów. Nie uległ jednak namowom, m.in. Hugona Steinhausa, i pozostał w mieście nad Wartą. W trakcie rozmów ze Steinhausem podjął inicjatywę reaktywowania *Studia Mathematica.* Liczne obowiązki organizacyjne i związane z kształceniem nie hamowały prac badawczych Profesora, prowadzonych samodzielnie i we współpracy przede wszystkim ze Stanisławem Mazurem i Andrzejem Alexiewiczem. Osiągnięcia naukowe przyniosły mu 21 lipca 1948 roku nominację na profesora zwyczajnego. W tym też czasie podjął dodatkowo zatrudnienie w Państwowym Instytucie Matematycznym w Warszawie, włączonym wkrótce w strukturę Polskiej Akademii Nauk jako Instytut Matematyczny. Związki Profesora z Instytutem Matematycznym PAN trwały do końca jego życia. Był tam przez pewien czas kierownikiem Zakładu Analizy Funkcjonalnej, długoletnim członkiem Rady Naukowej Instytutu i zastępcą jej przewodniczącego. Władysław Orlicz dostąpił najwyższych zaszczytów możliwych do uzyskania w Akademii – w roku 1956 został członkiem korespondentem, a w pięć lat później członkiem rzeczywistym PAN. Swoje umiejętności i energię poświęcał nieustannie Uniwersytetowi Poznańskiemu, gdzie aż do wiosny 1970 roku kierował Katedrą Matematyki I na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii.

Różnorodna działalność Profesora Orlicza nie dobiegła końca z chwilą przejścia na emeryturę w latach siedemdziesiątych. Nadal prowadził badania i publikował ich wyniki, kontynuował kształcenie kadry naukowej opiekując się kolejnymi doktorantami i prowadząc w siedzibie Oddziału Poznańskiego Instytutu Matematycznego PAN (utworzonego oczywiście jego staraniem), znane wszystkim „Konwersatorium z Wybranych Zagadnień Analizy Funkcjonalnej", potocznie nazywane „Seminarium Orlicza". Władysław Orlicz wypromował w ciągu 40 lat 39 doktorów (numer 37 ma pierwszy z autorów tego artykułu). Jest wśród nich wielu znanych profesorów, a także członek Polskiej Akademii Nauk. Imponująca jest ponadto liczba prac magisterskich przygotowanych pod jego kierunkiem. Jest ich ponad 500 i to z najrozmaitszej tematyki – w tym wiele dotyczących zastosowań, do których Profesor zawsze przykładał wielką wagę. Tematy prac, czy to doktorskich, czy magisterskich, były zawsze dostosowane do rozmiarów uzdolnień i możliwości ucznia. Tym wybitnym przyszło zmagać się z zagadnieniami niebanalnymi, ambitnymi, zmuszającymi do ciągłego dokształcania się, czasochłonnych studiów literaturowych i ogromnej pracy. Promotor nigdy nie odmawiał rady, pomocy i wskazówek. A intuicję, wiedzę, doświadczenie, znajomość literatury miał imponujące i zadziwiał nimi swych uczniów do końca życia. Życzliwość Profesora w stosunku do młodszych kolegów polegała też na tym, że chętnie przedstawiał ich prace do publikacji w *Biuletynie* Polskiej Akademii Nauk. Nie sposób przeliczyć recenzji, choćby rozpraw doktorskich, habilitacyjnych, czy wniosków o profesurę napisanych przez Władysława Orlicza. Wśród ocenianych przez niego dysertacji były m.in. prace takich znakomitości jak profesorów Aleksandra Pełczyńskiego i Czesława Bessagi.

Wielką popularnością cieszyło się w Poznaniu wspomniane wyżej seminarium, systematycznie prowadzone przez Profesora Orlicza przez wiele lat w środy w godzinach 12.30–14.00. Uczestniczyli w nim pracownicy naukowi uczelni zachodniej i północno-zachodniej Polski. Wysoką frekwencję zapewniała nie tylko osoba prowadzącego, ale przede wszystkim dobór zróżnicowanej tematyki, bardzo częsty udział wybitnych specjalistów z kraju i z zagranicy, zaszczyconych zaproszeniem Profesora do wystąpienia na jego seminarium. Stale zachęcani do prezentacji swoich wyników byli młodzi matematycy rozpoczynający karierę naukową. Nieustanna dbałość o utrzymanie jak najszerszego spektrum matematycznej problematyki poruszanej w trakcie tych spotkań było wyrazem niezwykle szerokich zainteresowań Władysława Orlicza, wykraczających bardzo daleko poza ulubioną analizę funkcjonalną i niechęci do wąskich specjalizacji. Podstawowe znaczenie miała dla niego motywacja podejmowania określonych badań i demonstrowanie niebanalnych przykładów dowodzących istotnych wartości nowych wyników. Zdarzało mu się okazywać zniecierpliwienie w sytuacjach, gdy prelegent przedstawiał uogólnienia znanych pomysłów i rozwiązań, ale nie potrafił wykazać, że wnoszą one coś rzeczywiście nowego, że nie są, jak mawiano, „uogólnieniami zrobionymi dla uogólnień". Profesor często prowokował udział sali w prelekcji zadając pytania nie tylko wygłaszającemu odczyt, ale także tym spośród słuchaczy, którzy zajmowali się tematyką podobną do odbywającego się odczytu. Profesor siedział zawsze w pierwszym rzędzie na drugim krześle licząc od drzwi. Zwracając się do sali zazwyczaj obracał się w prawo i jeśli nie dojrzał osoby, do której chciał zaadresować pytanie, na ogół rezygnował z jego postawienia. Zdarzały się seminaria, że przybyli siadali w taki sposób, iż tworzył się trójkąt prostokątny, którego jednym z wierzchołków był Profesor, a reszta uczestników mieściła się poniżej przeciwprostokątnej, czyli poza zasięgiem wzroku Profesora po jego obrocie w prawo. Każde seminarium kończyło się podziękowaniami Profesora i krótkim komentarzem, a często także uwagami zawierającymi sugestie co do kierunków dalszych prac i pytaniami o związki przedstawionych twierdzeń z wcześniejszymi, a zwłaszcza klasycznymi wynikami i zagadnieniami pokrewnymi. Bez trudu wychwytywał części dowodów zawierające subtelności i domagał się wtedy przedstawienia rzetelnych argumentów, nie godząc sie na uzasadnienie „przez machanie rękami". Bardzo rzadko w pierwszym rzędzie obok Profesora siadywał ktoś jeszcze. Bywali to prawie wyłącznie zaproszeni specjalnie goście, kolega Przemysław Kranz, mający kłopoty ze słuchem, i pani docent Wanda Matuszewska, bliski, wieloletni współpracownik Władysława Orlicza, angażująca się w codzienną pomoc, a później w opiekę nad swym Mistrzem. Wejście pani docent na salę z wielkim kluczem od gabinetu Profesora w ręku i ciche zamknięcie przez nią drzwi oznaczało nieodwołalne rozpoczęcie seminarium.

Środa, ze względu na seminarium, była dniem, kiedy to Profesor przychodził do Oddziału Poznańskiego IM PAN już w południe, podczas gdy w pozostałe dni robocze pojawiał się niezmiennie o godzinie 13.00. Rozkład jego zajęć był ściśle ustalony. Do 15.00 można było prosić Profesora o pomoc w różnych sprawach, młodsi koledzy zamieniali się w sekretarzy przepisując i wygładzając pisma, które Profesor dyktował, a potem uważnie czytał i wreszcie podpisywał. Nie zwalniał sekretarza do momentu, aż ujrzał zaklejoną, właściwie zaadresowaną kopertę z pismem w środku. Nigdy nie zapominał zajrzeć do Redakcji *Commentationes Mathematicae*, gdzie pytał o nadesłane nowe prace, czytał nadchodzące recenzje, kontrolował przebieg przygotowań do publikacji kolejnych tomów. Czas między 15.00 a 17.00 przeznaczony był na wypoczynek, tzn. drzemkę w gabinecie. Pani docent Matuszewska pilnie czuwała, aby nikt nie zakłócał spokoju. Posuwała się niekiedy do wyproszenia z Biblioteki, bądź sekretariatu, profanów nieobeznanych z uświęconym obyczajem. Jedynymi osobami tolerowanymi w tych godzinach na terenie Oddziału byli Robert Knast, Lech Maligranda i Witold Wnuk. Jeśli ktoś był na tyle nieostrożny, że ośmielił się użyć dzwonka i próbował dostać się do Oddziału, narażał się na surową odprawę ze strony pani docent Matuszewskiej, która przez wąską szparę w drzwiach wejściowych stanowczo wybijała przybyłemu z głowy niedorzeczny pomysł przekroczenia progu Instytutu. Jednak po 17.00, i to aż do 21.00 czy nawet 21.30, prawie każdy był znów mile widzianym gościem. Około 21.30 Profesor kończył dzień i wyruszał do domu kierując się na pobliską ulicę Karola Libelta pod numer 22. Bardzo charakterystyczny był sposób zwracania się Władysława Orlicza do osób znanych mu i związanych w jakiś sposób z matematyką. Po oczywistym „dzień dobry" padały zawsze słowa „Panie Kolego" lub „Koleżanko" (rzadziej „Pani Aniu", „Pani Zosiu" itp.).

Władysław Orlicz uczestniczył w licznych wydarzeniach ważnych dla międzynarodowej społeczności matematycznej. Brał udział w Kongresach Matematycznych w Oslo, Edynburgu, Sztokholmie i Warszawie, gdzie był honorowym prezydentem Kongresu. Przyjmował zaproszenia do udziału w konferencjach zagranicznych, wizytował wiele uczelni europejskich (zwłaszcza niemieckich). Jego sława sięgała daleko poza stary kontynent. Jesienią 1958 roku przebywał w Chinach (Pekin, Szanghaj, Kanton). Odwiedził Jerozolimę i Kanadę. Uniwersytet York w Toronto wyróżnił Profesora zaszczytnym tytułem doktora *honoris causa* (w roku 1974). Podobnie uczyniły dwie uczelnie poznańskie: Politechnika w 1978 roku, a Uniwersytet w 1983 roku.



Wykład W. Orlicza, Halle, 1961 r.

Wspominając o aktywności Władysława Orlicza na różnych polach nie sposób pominąć jego zasług położonych dla wydawnictw matematycznych. Po Drugiej Wojnie Światowej należał, jak już wspomniano poprzednio, do inicjatorów reaktywowania *Studia Mathematica*, a od 1961 roku pełnił niełatwą funkcję redaktora tego znamienitego czasopisma. Przez 35 lat (1955–1990) pozostawał redaktorem *Commentationes Mathematicae* (*Roczników Polskiego Towarzystwa Matematycznego*).

Profesor Orlicz angażował się również w działalność towarzystw naukowych, a przede wszystkim w działalność Polskiego Towarzystwa Matematycznego, którego był prezesem w okresie 1977–1979 i wieloletnim członkiem honorowym. Przez 18 lat prezesował Oddziałowi Poznańskiemu Towarzystwa. Przez bardzo długi czas kierował Wydziałem Trzecim Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, organizacji bardzo zasłużonej dla Wielkopolski, istniejącej już od ponad 150 lat. Także ona zaliczyła Władysława Orlicza w poczet swoich członków honorowych. Aż do końca życia należał do Warszawskiego Towarzystwa Naukowego. Wstąpił również do grona członków Polskiego Towarzystwa Filozoficznego.

Dokonania Władysława Orlicza w zakresie pracy naukowo-badawczej, pedagogicznej i organizacyjnej były często honorowane najrozmaitszymi nagrodami i wyróżnieniami, wśród których nie brakowało zagranicznych (Profesor został laureatem Fundacji im. Alfreda Jurzykowskiego w 1973 roku) i wysokich odznaczeń państwowych (Krzyż Komandorski Orderu Odrodzenia Polski, Złoty Krzyż Zasługi). Dwukrotnie otrzymał indywidualną Nagrodę Państwową (drugiego stopnia w 1952 roku i pierwszego stopnia w 1966 roku), a także imponującą liczbę medali nadanych przez władze miejskie i regionalne, organizacje, instytucje i towarzystwa. Władysław Orlicz cenił sobie zwłaszcza wyróżnienia przyznawane matematykom, a poszczycić się mógł m.in. Nagrodą im. Stefana Banacha Polskiego Towarzystwa Matematycznego (1948) i Medalem Wacława Sierpińskiego (1979). Otrzymał też, w roku 1973, Medal im. Kopernika przyznawany przez Polską Akademię Nauk.

Profesor nie marnował najmniejszej okazji, aby popularyzować matematykę. Zawsze chętnie udzielał wywiadów, podkreślając w nich osiągnięcia i wysoką pozycję matematyków polskich. Starał się pokazać wartość i piękno królowej nauk oraz zmienić postrzeganie przez ogół tej absolutnie wyjątkowej i wspaniałej dziedziny wiedzy jako czarnego luda. Matematykę określał jako swobodny tok myśli i pojęć, które matematyk, podobnie jak czyni to muzyk z dźwiękami, a poeta ze słowami, składa w twierdzenia i teorie.

Łatwo odpowiedzieć na pytanie, czym była matematyka dla Władysława Orlicza. Była wszystkim, albo prawie wszystkim, bo obok matematyki zawsze interesował się filozofią i naukami przyrodniczymi, chętnie czytając publikacje prezentujące ich nowe osiagnięcia. Matematyka była bez wątpienia jego przeznaczeniem – zawładnęła nim bez reszty we wczesnej młodości i zauroczyła na ponad 65 lat. Czuł ją i rozumiał bardzo głęboko, w stopniu dostępnym tylko nielicznym. Matematyka była z nim również w momencie śmierci, która nastąpiła wieczorem 9 sierpnia 1990 roku zaskakując go nad korektą pracy przyjętej do druku w *Mathematica Japonica.*

Śmierć Władysława Orlicza wywołała wielkie poruszenie w całym środowisku matematycznym. Z autentycznym żalem i smutkiem oddawano się refleksji nad odejściem wielkiego uczonego, ostatniego członka Lwowskiej Szkoły Matematycznej, współtwórcy jej potęgi i ponadczasowych dokonań. Profesor Orlicz stał się postacią legendarną już za życia. Upływający czas nie zaciera tej legendy. Żyje ona wciąż we wdzięcznej pamięci jego uczniów i następców czerpiących obficie ze spuścizny Profesora Władysława Orlicza. Zorganizowali oni szereg konferencji i sesji naukowych poświęconych Władysławowi Orliczowi. Jedno z takich spotkań, „Orlicz Memorial Conference”, miało miejsce wiosną 1991 roku na Uniwersytecie Mississippi w Oxford (USA), gdzie odczyty zaprezentowali: G. Buskes, J. Diestel, N. J. Kalton, M. A. Khamsi, A. Kamińska, I. Labuda, L. Maligranda, S. J. Montgomery-Smith, M. Nawrocki, M. M. Neumann, A. L. T. Paterson, J. Roberts. Odczyty te zostały opublikowane w *Proceedings of the Orlicz Memorial Conference held in Oxford*, *MS*, *USA*, *March 21–23*, *1991* (ed. P. Kranz and I. Labuda), Oxford, MS, The University of Mississippi, Department of Mathematics (1991), 132 str., Zbl. 741.00011.

W ramach międzynarodowej konferencji „Function Spaces V”, zorganizowanej przez Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu w dniach 28 sierpnia – 2 września 1998 roku, odbyła się sesja naukowa poświęcona Władysławowi Orliczowi, na której jego uczniowie przedstawili wystąpienia o dorobku swojego Mistrza. Włączono je, wraz z notą biograficzną, do materiałów tejże konferencji. Ukazały się one w książce: *Function Spaces*, *Proceedings of the Conference on Function Spaces held in Poznań in 1998*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics No. 213, Marcel Dekker, New York 2000.

2. Dorobek naukowy. Poniżej omówiony zostanie dorobek naukowy Profesora Orlicza. Nasza uwaga skupiona zostanie przede wszystkim na tych jego wynikach, które trafiły do klasyki, do kanonu wiedzy matematycznej i przyniosły ich autorowi największe uznanie. Wyników takich jest niemało i konieczna jest ich selekcja. Wybór, jakiego dokonaliśmy, jest na pewno skażony sporą dozą subiektywizmu, czego jednak bardzo trudno uniknąć. Mamy nadzieję, że nie wprawimy w nadmierną irytację czytelników, którzy inaczej postrzegają rangę i znaczenie dokonań naukowych Władysława Orlicza.

Dorobek naukowy Profesora Orlicza można podzielić na kilka grup tematycznych:

A. Zbieżność bezwarunkowa i szeregi funkcyjne,

B. Przestrzenie Orlicza,

C. Indeksy Matuszewskiej-Orlicza,
D. Przestrzenie F-unormowane i przestrzenie Saksa,
E. Teoria sumowalności,
F. Funkcjonały ortogonalnie addytywne i przestrzenie modularne,
G. Operatory wielomianowe,
H. Interpolacja operatorów,
I. Równania różniczkowe – twierdzenia generyczne,
J. Miara i całka. Funkcje rzeczywiste. Funkcje o skończonej wariacji.

Omówienie każdej grupy tematycznej kończymy listą monografii i artykułów przeglądowych (rzadziej podajemy tam prace oryginalne), w których znaleźć można szersze komentarze dotyczące znaczenia badań Profesora Orlicza i rozwoju jego idei. Pozycje te cytowane są w tekście z użyciem symbolu [C]. Natomiast prace Władysława Orlicza numerowane są zgodnie z ich spisem zamieszczonym w dalszej części artykułu.

A. Zbieżność bezwarunkowa i szeregi funkcyjne. Przypomnijmy, że jeśli τ jest topologią na przestrzeni liniowej X, to szereg $\sum_1^\infty x_n$ elementów tej przestrzeni nazywa się:

— *bezwarunkowo zbieżnym* (względem τ), gdy τ-zbieżny jest każdy z szeregów $\sum_1^\infty x_{\pi(n)}$, gdzie π oznacza dowolną permutację zbioru liczb naturalnych,

— *podszeregowo zbieżnym* (względem τ), gdy τ-zbieżny jest każdy podszereg $\sum_1^\infty x_{n_k}$, gdzie (n_k) jest dowolnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych.

Profesor Orlicz używał terminu „szereg doskonale zbieżny" zamiast „szereg podszeregowo zbieżny". Wiedział on, że w przestrzeniach Banacha zbieżność bezwarunkowa i podszeregowa w topologii normowej pokrywają się (fakt ten opublikował dość późno, bo dopiero w roku 1933). Zainicjował też, trwające przez wiele lat, badania związków między różnymi rodzajami zbieżności szeregów w różnych topologiach, najwięcej uwagi poświęcając właśnie zbieżności bezwarunkowej i podszeregowej. W pracy [5] z roku 1929 sformułował następujące twierdzenie:

Twierdzenie Orlicza. *Szereg $\sum_1^\infty x_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w ciągowo słabo zupełnej przestrzeni Banacha X wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ dla wszystkich liniowych i ciągłych funkcjonałów x^* na X.*

Analizując dowód powyższego twierdzenia Władysław Orlicz zauważył możliwość opuszczenia założenia ciągowej słabej zupełności przy równoczesnej konieczności zastąpienia warunku $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ silniejszym założeniem podszeregowej zbieżności szeregu $\sum_1^\infty x_n$ w słabej topologii (w klasie ciągowo słabo zupełnych przestrzeni Banacha pojęcia te są równoważne).

Fakt ten został przedstawiony w trakcie jednego ze spotkań lwowskich matematyków, ale Profesor nie zdecydował się na opublikowanie ulepszonej wersji twierdzenia, nie doceniając wówczas pełnej jego wartości.

Twierdzenie Orlicza w zmienionej wersji:

TWIERDZENIE ORLICZA–PETTISA. *Szereg* $\sum_1^\infty x_n$ *jest bezwarunkowo zbieżny* (*w topologii normy*) *wtedy i tylko wtedy*, *gdy jest podszeregowo zbieżny w słabej topologii*,

wypłynęło prawie dziesięć lat później w jednej z prac B. J. Pettisa. Pettis przedstawił dowód twierdzenia Orlicza w pełnej ogólności, powiązał je z teorią miar wektorowych i podał następujące równoważne sformułowanie:

Jeżeli miara określona na σ*-algebrze jest przeliczalnie addytywna w topologii słabej*, *to jest przeliczalnie addytywna w topologii normowej.*

Ze względu na to, że Pettis formalnie jako pierwszy podał dowód omawianego twierdzenia w pełnej ogólności, a zwłaszcza wskazał jego interesujące konsekwencje, weszło ono do literatury pod nazwą *twierdzenia Orlicza–Pettisa.*

Różne warianty i uogólnienia twierdzenia Orlicza–Pettisa formułowane były i są często właśnie w języku miar. Dzisiaj wiadomo, że twierdzenie Orlicza–Pettisa pozostaje prawdziwe w klasach przestrzeni lokalnie wypukłych i niektórych typach F-przestrzeni nielokalnie wypukłych (np. w F-przestrzeniach z bazą Schaudera). Znane są przykłady F-przestrzeni, w których twierdzenie Orlicza–Pettisa nie zachodzi (M. Nawrocki, 1987, 1990).

Profesora Orlicza zajmowało też zagadnienie związków między zbieżnościami podszeregowymi dla innych par topologii niż słaba i normowa i to niekoniecznie zadanych na przestrzeni Banacha (taką naturalną parę tworzą np. w F-przestrzeniach funkcji mierzalnych topologia zbieżności wg miary i oryginalna topologia metryczna). Twierdzenia typu Orlicza–Pettisa formułowane są dla szeregów w grupach topologicznych. Najbardziej znane uogólnienia w tym kierunku zostały dokonane przez N. J. Kaltona, który pokazał, że w przypadku topologicznych grup polskich podszeregowa zbieżność w dowolnej słabszej topologii grupowej pociąga takąż zbieżność w topologii oryginalnej. Warto dodać, że wyniki Kaltona zostały w istotny sposób rozszerzone m.in. przez Lecha Drewnowskiego i Iwo Labudę, uczniów Profesora. W ostatnich latach opublikowali oni ponadto warianty twierdzenia Orlicza–Pettisa dla szerokich klas topologicznych krat liniowych.

Profesor Orlicz zauważył równoważność warunków

1° $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego x^*,

2° $\{\sum_{n\in F} x_n : F \subset \mathbb{N}, F$ skończony$\}$ jest zbiorem ograniczonym.

Tak więc warunek występujący w pierwotnej wersji twierdzenia Orlicza–Pettisa okazuje się być równoważnym warunkowi nie odwołującemu się do przestrzeni dualnej. Szereg $\sum_1^\infty x_n$ z ograniczonym zbiorem wszystkich skończonych sum swoich wyrazów nazwał Profesor Orlicz *doskonale ograniczonym* (obecnie, w odniesieniu do przestrzeni Banacha mówi się: „(x_n) jest słabo bezwarunkowo Cauchy'ego"). Władysław Orlicz interesował się przez wiele lat *przestrzeniami* (również nielokalnie wypukłymi) *z własnością* (O), *tzn. takimi przestrzeniami, w których szereg doskonale ograniczony jest podszeregowo zbieżny.* Twierdzenie Orlicza–Pettisa pokazuje że ciągowo słabo zupełne przestrzenie Banacha mają własność (O). Innymi przykładami przestrzeni z tej klasy wskazanymi przez Profesora Orlicza są przestrzenie Musielaka–Orlicza z normą porządkowo ciągłą (w tym przestrzenie L^p dla $0<p<1$ i przestrzeń $L^0[0,1]$ funkcji Lebesgue'a mierzalnych z topologią zbieżności wg miary). Czesław Bessaga i Aleksander Pełczyński pokazali w roku 1958, iż przestrzeń Banacha ma własność (O) wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera izomorficznej kopii przestrzeni c_0. Powyższa charakteryzacja pozostaje prawdziwa dla ciągowo zupełnych przestrzeni lokalnie pseudowypukłych oraz dla bardzo szerokiej rodziny topologicznych krat liniowych (niedawne wyniki L. Drewnowskiego i I. Labudy).

Innym, klasycznym już dzisiaj twierdzeniem autorstwa Władysława Orlicza jest następujący wynik z roku 1933:

TWIERDZENIE. *Jeżeli szereg* $\sum_1^\infty x_n$ *jest bezwarunkowo zbieżny w* $L^p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$, *to* $\sum_1^\infty \|x_n\|^{\max(2,p)} < \infty$.

Przestrzenie Banacha, w których dla każdego szeregu bezwarunkowo zbieżnego $\sum_1^\infty x_n$ zachodzi $\sum_1^\infty \|x_n\|^2 < \infty$, nazwano *przestrzeniami z własnością Orlicza.* Mają ją oczywiście przestrzenie L^p dla $1 \leqslant p \leqslant 2$, a ogólniej przestrzenie Banacha cotypu 2. Dość długo nie było wiadomo, czy własność Orlicza danej przestrzeni X implikuje, że jest ona cotypu 2. T. Figiel i G. Pisier pokazali prawdziwość tej implikacji przy założeniu izomorficzności X z sumą prostą tejże przestrzeni w sensie ℓ^p dla pewnego $p \in [1,2]$. W latach 1992 i 1994 M. Talagrand wskazał kraty Banacha (w tym przestrzeń symetryczną) z własnością Orlicza, ale cotypu różnego od dwójki.

Związek bezwarunkowej zbieżności szeregu $\sum_1^\infty x_n$ i jego absolutnej zbieżności (tj. zbieżności szeregu $\sum_1^\infty \|x_n\|$) interesował Władysława Orlicza już w końcu lat dwudziestych. Wpisał on, wraz ze S. Mazurem, do Księgi Szkockiej pytanie (nr 122) o istnienie w dowolnej przestrzeni Banacha nieskończonego wymiaru szeregu bezwarunkowo zbieżnego i równocześnie absolutnie rozbieżnego. Odpowiedź pozytywną dali w 1950 roku A. Dvoretzky i C. R. Rogers.

Profesor Orlicz ma znaczące osiągnięcia w badaniach szeregów funkcyjnych, a zwłaszcza szeregów ortogonalnych, które stanowiły temat jego rozpraw doktorskiej i habilitacyjnej. Mówiąc „szereg ortogonalny" ma się na myśli szereg $\sum_1^\infty \varphi_n(\cdot)$ funkcji mierzalnych $\varphi_n(\cdot)$ określonych na $(0,1)$ tworzących układ ortonormalny, tzn. spełniających warunek $\int_0^1 \varphi_k(s)\varphi_m(s)\,ds$

$= \delta_{km}$. Do powszechnie znanych i często przytaczanych twierdzeń autorstwa Profesora Orlicza należą m.in. twierdzenia o mnożnikach Weyla dla bezwarunkowej zbieżności oraz o osobliwościach Carlemana i Littlewooda układów ortogonalnych, zamieszczone w pracach [2], [15], [22] i [28]. On też jako pierwszy podał warunek dostateczny bezwarunkowej zbieżności szeregu postaci $\sum_1^\infty a_n\varphi_n(\cdot)$.

Twierdzenie Orlicza o mnożnikach Weyla. *Niech (a_k) będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Jeżeli istnieje rosnący do nieskończoności ciąg liczbowy (w_k) taki, że dla pewnego podciągu (w_{k_n}) mamy*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{w_{k_n}} < \infty, \quad \sup_k \frac{\log k_{n+1}}{\log k_n} < \infty \quad \textit{oraz} \quad \sum_1^\infty a_k^2(\log k)^2 w_k < \infty,$$

to $\sum_1^\infty a_k\varphi_k(x)$ jest bezwarunkowo zbieżny prawie wszędzie.

Rezultaty K. Tandori'ego (1962) pokazały, że założenia przyjęte w powyższym twierdzeniu są niemal optymalne.

Twierdzenie Orlicza o osobliwościach Carlemana. *Jeżeli $\sum_1^\infty p_n^2 = \infty$ oraz φ_n jest dowolnym nieskończonym układem ortonormalnym funkcji wspólnie ograniczonych, to istnieje funkcja ciągła, której współczynniki Fouriera a_n względem tego układu spełniają warunek $\sum_1^\infty |a_n||p_n| = \infty$. W szczególności istnieje funkcja ciągła o własności $\sum_1^\infty |a_n|^{2-\varepsilon} = \infty$ dla każdego $\varepsilon > 0$.*

Twierdzenie Orlicza o osobliwościach Littlewooda. *Jeżeli $\sum_1^\infty p_n^2 = \infty$ oraz φ_n jest nieskończonym układem ortogonalnym złożonym ze wspólnie ograniczonych funkcji ciągłych gęstym w $C[0,1]$, to dla prawie wszystkich układów znaków ± 1 szereg $\sum_1^\infty \pm p_n\varphi_n(x)$ nie jest rozwinięciem żadnej funkcji z $L^1[0,1]$.*

Władysław Orlicz pokazał ponadto, że *dla dowolnego zupełnego układu ortogonalnego $(\varphi_n(\cdot))_{n=1}^\infty$ na $(0,1)$ mamy $\sum_1^\infty \varphi_n^2(s) = \infty$ dla prawie wszystkich s.*

Inny kierunek zainteresowań Władysława Orlicza to badanie własności zbioru ciągów będących współczynnikami Fouriera (względem ustalonego układu ortogonalnego) funkcji należących do danej przestrzeni.

Wielką wartość i znaczenie prac Władysława Orlicza nad szeregami funkcyjnymi podkreślają w komentarzach autorzy monografii [C7]. Czynią to także R. S. Gutjer i P. L. Uljanov, których obszerny artykuł przeglądowy wzbogacił rosyjskie tłumaczenie książki S. Kaczmarza i H. Steinhausa *Theorie der Orthogonalreihen.* Wielokrotnie do wyników Profesora Orlicza odwołują się również S. Kaczmarz i H. Steinhaus w książce [C5] i R. Sikorski w książce [C9].

[C1] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Grad. Texts in Math. 92, Springer-Verlag, New York 1984, xi + 261 str.
[C2] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys 15, AMS, Providence, Rhode Island, 1977, xii + 322 str.
[C3] L. Drewnowski, *Recent developments of some ideas and results of Orlicz on unconditional convergence*, w: *Function Spaces* (Proc. Conf. on Function Spaces held in Poznań 1998), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. No. 213, Marcel Dekker, New York 2000, 31–45.
[C4] W. Filter, I. Labuda, *Essays on the Orlicz–Pettis theorem*, Real Anal. Exchange 16 (1991), 393–403.
[C5] S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Teorija Ortogonal'nykh Rjadov*, Moskwa 1958 (tłumaczenie R. S. Gutjera i P. L. Ul'janova), 507 str.
[C6] N. J. Kalton, *The Orlicz–Pettis theorem*, Contemp. Math. 2 (1980), 91–100.
[C7] B. S. Kashin, A. A. Saakjan, *Ortogonal'nyje Rjady*, Nauka, Moskwa 1984, 496 str.
[C8] W. Orlicz, *O szeregach doskonale zbieżnych w pewnych przestrzeniach funkcyjnych*, Prace Mat. 1 (1955), 393–414.
[C9] R. Sikorski, *Funkcje Rzeczywiste*, tom II, Monograf. Mat. 37, PWN, Warszawa 1959, 262 str.
[C10] P. L. Uljanov, *Weyl multipliers for orthogonal series*, Comment. Math., Special issue dedicated to Władysław Orlicz on the occasion of his seventy-fifth birthday 1 (1978), 355–369 (po rosyjsku).
[C11] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambrigde Univ. Press, Cambridge 1991, xii + 382 str.

B. Przestrzenie Orlicza. W 1910 roku F. Riesz wprowadził przestrzenie $L^p[a,b] = L^p$ i ℓ^p, które odgrywają ważną rolę w różnych działach analizy. Przynależność funkcji x do L^p określa warunek

$$(*)\qquad I_\varphi(x) = \int_a^b \varphi(|x(t)|)\,dt < \infty,$$

gdzie $\varphi(u) = u^p$, $p \geqslant 1$. Niemal natychmiast podjęto próby zastąpienia funkcji potęgowej ogólniejszymi funkcjami φ. Za wyjściową można uznać pracę W. H. Younga z 1912 roku zawierającą pewną nierówność funkcyjną, która z czasem trafiła do klasyki z nazwiskiem jej odkrywcy. Uogólnieniami przestrzeni L^p zajęli się w końcu lat dwudziestych R. Cooper i J. C. Burkill. Ten ostatni opublikował następujące stwierdzenie: dla dowolnej funkcji x spełniającej warunek $I_\varphi(x) < \infty$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa s dla której zachodzi $I_\varphi(x - s) < \varepsilon$. Praca Burkilla zainteresowała Zygmunta Birnbauma i Władysława Orlicza. Dowiedli oni w [8], że poprzednie stwierdzenie (oraz jego wariant z funkcją ciągłą zamiast s) jest prawdziwe jedynie wtedy, gdy φ spełnia tzw. *warunek* Δ_2 *dla dużych* u, tj. $\varphi(2u) \leqslant C\varphi(u)$ dla pewnej stałej $C > 0$ oraz $u \geqslant u_0 \geqslant 0$ (gdy nierówność zachodzi odpowiednio w pewnym prawostronnym otoczeniu zera lub w całej dziedzinie, to mówi się o *warunku* Δ_2 *dla małych* u i odpowiednio o *warunku* Δ_2 *dla wszystkich* u).

W kolejnej pracy [9] Birnbaum i Orlicz rozważali funkcje ciągłe $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nazwane N'-*funkcjami*, od których wymagali, aby: $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ oraz $\lim_{u\to 0^+} \varphi(u)/u = 0$, $\lim_{u\to\infty} \varphi(u)/u = \infty$ (warunki graniczne będą później znane jako warunki 0_1 i ∞_1). Z N'-funkcją φ związali też inną N'-funkcję φ^* równością

$$\varphi^*(v) = \sup_{u\geqslant 0}\{uv - \varphi(u)\}. \tag{+}$$

O φ^* mówi się dzisiaj *funkcja dopełniająca* (lub *sprzężona*) do φ. Równość (+) implikuje oczywistą uogólnioną nierówność Younga: $uv \leqslant \varphi(u) + \varphi^*(v)$.

W przypadku wypukłej funkcji φ Birnbaum i Orlicz uzyskują całkowe reprezentacje $\varphi(u) = \int_0^u p(t)dt$ i $\varphi^*(v) = \int_0^v p^{-1}(t)dt$, gdzie p^{-1} jest funkcją odwrotną (w sensie uogólnionym) do p. Tym samym otrzymali też klasyczną nierówność Younga.

Odnotujmy tutaj, że liczni specjaliści z analizy wypukłej przypisują zdefiniowanie funkcji sprzężonej wzorem (+) S. Mandelbrojtowi przytaczając pewną jego pracę z roku 1939, pracę o 8 lat późniejszą od publikacji Birnbauma i Orlicza. W [9] zostało też wprowadzone pojęcie równoważności N'-funkcji φ, ψ: istnieją stałe dodatnie a, b, c, d takie, że

$$a\,\varphi(bu) \leqslant \psi(u) \leqslant c\varphi(du),$$

przy czym żąda się zachodzenia nierówności bądź w otoczeniu nieskończoności (wtedy mówi się o równoważności funkcji dla dużych u), bądź w otoczeniu zera (równoważność dla małych u), bądź dla $u \in [0,\infty)$ (równoważność dla wszystkich u). Praca [9] zawiera ponadto wyniki badań zbiorów

$$L_0^\varphi = \{x : I_\varphi(x) < \infty\},$$
$$\ell_0^\varphi = \Big\{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|) < \infty\Big\},$$

które prowadzą m.in. do uogólnienia znanego twierdzenia Landau'a: dla $p, q \geqslant 1$ zachodzi $x\ell^p \subset \ell^1 \Leftrightarrow x \in \ell^q$, gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Birnbaum i Orlicz nie analizowali jednak rozpatrywanej problematyki z punktu widzenia teorii przestrzeni Banacha. Ten kierunek podejmuje Władysław Orlicz w roku 1932 publikując pracę [13], którą uznać wypada za *pierwszy* artykuł traktujący o liniowo-topologicznych własnościach klasy L_0^φ z *wypukłą* funkcją φ spełniającą warunek Δ_2 (przy tym ostatnim założeniu L_0^φ jest przestrzenią liniową). Profesor Orlicz zauważył, że równość

$$\|x\|_\varphi^0 = \sup\Big\{\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt : \int_a^b \varphi^*(|y(t)|\,dt \leqslant 1\Big\} \tag{$**$}$$

definiuje normę na L_0^φ. Norma ta zwana jest dzisiaj *normą Orlicza.*

Już w roku 1936 Władysław Orlicz zajmuje się sytuacją ogólniejszą. W pracy [27] rezygnuje z warunku Δ_2 i rozważa przestrzeń liniową

$$(++) \qquad \begin{aligned} L^{\varphi}[a,b] &= L^{\varphi} \\ &= \{x : I_{\varphi}(\lambda x) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0 \text{ zależnego od } x\} \end{aligned}$$

i udowadnia zupełność przestrzeni $(L^{\varphi}, \|\cdot\|_{\varphi}^{0})$. Trzeba tu zwrócić uwagę na fakt, że $L^{\varphi} = L_0^{\varphi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ spełnia warunek Δ_2 (dla dużych u). Przestrzenie określone równością (++) znane są obecnie jako *przestrzenie Orlicza.*

Artykuł [27] zawiera też badania *ciągowych przestrzeni Orlicza*

$$\ell^{\varphi} = \Big\{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\lambda |x_n|) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0 \text{ zależnego od } x\Big\},$$

a także następujące

Twierdzenie. (a) *Zbieżność* $\|x_n - x\|_{\varphi}^{0} \to 0$ *jest równoważna warunkowi* $I_{\varphi}(\lambda(x_n - x)) \to 0$ *dla każdego* $\lambda > 0$.

Jeżeli φ *spełnia warunek* Δ_2 *dla dużych* u, *to*:

(b) L^{φ} *jest ośrodkowa, co więcej układ Haara jest bazą w* L^{φ}.

(c) *Przestrzeń sprzężona do* L^{φ} *jest izomorficzna z* $(L^{\varphi^*}, \|\cdot\|_{\varphi^*}^{0})$.

(d) L^{φ} *jest refleksywna o ile* φ^* *także spełnia warunek* Δ_2.

Obiekty $L^{\varphi}, L_0^{\varphi}$ wzbudziły zainteresowanie już przed Drugą Wojną Światową. Wspominane są w monografiach S. Banacha [C1] (uwagi do wstępu, przykład 13) i A. Zygmunda [C29]. Wydaje się, iż termin *przestrzenie Orlicza* po raz pierwszy pojawił się w przeoczonej przez wielu specjalistów pracy M. Morse'a i W. Transue z roku 1950 (patrz [C14] str. 595). Użyli go też M. A. Krasnoselskii i Ya. B. Rutickii w artykule [C9] z roku 1951 oraz A. C. Zaanen w publikacji [C26] z roku 1952, a potem w monografii [C27] z roku 1953. Na upowszechnienie się tego terminu znaczny wpływ miały właśnie książka A. C. Zaanena [C27], a zwłaszcza monografia M. A. Krasnoselskiego i Ya. B. Rutickiego [C8]. Należy podkreślić, że Zaanen rozważał przestrzenie L^{φ} generowane przez tzw. funkcje Younga φ, tzn. dopuszcza się przyjmowanie przez φ wartości 0 w otoczeniu zera i wartości $+\infty$ (wtedy przestrzeń L^{∞} jest też przestrzenią typu L^{φ}). Tak ogólne założenia o φ przyjął również w swojej rozprawie doktorskiej z 1955 roku W. A. J. Luxemburg, który wykorzystywał następującą normę w L^{φ}:

$$(***) \qquad \|x\|_{\varphi} = \inf\{\varepsilon > 0 : I_{\varphi}(x/\varepsilon) \leqslant 1\}.$$

Jest ona równoważna normie $\|\cdot\|_{\varphi}^{0}$, gdyż $\|x\|_{\varphi} \leqslant \|x\|_{\varphi}^{0} \leqslant 2\|x\|_{\varphi}$. Krasnoselskii i Rutickii nazwali normy $\|\cdot\|_{\varphi}, \|\cdot\|_{\varphi}^{0}$ odpowiednio *normami Luxemburga i Orlicza*. Nazwanie normy (***) normą Luxemburga jest nieuzasadnione, bo równość ($***$) występuje zarówno w pracy [C14] oraz w monografii H. Nakano [C16], a więc w publikacjach o 5 lat starszych od doktoratu Luxemburga. Krasnoselskii i Rutickii w [C8] podają, że

$$\|x\|_\varphi^0 = \inf_{k>0} k^{-1}(1 + I_\varphi(kx)).$$

Wyrażenie po prawej stronie jest tzw. normą Amemiya $\|\cdot\|_\varphi^A$ rozważaną w książce Nakano cytowanej przez Krasnoselskiego i Rutickiego. Pozostaje więc zagadką, jak to się stało, że zauważając normę Amemiya Krasnoselskii i Rutickii przeoczyli równość ($***$).

Identyczność $\|x\|_\varphi^0 = \|x\|_\varphi^A$ jest bardzo ważna z punktu widzenia geometrycznych własności przestrzeni L^φ. Pozostaje ona prawdziwa także w sytuacji, gdy φ jest funkcją Younga (udowodniono to późno, bo dopiero w 1999 roku w [C5]). Uzupełniając informacje o postaciach norm w przestrzeniach L^φ przytaczamy następujący wynik Władysława Orlicza z pracy [95]:

$$\|x\|_\varphi = \inf_{k>0} k^{-1} \max(1, I_\varphi(kx)).$$

W pracach i monografii Zaanena oraz w książce Krasnoselskiego i Rutickiego po raz pierwszy zastosowano przestrzenie Orlicza w teorii liniowych i nieliniowych równań całkowych. Później zaczęto wykorzystywać je także w teorii równań różniczkowych, konstruktywnej teorii funkcji i teorii aproksymacji, probabilistyce, statystyce matematycznej. Przestrzenie Orlicza znacznie rozszerzyły problematykę badawczą w porównaniu z przestrzeniami L^p choćby w zakresie własności geometrycznych. Zagadnienia różnych typów wypukłości, gładkości przestrzeni L^φ zainteresowały na długo znaczną liczbę matematyków (m.in. W. A. J. Luxemburga, H. W. Milnesa, B. A. Akimovicha, M. M. Rao, S. L. Troyanskiego, K. Sundaresana, B. Turetta, H. Hudzika, A. Kaminską, J. E. Jamisona, P.-K. Lina, S. Chena, T. Wanga, Y. Wanga, C. Wu, W. Kurca, R. Płuciennika, Y. Cui, B.-L. Lina).

Idea zastąpienia funkcji potęgowej ogólniejszą została przeniesiona na inne typy przestrzeni funkcyjnych. Zaczęto z powodzeniem rozwijać wielokierunkowe badania znanych dziś szeroko przestrzeni Besicovicha–Orlicza, Hardy'ego–Orlicza, Lipschitza–Orlicza, Lorentza–Orlicza, Marcinkiewicza–Orlicza, Orlicza–Sobolewa, Orlicza–Zygmunda. Tematyka badawcza związana z przestrzeniami Orlicza podejmowana była i jest przez nierzadko wybitnych specjalistów skupionych w licznych ośrodkach w różnych punktach globu. Wśród nich wymienić należy:

— Sapporo, gdzie rozwijano głównie ogólną teorię przestrzeni modularnych i poświęcono sporo uwagi przestrzeniom Orlicza stanowiącym bardzo ważny typ przestrzni modularnych; działali tu przede wszystkim: H. Nakano, I. Amemiya, T. Ando, T. Shimogaki, S. Yamamuro,

— Woroneż, w którym zajmowano się operatorami liniowymi i nieliniowymi w przestrzeniach L^φ i stosowano te przestrzenie do problemów równań całkowych, rozważano znacznie ogólniejsze przestrzenie symetryczne i zagadnienia interpolacji operatorów; do tej grupy należeli m.in.: M. A. Krasnoselskii, Ya. B. Rutickii, E. I. Pustylnik, D. V. Salekhov, E. M. Semenov, V. I. Sobolev, P. P. Zabreiko, a współpracowali z nimi I. V. Shragin, M. M. Vainberg i G. Ya. Lozanovskii,

— Lejda, miejsce szczególnie ważnych badań nad kratami liniowymi i przestrzeniami Banacha funkcji mierzalnych (w tym przestrzeni Orlicza) prowadzonych przez A. C. Zaanena, W. A. J. Luxemburga, W. J. Classa J. J. Groblera, E. de Jonge, B. de Pagtera, A. R. Schepa, W. K. Vietscha,

— Poznań skupiający liczne grono wychowanków Władysława Orlicza i Juliana Musielaka (J. Albrycht, L. Drewnowski, H. Hudzik, A. Kamińska, P. Kranz, W. Kurc, I. Labuda, R. Leśniewicz, L. Maligranda, M. Mastyło, W. Matuszewska, M. Nawrocki, M. Nowak, R. Płuciennik, St. Stoiński, R. Taberski, R. Urbański, A. Waszak, M. Wisła, W. Wnuk). Podjęli oni zagadnienia geometrycznych i strukturalnych własności przestrzeni Orlicza i ich ogólniejszego wariantu (przestrzeni Musielaka–Orlicza), a także interpolacji operatorów, przestrzeni Hardy'ego–Orlicza i przestrzeni modularnych. Ta problematyka była również rozpatrywana przez matematyków francuskich: Ph. Turpina i E. Ginera,

— Jerozolima, gdzie uzyskano ważne twierdzenia dotyczące izomorficznej i lokalnej struktury przestrzeni Orlicza; autorami tych twierdzeń są m.in.: J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Z. Altshuler, K. J. Lindberg. Powyższa tematyka była kontynuowana, ze znakomitymi rezultatami, przez N. J. Nielsena, N. J. Kaltona, J. Y. T. Woo oraz matematyków hiszpańskich: F. L. Hernandeza, B. Rodrígueza-Salinasa i C. Ruiza,

— Harbin, znany przede wszystkim z wielu wyników z zakresu geometrii przestrzeni funkcyjnych uzyskanych przez S. Chena, Y. Cui, Y. Duana, Z. Shi, H. Sun, T. Wanga, Y. Wanga, Z. Wanga, C. Wu.

Władysław Orlicz wielokrotnie powracał do tematyki przestrzeni L^φ, której poświęcone są prace [76], [79], [83], [91], [92], [94], [96], [110], [122], [151], [168]. Profesor Orlicz interesował się bardzo przestrzeniami wyznaczonymi przez *niewypukłe* funkcje φ. Najczęściej przyjmowanymi przez niego założeniami o funkcji $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ były: ciągłość, nieograniczoność, niemalenie oraz $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Funkcje takie określa się mianem *funkcji Orlicza* lub *φ-funkcji.*

Efektem współpracy ze Stanisławem Mazurem jest artykuł [76], gdzie podano warunki konieczne i dostateczne liniowości zbioru L_0^φ przy bardzo ogólnych założeniach o φ (nie żądano ani ciągłości ani monotoniczności), a ponadto dyskutowano możliwość wprowadzenia odpowiedniej F-normy w takich przestrzeniach. Właściwą okazała się *F-norma Mazura–Orlicza*

$$|x|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : I_\varphi(x/\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}.$$

Co więcej, autorzy pracy [76] stwierdzili, że L^φ można wyposażyć w normę zupełną $\|\cdot\|$ o własności $\|x_n\| \to 0 \Rightarrow I_\varphi(x_n) \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest równoważna funkcji wypukłej.

Pierwotnie przestrzeni L^φ określono jako przestrzenie pewnych funkcji na przedziale i całka definiująca funkcjonał I_φ była całką względem miary Lebesgue'a. Oczywiście można, i często tak się czyni, rozpatrywać przestrzenie Orlicza nad dowolną miarą μ:

$$L^\varphi(\mu) = \Big\{x \in L^0(\mu) : \\ I_\varphi(\lambda x) = \int_\Omega \varphi(\lambda|x(t)|)\, d\mu < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\Big\},$$

gdzie $L^0(\mu)$ jest przestrzenią klas równoważności, względem równości μ-prawie wszędzie, funkcji rzeczywistych (lub zespolonych) mierzalnych względem σ-algebry podzbiorów zbioru Ω, na której zadana jest miara μ. Własności miary μ nie pozostają bez wpływu na własności przestrzeni $L^\varphi(\mu)$. Ważne są tu trzy typy miar: bezatomowa i nieskończona, bezatomowa i skończona oraz miara licząca na zbiorze potęgowym zbioru liczb naturalnych. Dla każdego z tych przypadków istotne jest zachowanie się funkcji φ odpowiednio: w całej dziedzinie, w otoczeniu nieskończoności, w otoczeniu zera. Na potwierdzenie tego faktu zacytujemy następujące twierdzenie podane w [76]:

TWIERDZENIE MAZURA–ORLICZA. *Jeżeli miara μ jest bezatomowa i skończona (licząca), to przestrzeń $L^\varphi(\mu)$ jest lokalnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest równoważna funkcji wypukłej w pewnym otoczeniu nieskończoności (zera).*

Przestrzenie Orlicza interesują różne środowiska w różnych krajach. Pierwszy z autorów tego artykułu, jako uczeń Władysława Orlicza, został poproszony przez Uniwersytet w Kitakyushu w Japonii o obszerny odczyt *Orlicz spaces by their history.* Jego prezentacja wywołała znaczny oddźwięk – czasopismo *Mathematica Japonica* zamówiło artykuł przeglądowy *Orlicz spaces—history and a survey of certain aspects*, którego przygotowanie niebawem się zakończy.

O tym, że przestrzenie Orlicza zajmują niepoślednie miejsce w teorii przestrzeni Banacha świadczą następują dane zaczerpnięte z *Mathematical Reviews* (z lat 1940–2000) oraz *Zentralblatt für Mathematik* (z lat 1931–2000): jeśli $MR{-}O$, $MR{-}B$ ($Z{-}O$, $Z{-}B$) oznaczją odpowiednio liczbę prac odnotowanych przez *Mathematical Reviews* (*Zentralblatt für Mathematik*), w których tytułach pojawia się termin „przestrzeń Orlicza", odpowiednio „przestrzeń Banacha", to

$$\frac{MR-O}{MR-B} = \frac{879}{8.906} \approx 9{,}87\%, \qquad \frac{Z-O}{Z-B} = \frac{978}{6.292} \approx 15{,}54\%,$$

a jeśli $MR-OS$, $MR-BS$ ($Z-OS$, $Z-BS$) oznaczją odpowiednio liczbę prac odnotowanych przez *Mathematical Reviews* (*Zentralblatt für Mathematik*), w których tytułach lub abstractach pojawia się termin „przestrzeń Orlicza”, odpowiednio „przestrzeń Banacha”, to

$$\frac{MR-OS}{MR-BS} = \frac{2.588}{39.370} \approx 6{,}57\%, \qquad \frac{Z-OS}{Z-BS} = \frac{1.971}{31.642} \approx 6{,}23\%.$$

Na zakończenie przytoczymy jeszcze podobne dane o przestrzeniach L^p – występują one w tytułach 1388 prac zamieszczonych w *Mathematical Reviews* i w tytułach 1619 prac zamieszczonych w *Zentralblatt für Mathematik.*

[C1] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monograf. Mat. 1, Warszawa 1932; Przedruk w: Stefan Banach, *Oeuvres*, Vol. II, PWN, Warszawa 1979, 13–219.

[C2] I. M. Bund, *Birnbaum–Orlicz Spaces*, Notes Inst. of Math. and Stat., Univ. of São Paulo, Math. Series 4, São Paulo 1978, vii + 161 str.

[C3] S. Chen, *Geometry of Orlicz Spaces*, Dissertationes Math. 356 (1996), 204 str.

[C4] H. Hudzik, A. Kamińska, M. Mastyło, *O niektórych rezultatach dotyczących przestrzeni Orlicza i Musielaka–Orlicza*, Materiały Sesji Naukowej z okazji 50-lecia pracy Prof. Juliana Musielaka na Uniwersytecie w Poznaniu, UAM, Poznań 1999, 49–69.

[C5] H. Hudzik, L. Maligranda, *Amemiya norm and Orlicz norm are equal*, Research Report, Luleå University of Technology 5 (1999), 1–15.

[C6] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, *Symmetric Structures in Banach Spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 19 (1979), No. 217, Providence 1979, v + 298 str.

[C7] V. Kokilashvili, M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, Word Scientific, Singapore 1991, xii + 233 pp.

[C8] M. A. Krasnoselskii, Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, GITL, Moskwa 1958; ang. tłumaczenie Nordhoff, Groningen 1961, xi + 249 str.

[C9] M. A. Krasnoselskii, Ya. B. Rutickii, *On the theory of Orlicz spaces*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 81 (1951), 497–500 (po rosyjsku).

[C10] A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function Spaces*, Noordhoff Internat. Publ., Leyden; Academia, Prague, 1977, xv + 454 str.

[C11] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, *I. Sequence Spaces* i *II. Function Spaces*, Springer-Verlag 1977, xiii + 188 str. i 1979, x + 243 str.

[C12] W. A. J. Luxemburg, *Banach function spaces*, Ph.D. Thesis, Delft 1955, 70 str.

[C13] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Math. 5, Univ. of Campinas, Campinas SP, Brazil 1989, iii + 206 str.

[C14] M. Morse, W. Transue, *Functionals F bilinear over the product $A \times B$ of two pseudo-normed vector spaces*, Ann. of Math. 51 (1950), 576–614.

[C15] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math. 1034, Springer-Verlag, Berlin-New York 1983, iii+222 str.

[C16] H. Nakano, *Modulared Semi-odered Linear Spaces*, Tokyo Math. Book Series, Vol. 1, Maruzen Co., Tokyo 1950, i + 288 str.

[C17] H. Nakano, *Topology and Linear Topological Spaces*, Tokyo Math. Book Series, Vol. 3, Maruzen Co., Tokyo 1951, viii + 281 str.

[C18] R. O'Neil, *Integral transforms and tensor products on Orlicz spaces and $L(p,q)$ spaces*, J. Anal. Math. 21 (1968), 1–276.

[C19] M. M. R a o, Z. D. R e n, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York 1991, xii + 449 str.

[C20] S. R o l e w i c z, *Metric Linear Spaces*, second enlarged edition, Polish Scientific Publishers and D. Reidel Publishing Company, Warszawa–Dordrecht 1984, xi + 459 str.

[C21] B. T u r e t t, *Fenchel–Orlicz spaces*, Dissertationes Math. 181 (1980), 1–55.

[C22] Ph. T u r p i n, *Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux*, Dissertationes Math. 131 (1976), 1–221.

[C23] C. W u, and T. W a n g, *Orlicz Spaces and their Applications*, Heilongjing Sci. & Tech. Press 1983, 461 str. (po chińsku).

[C24] C. W u, T. W a n g, S. C h e n, Y. W a n g, *Theory of Geometry of Orlicz Spaces*, Harbin Inst. of Tech. Press 1986 (po chińsku).

[C25] C. W u, T. W a n g, S. C h e n, *Advances of research on Orlicz spaces in Harbin*, w: *Functional Analysis in China*, Math. Appl. 356, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1996, 187–204.

[C26] A. C. Z a a n e n, *Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces*, Compositio Math. 10 (1952), 56–94.

[C27] A. C. Z a a n e n, *Linear Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1953, vii + 601 str.

[C28] A. C. Z a a n e n, *Riesz Spaces I*, *II*, North-Holland, 1972, 514 str. i 1983, 720 str.

[C29] A. Z y g m u n d, *Trigonometrical Series*, Monograf. Mat. 5, Warszawa–Lwów 1935; przedruki New York 1940, 1952, vi + 329 str. i 1955; Wydanie drugie: *Trigonometric Series*, Cambridge 1959.

C. Indeksy Matuszewskiej–Orlicza. W 1960 roku Matuszewska i Orlicz [89] zdefiniowali liczby charakteryzujące wzrost funkcji Orlicza φ i nazwali je *indeksami* funkcji φ. Dla $\lambda > 0$ niech

$$k^a_\varphi(\lambda) = \sup_{u>0} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}, \qquad k^\infty_\varphi(\lambda) = \limsup_{u\to\infty} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}, \qquad k^0_\varphi(\lambda) = \limsup_{u\to 0^+} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}$$

oraz

$$s^i_\varphi = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\ln k^i_\varphi(\lambda)}{\ln\lambda}, \qquad \sigma^i_\varphi = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\ln k^i_\varphi(\lambda)}{\ln\lambda}$$

dla $i = a, \infty, 0$.

Powyższe granice istnieją dla każdej funkcji Orlicza φ, chociaż mogą być nieskończone (kładziemy $\ln\infty = \infty$). Zachodzą nierowności

$$0 \leqslant s^i_\varphi \leqslant \sigma^i_\varphi \leqslant \infty, \qquad i = a, \infty, 0,$$

i dlatego granice $s^a_\varphi, s^\infty_\varphi, s^0_\varphi$ nazywają się *dolnymi indeksami Matuszewskiej–Orlicza*, a granice $\sigma^a_\varphi, \sigma^\infty_\varphi, \sigma^0_\varphi$ *górnymi indeksami Matuszewskiej–Orlicza.* Powyższe trzy rodzaje indeksów mają związek z przestrzeniami Orlicza $L^\varphi = L^\varphi(\Omega, \Sigma, \mu)$ generowanymi przez funkcje φ nad trzema zasadniczymi przestrzeniami miary: μ nieatomowa i nieskończona, μ nieatomowa i skończona oraz μ miara licząca na $\Omega = \mathbb{N}$. W przypadku gdy $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, to wszystkie indeksy są równe p, natomiast gdy $\varphi(u) = u^p \ln(1+u)$, to $s_\varphi^a = s_\varphi^\infty = \sigma_\varphi^\infty = p$ oraz $\sigma_\varphi^a = s_\varphi^0 = \sigma_\varphi^0 = p+1$. Istotne znaczenie tych indeksów polega na tym, że pozwalają one uogólnić pojęcie wykładnika sprzężonego, gdyż zachodzą równości

$$\frac{1}{s_{\varphi^*}} + \frac{1}{\sigma_\varphi} = \frac{1}{s_\varphi} + \frac{1}{\sigma_{\varphi^*}} = 1$$

(T. Ando 1960, W. Matuszewska 1961).

W pracach [89], [94], [109] Władysław Orlicz i Wanda Matuszewska badali indeksy wykazując następujące własności:

1. *Indeksy Matuszewskiej–Orlicza są niezmiennicze ze względu na równoważność tzn. jeżeli* $\varphi_1 \overset{i}{\sim} \varphi_2$ *to* $s_{\varphi_1}^i = s_{\varphi_2}^i$ *oraz* $\sigma_{\varphi_1}^i = \sigma_{\varphi_2}^i$, *dla* $i = a, \infty, 0$.

2. *Jeżeli* $\sigma_\varphi^\infty > 0$ *to dla każdego* $0 < s < s_\varphi^\infty$ *mamy* $\varphi \overset{\infty}{\approx} \chi_s$, *gdzie* $\chi_s(u) = \psi(u^s)$ *oraz* ψ *jest wypukłą funkcją Orlicza. Jezeli* $0 < s < \sigma_\varphi^\infty < \infty$ *to istnieje analogiczna reprezentacja z wklęsłą funkcją* ψ; *ten ostatni warunek jest równoważny z warunkiem* Δ_2 *dla dużych* u.

Indeksy Matuszewskiej–Orlicza znalazły zastosowanie przy badaniu przestrzeni Orlicza. I tak: w [94] podano, iż $L^\varphi(0,1)$ jest lokalnie ograniczona wtedy i tylko wtedy gdy $s_\varphi^\infty > 0$, T. Ando w 1962 roku dowiódł, że gdy $s_{\varphi_1}^\infty > \sigma_{\varphi_2}^\infty$, to każdy operator całkowy z $L^{\varphi_1}(0,1)$ do $L^{\varphi_2}(0,1)$ jest zwarty, J. Lindenstrauss i L. Tzafriri w 1972 roku udowodnili, że ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$ jest izomorficzna z podprzestrzenią ośrodkowej ciągowej przestrzeni Orlicza ℓ^φ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in [s_\varphi^0, \sigma_\varphi^0]$ oraz że każdy liniowy ograniczony operator z ośrodkowej przestrzeni ℓ^{φ_1} do ośrodkowej ℓ^{φ_2} jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{\varphi_1}^0 > \sigma_{\varphi_2}^0$.

Znane są też zastosowania indeksów przy badaniu ograniczoności operatorów całkowych, funkcji maksymalnych , operatorów singularnych w zwykłych lub wagowych przestrzeniach Orlicza. Przykładowo, klasyczny maksymalny operator Hardy–Littlewooda M jest ograniczony w $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_\varphi^a > 1$ (G. G. Lorentz 1955, T. Shimogaki 1965). Więcej informacji o tych rezultatach można znaleźć w książce [C3].

Indeksy występują również w uogólnieniu twierdzeń interpolacyjnych typu Marcinkiewicza na przestrzenie Orlicza, choć założenia na φ są często formułowane w terminach nierówności całkowych (A. Zygmund 1956, E. M. Semenov 1968, D. W. Boyd 1969, M. Zippin 1971, A. Torchinsky 1976, L. Maligranda 1984, A. Cianchi 1998; patrz ponadto do pozycji [C8], [C6]).

Indeksy Matuszewskiej–Orlicza stały się punktem wyjścia dla wprowadzenia podobnych charakterystyk liczbowych szerszych klas przestrzeni: przestrzeni symetrycznych (D. W. Boyd 1969) – w związku z problemami interpolacji operatorów, funkcyjnych przestrzeni Banacha (T. Shimogaki 1965 i J. Grobler 1975) – w związku z badaniem operatorów zwartych, krat Banacha (P. Dodds 1977).

Więcej informacji o indeksach i ich zastosowaniach można znaleźć w książkach [C4], [C5], [C7], [C2], [C1] oraz w pracy [C6].

[C1] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge – New York 1989, xx + 494 str.

[C2] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 217, Providence 1979, v + 298 str.

[C3] V. Kokilashvili, M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, Word Scientific, Singapore 1991, xii + 233 str.

[C4] S. G. Krein, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Nauka, Moskwa 1978; angielskie tłumaczenie Amer. Math. Soc., Providence 1982, xii + 375 str.

[C5] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, *I. Sequence Spaces* i *II. Function Spaces*, Springer-Verlag 1977 i 1979, xii + 188 str. i x + 243 str.

[C6] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Math. 234 (1984), 1–49.

[C7] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Math. 5, Univ. of Campinas, Campinas SP, Brazil 1989, iii + 206 str.

[C8] A. Torchinsky, *Interpolation of operators and Orlicz classes*, Studia Math. 59 (1976), 177–207.

D. Przestrzenie F-unormowane i przestrzenie Saksa. Władysław Orlicz zajmował się również ogólną teorią przestrzeni F-unormowanych (= metryzowalnych przestrzeni liniowo-topologicznych). Współpracując ze Stanisławem Mazurem uzyskał wyniki o fundamentalnym znaczeniu dla tej teorii. Do najznamienitszych należy przeniesienie *zasady jednostajnej ograniczoności* (= twierdzenie Banacha–Steinhausa) na rodziny operatorów odwzorowujących F-przestrzenie (= zupełne przestrzenie F-unormowane) w przestrzenie F-unormowane. Zasada jednostajnej ograniczoności, w takim właśnie stopniu ogólności, udowodniona została w artykule [20] dla ciągów operatorów. Jej sformułowanie jest następujące:

Twierdzenie Mazura–Orlicza ([20]). *Jeżeli $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ są ciągłymi operatorami liniowymi z F-przestrzeni X do przestrzeni F-unormowanej Y oraz zbiór $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony w Y dla dowolnego $x \in X$, to operatory T_n są jednakowo ciągłe. Gdy ponadto ciąg (T_n) jest punktowo zbieżny, to operator graniczny jest ciągły.*

Zasada jednostajnej ograniczoności jest dzisiaj zwykle formułowana dla dowolnej rodziny operatorów (T_α) w postaci równoważności: punktowa ograniczoność $\Leftrightarrow$ jednakowa ciągłość (implikację $\Leftarrow$ łatwo jest zauważyć).

W pracy [20] opublikowano po raz pierwszy, pochodzący od Banacha, warunek równoważny ograniczoności podzbioru A przestrzeni F-unormowanej: $t_n a_n \to 0$ dla dowolnych ciągów $(a_n) \subset A$, $t_n \to 0$. Wykazano również klasyczne dzisiaj

Twierdzenie o rezonansie. *Jeżeli ciąg* (T_n) *ciągłych operatorów działających między* F*-przestrzeniami* X, Y *jest taki, że*:

(i) $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *jest ograniczony dla wszystkich* $x \in X$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ *istnieje dla elementów* x *pewnego zbioru liniowo gęstego w* X,

to $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ *istnieje dla wszystkich* $x \in X$ *oraz operator* T *jest liniowy i ciągły.*

Przytoczone powyżej twierdzenia, często opatrzone komentarzem podkreślającym ich znaczenie, znajdują się w każdej monografii i podręczniku poświęconym analizie funkcjonalnej. Komentarzy takich nie brakuje i w, używając medialnego żargonu, „kultowej" monografii N. Dunforda i J. T. Schwartza [C6], gdzie odnotowano ogólny wariant *zasady zagęszczania osobliwości* wykazany przez Władysława Orlicza w [25]:

Zasada zagęszczania osobliwości. *Niech* $T_{nm}(\cdot, \alpha)$ *oznacza ciąg podwójny ciągłych operatorów liniowych między przestrzeniami Banacha, zależny od parametru* α *przebiegającego zupełną przestrzeń metryczną* A *i taki, że* $T_{nm}(x, \cdot)$ *są funkcjami ciągłymi przy każdym* $x \in X$.

Jeżeli dla dowolnego α *nie istnieje* $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} T_{nm}(x_\alpha, \alpha)$ *dla jakiegoś* $x_\alpha \in X$, *to przy pewnym* $x \in X$ *granica ta nie istnieje również dla* α *należących do pewnego zbioru drugiej kategorii w* A. *Co więcej, zbiór elementów* $x \in X$ *o powyższej własności jest rezydualny w* X.

Idee Mazura i Orlicza zainspirowały liczne dalsze badania kontynuowane m.in. w [C1] przez Andrzeja Alexiewicza, pierwszego doktoranta Profesora Orlicza. Wiele szczegółów o kierunkach i rozwoju tych badań oraz wskazówek literaturowych znaleźć można w [C5], a także w [C3], [C17], [C18].

Mazur i Orlicz przyczynili się w ważki sposób do rozwoju teorii przestrzeni Frécheta (= lokalnie wypukłych F-przestrzeni), które określane były przez nich jako przestrzenie B_0. Tematykę tę podjęli już w latach trzydziestych w związku z analizowaniem pól zbieżności metod sumowalności, ale wiele istotnych wyników ukazało się drukiem dopiero po Drugiej Wojnie Światowej w pracach [47] i [54], wielokrotnie potem cytowanych. Opóźniona prezentacja tych rezultatów spowodowała, że niektóre z nich zostały niezależnie opublikowane przez innych matematyków (J. Dieudoneé, L. Schwartz). Artykuły [47] i [54] zawierają: ważne przykłady F-przestrzeni, które nie są normowalne (a nawet lokalnie wypukłe), warunek równoważny ciągłości funkcjonału liniowego na loklanie wypukłej przestrzeni F-unormowanej, uogólnienie twierdzenia Hahna–Banacha. Ów warunek równoważny ciągłości funkcjonału liniowego f ma postać $|f(x)| \leqslant K_{f,n}\, p_n(x)$, gdzie stała $K_{f,n}$ zależy od f i p_n, a p_n jest pewnym wyrazem ciągu półnorm (p_j) zadającego topologię lokalnie wypukłą przestrzeni F-unormowanej. Mazur i Orlicz pokazali też uniwersalność przestrzeni $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ (z topologią wprowadzoną przez rodzinę półnorm $p_n(f) = \sup\{|f(t)| : |t| \leqslant n\}$) w klasie lokalnie wypukłych ośrodkowych F-przestrzeni – każda taka przestrzeń jest liniowo homeomorficzna z pewną podprzestrzenią w $C(\mathbb{R})$.

W pracy [54] znajduje się ponadto wariant zasady jednostajnej ograniczoności dla odwzorowań między przestrzeniami liniowymi Z z aksjomatycznie wprowadzoną zbieżnością. Jednym z tych aksjomatów był warunek

$$u_n \to 0 \text{ w } Z \Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{m} u_{n_k}\Big)_{m=1}^{\infty} \text{ zbieżny w } Z \text{ dla pewnego podciągu } (n_k).$$

Zbieżność spełniająca powyższą implikację nazwana została później K-zbieżnością i była z dużym powodzeniem badana przez matematyków katowickich (informacje na ten temat znajdują się w [C3]).

Znaczącym, ze względu na zastosowania, jest podane w [54] uogólnienie twierdzenie Hahna–Banacha. Uogólnienie to ma następującą postać:

Twierdzenie Mazura–Orlicza o nierównościach. *Niech* $\omega : X \to \mathbb{R}$ *będzie funkcjonałem subliniowym na rzeczywistej przestrzeni liniowej* X *oraz niech* $u : T \to X$ *i* $\alpha : T \to \mathbb{R}$ *będą dwoma funkcjami. Na to, by istniał w* X *funkcjonał liniowy* f *taki, że*

$$f(x) \leqslant \omega(x) \quad \textit{dla każdego } x \in X, \qquad \alpha(t) \leqslant f(u(t)) \quad \textit{dla każdego } t \in T,$$

potrzeba i wystarcza zachodzenie nierówności

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha(t_k) \leqslant \omega\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(t_k)\Big)$$

dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in T$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Przypomnijmy, że przez funkcjonał subliniowy ω rozumie się funkcjonał subaddytywny i dodatnio jednorodny: $\omega(x+y) = \omega(x)+\omega(y)$, $\omega(tx) = t\omega(x)$ dla $t \geqslant 0$.

Twierdzenie Mazura–Orlicza o nierównościach bywa formułowane w postaci równoważnej określanej jako „twierdzenie o kanapce”: *jeżeli subliniowy funkcjonał* ω *na rzeczywistej przestrzeni liniowej* X *dominuje wklęsły funkcjonał* ρ *na wypukłym zbiorze* $K \subset X$, *tzn.* $\rho(x) \leqslant \omega(x)$ *dla* $x \in K$, *to wtedy istnieje funkcjonał liniowy* f *na* X *taki, że* $\rho(x) \leqslant f(x)$ *dla* $x \in K$ *oraz* $f(x) \leqslant \omega(x)$ *dla* $x \in X$. Oryginalny dowód twierdzenia o nierównościach jest skomplikowany i mało przejrzysty. Uproszczone dowody podali m.in. R. Sikorski (1953), V. Ptak (1956), S. Simmons (1968) i wielu innych autorów wskazujących na prawdziwość tezy również w sytuacjach ogólniejszych (półgrupy przemienne, stożki) od rozpatrywanej przez Mazura i Orlicza. Użyli oni swojego twierdzenia o nierównościach do wykazania: istnienia szczególnych typów całek, twierdzeń o oddzielaniu zbiorów wypukłych, możliwości rozkładu funkcjonałów na nieujemne komponenty, twierdzeń o istnieniu rozwiązań nierówności $T(x) \geqslant y$ (T jest ciągłym operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha lub przestrzeniami Frécheta, a $\geqslant$ relacją zadaną przez stożek). O kierunkach uogólnień twierdzenia Mazura–Orlicza o nierównościach i jego dalszych zastosowaniach informują monografie [C2], [C7], [C9, Chapter II], [C13], a także prace [C10], [C12].

Profesor Orlicz, mimo osobistego uczestnictwa w fundamentalnych pracach Szkoly Lwowskiej i ogromnej wiedzy, nie zdecydował się na napisanie monografii z zakresu analizy funkcjonalnej. Goszcząc w Instytucie Matematycznym Academia Sinica w Pekinie – był to rok 1958 – Władysław Orlicz przedstawił po niemiecku cykl wykładów na temat liniowej analizy funkcjonalnej. Wykłady te zostały przetłumaczone (przez profesorów Guan Zhao Zhi i Li Wen Qing) i wydane pięć lat później w języku chińskim, a po kolejnych niemal trzydziestu latach przetłumaczono tę publikację na angielski. Uczynił to profesor Lee Peng Yee z Narodowego Uniwersytetu w Singapurze. Tak powstała książka *Linear Functional Analysis* zawierająca klasyczne elementy teorii przestrzeni Banacha i przestrzeni F-unormowanych oraz niemało niestandardowych przykładów i niebanalnych zastosowań metod analizy funkcjonalnej do rozwiązania problemów np. teorii sumowalności czy teorii funkcji. Kilka takich problemów zostało zaatakowanych przez Władysława Orlicza z wykorzystaniem metod *teorii przestrzeni Saksa*, które wprowadził on w 1950 roku w pracy [48]. Jeżeli $\|\cdot\|, \|\cdot\|^*$ są odpowiednio taką normą i F-normą na przestrzeni liniowej X, że kula jednostkowa $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ jest zupełna w topologii $\tau(\|\cdot\|^*)$ F-normy $\|\cdot\|^*$, to trójkę $X_s = (B, \|\cdot\|, \|\cdot\|^*)$ nazywa się przestrzenią Saksa (naturalnym przykładem, rozważanym w latach trzydziestych przez G. M. Fichtenholza, jest przestrzeń Saksa wyznaczona przez $L^\infty(0,1)$ z normami supremum istotnego i całkową). Profesor Orlicz skupiał swoje badania m.in. na poszukiwaniu warunków zapewniających ciągłość operatora T z $(X_s, \tau(\|\cdot\|^*))$ w przestrzeń Banacha lub Frécheta, jednakową ciągłość rodziny takich operatorów, reprezentacji funkcjonałów na X_s. Problematyka ta podjęta została w pracach: [48], [64], [68–70], [135]. Przestrzenie Saksa pozostają w ścisłym związku z teorią przestrzeni dwunormowych rozwiniętych m.in. przez Andrzeja Alexiewicza (patrz [C4], [C5], [C8], [C16]).

[C1] A. Alexiewicz, *On sequences of operations*, *I–IV*, Studia Math. 11 (1949), 1–30; 11 (1950), 200–236; 12 (1951), 84–92, 93–101.

[C2] A. Alexiewicz, *Analiza Funkcjonalna*, Monograf. Mat. 49, PWN, Warszawa 1969, 535 str.

[C3] P. Antosik, C. Swartz, *Matrix Methods in Analysis*, Lecture Notes in Math. 1113, Springer-Verlag, Berlin – New York, 1985, iv + 114 str.

[C4] J. B. Cooper, *Saks Spaces and Applications to Functional Analysis*, Notas de Matemática 64, North-Holland, Amsterdam 1978, x + 325 str.

[C5] L. Drewnowski, *Ciągi operatorów*, Serta Mathematica Andreae Alexiewicz, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1996, 57–81.

[C6] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*, *Part I*: *General Theory*, Interscience Publishers Inc., New York 1958.

[C7] B. Fuchssteiner, W. Lusky, *Convex Cones*, Notas de Matemática 82, North Holland, Amsterdam – New York 1981, x + 429 str.
[C8] D. Jach, *Wybrane zagadnienia z teorii przestrzeni Saksa*, Uniwersytet Szczeciński, Rozprawy i Studia T. (CCLXII), 188, Szczecin 1995.
[C9] H. König, M. Neumann, *Mathematical Economics with an Introduction to Convex Analysis*, Mathematical Systems in Economics 100, Hain Verlag bei Athenäum, Königstein 1986, x + 239 str. (po niemiecku).
[C10] G. Köthe, *Wkład Stanisława Mazura w analizę funkcjonalną*, Wiadom. Mat. 30 (1994), 199–250 (jest to polskie tłumaczenie artykułu *Stanislaw Mazur's Contributions to Functional Analysis*, Math. Ann. 277 (1987), 489–528).
[C11] J. Musielak, *Wstęp do Analizy Funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976, 315 str.
[C12] M. M. Neumann, *Generalized convexity and the Mazur–Orlicz theorem*, Proc. Orlicz Mem. Conf., Oxford/MS (USA) 1991, Exp. No. 8, 1–15.
[C13] A. L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper and Row Publishers, New York – Evanston – London 1967, x + 228 str.
[C14] D. Przeworska-Rolewicz, S. Rolewicz, *Equations in Linear Spaces*, Monograf. Mat. 47, PWN, Warszawa 1968, 380 str.
[C15] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, Monograf. Mat. 56, PWN Warszawa 1972, 287 str.
[C16] Z. Semadeni, *Some Saks-space dualities in harmonic analysis on commutative semigroups*, Functional Analysis, Numerical Analysis and Optimization, Special Topics of Applied Mathematics (Proc. Sem., Ges. Math. Datenverarb., Bonn 1979), North-Holland, Amsterdam – New York 1980, 71–87.
[C17] C. Swartz, *The evolution of the uniform boundedness principle*, Math. Chronicle 19 (1990), 1–18.
[C18] C. Swartz, *Infinite Matrices and the Gliding Hump*, World Scientific, Singapore 1996, xii + 209 str.

E. Teoria sumowalności. Przypomnijmy pewne pojęcia z teorii sumowalności. Nieskończona macierz rzeczywista (lub zespolona) $A = (a_{nk})$, $n, k = 1, 2, \ldots$, określa *metodę sumowalności* następująco: ciąg $x = (x_n)$ jest A-*sumowalny*, jeżeli wszystkie szeregi $A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ są zbieżne i istnieje $\lim_{n\to\infty} A_n x$. Niech c_A będzie polem zbieżności (polem sumowalności) metody A, tzn. c_A jest przestrzenią liniową wszystkich A-sumowalnych ciągów x. Gdy każdy ciąg zbieżny $x = (x_n)$ jest A-sumowalny, to metodę A nazywa się *zachowawczą*, a gdy dodatkowo $\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} x_n$, to metodę A określa się jako *regularną.* Znane są dokładne charakteryzacje metod zachowawczych i regularnych (twierdzenia Silvermana–Toeplitza z roku 1913 i Kojimy–Schura z roku 1921). Ponadto mówi się, że metody A i B są *zgodne*, gdy $\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} B_n x$ dla każdego $x \in c_A \cap c_B$.

Władysław Orlicz rozpoczął swoją działalność naukową w 1926 roku pracą [1]. Wykazał tam, że jeśli H jest macierzą Cesàro–Höldera oraz dla metody regularnej A zachodzi $c_H \subset c_A$, to metody H i A są zgodne.

Pierwszymi, którzy zastosowali metody analizy funkcjonalnej do teorii sumowalności, byli S. Mazur (1930) i S. Banach (1932). Wielką skuteczność tych metod w odniesieniu do problemów sumowalności pokazali Mazur i Orlicz przedstawiając bardzo wartościowe wyniki (m.in. twierdzenie o ograniczonej zgodności – Bounded Consistency Theorem) w artykule [19] z 1933 roku, który nie zawierał jednak dowodów. Zostały one opublikowane w późniejszej pracy [59] w roku 1954. Największy oddźwięk zyskało

Twierdzenie Mazura–Orlicza o zgodności ([19], [59]). *Jeżeli każdy ciąg ograniczony, sumowalny metodą regularną A, jest sumowalny metodą regularną B, to obie metody są zgodne dla ciągów ograniczonych, tzn. sumują ciągi ograniczone do tej samej granicy.*

Twierdzenie Mazura–Orlicza, określane w literaturze anglojęzycznej jako *Bounded Consistency Theorem*, uważane jest za fundamentalne dla teorii sumowalności (W. H. Ruckle w pracy [C10] pisze: *The Bounded Consistency Theorem is a principal result of summability theory. Indeed, it holds a claim to a second position in the theory just after the Silverman–Toeplitz Theorem*). Było one udowadniane na wiele sposobów (patrz [C2], [C13], [C14], [C10], [C11], [C12]). Autorem jednego z dowodów (liczącego kilka stron niełatwych rachunków), podanego w 1945 roku, był A. L. Brudno ([C2]). W związku z tym faktem mówi się niekiedy o twierdzeniu Brudno–Mazura–Orlicza zamiast Bounded Consistency Theorem (porównaj np. [C5]). Oryginalny dowód twierdzenia Mazura–Orlicza o zgodności został uproszczony przez Władysława Orlicza w [65], a w sposób krótki, elegancki i elementarny pokazali je Snyder i Wilansky w [C11]. Z kolei N. A. Davydov ([C4]) wykazał, że twierdzenie o zgodności nie jest prawdziwe dla ciągów nieograniczonych (nie można go wzmocnić nawet o jeden ciąg nieograniczony). J. Boos i T. Leiger w [C1] podali listę 53 prac o tym twierdzeniu i jego uogólnieniach.

Niezwykle ważną obserwacją dokonaną przez Mazura i Orlicza w roku 1933 było spostrzeżenie, że przestrzenie Banacha nie są odpowiednim narzędziem metodycznym do badań pól sumowalności, natomiast wiele można uzyskać angażując metody przestrzeni Frécheta. Bardzo użyteczną okazuje się ośrodkowa topologia liniowa na c_A wprowadzona przez rodzinę półnorm

$$p(x) = \sup_n \Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \Big|, \quad p_n(x) = \sup_m \Big| \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k \Big|, \quad q_n(x) = |x_n|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Temat pracy [59] to przede wszystkim zagadnienia zgodności metod sumowalności, rzędów wzrostu ciągów z pola sumowalności i istnienia nieograniczonych ciągów w polu sumowalności.

Problematyka podjęta przez Mazura i Orlicza w [19] i [59] znalazła znaczną liczbę kontynuatorów, głównie za granicą (R. P. Agnew, A. L. Brudno, V. M. Darewsky, A. Wilansky, K. Zeller). Każda monografia poświęcona teorii sumowalności opublikowana po roku 1950 odwołuje się do wyników Mazura i Orlicza oceniając je niezwykle wysoko (np. K. Zeller we wstępie do swojej monografii [C13] pisze: *układ książki jest w sposób istotny wyznaczony przez fundamentalne funkcjonalno-teoretyczne badania S. Mazura i W. Orlicza*).

Idee zawarte w [19], [59] i w [65] zostały później rozwinięte i zastosowane przez Alexiewicza i Orlicza m.in. do wykazania twierdzeń o zgodności dla ograniczonych ciągów podwójnych i ciągu operatorów ([63], [81] patrz też [80]). Twierdzenia uzyskano w oparciu o metody teorii przestrzeni dwunormowych.

Problematyka sumowalności pojawiała się w pracach Profesora Orlicza także w następnych okreasch w związku z badaniem przestrzeni Saksa i przestrzeni modularnych ([69], [74], [77], [101], [103]).

[C1] J. Boos, T. Leiger, *General theorems of Mazur–Orlicz type*, Studia Math. 92 (1989), 1–19.

[C2] A. Brudno, *Summation of bounded sequences by matrices*, Mat. Sbornik N.S. 16 (1945), 191–247 (po rosyjsku).

[C3] R. G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, Macmillan, London, 1950, xiii + 347 str. (rosyjskie tłumaczenie: *Nieskończone macierze i przestrzenie ciągów*, Moskwa 1960).

[C4] N. A. Davydov, *The sharpness of the Mazur–Orlicz theorem*, Mat. Zametki 11 (1972), 431–436; angielskie tłumaczenie w Math. Notes 11 (1972), 263–265.

[C5] A. Jakimovski, A. Livne, *An extension of Brudno–Mazur–Orlicz theorem*, Studia Math. 41 (1971), 257–262.

[C6] G. Köthe, *Wkład Stanisława Mazura w analizę funkcjonalną*, Wiadom. Mat. 30 (1994), 199–250 (jest to polskie tłumaczenie artykułu *Stanisław Mazur's Contributions to Functional Analysis*, Math. Ann. 277 (1987), 489–528).

[C7] I. J. Maddox, *Infinite Matrices of Operators*, Lecture Notes in Math. 786, Springer, Berlin 1980, v + 122 str.

[C8] M. Mastyło, *Zastosowanie przestrzeni dwunormowych w teorii sumowalności*, Serta Mathematica Andreae Alexiewicz, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1996, 103–117.

[C9] G. M. Petersen, *Regular Matrix Transformations*, McGraw-Hill Pub., London – New York – Toronto 1966, viii + 142 str.

[C10] W. H. Ruckle, *The bounded consistency theorem*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 566–571.

[C11] A. K. Snyder, A. Wilansky, *The Mazur–Orlicz bounded consistency theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 374–375.

[C12] A. Wilansky, *Summability through Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam – New York 1984, xii + 318 str.

[C13] K. Zeller, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen –Heidelberg 1958, viii + 242 str.

[C14] K. Zeller, W. Beekmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer-Verlag, Berlin – New York 1970, xii + 314 str.

F. Funkcjonały ortogonalnie addytywne i przestrzenie modularne. Współpraca Profesora Orlicza z Lechem Drewnowskim zaowocowała w końcu lat sześćdziesiątych cyklem prac poświęconych reprezentacji funkcjonałów ortogonalnie addytywnych, określonych na ideałach w przestrzeniach funkcji mierzalnych, tj. podkratach X w przestrzeni $L^0(S,\Sigma,\mu)$ funkcji Σ-mierzalnych spełniających warunek: $g \in X$ oraz $|f(s)| \leqslant |g(s)|$ μ prawie wszędzie pociąga $f \in X$. O funkcjonale $\lambda : X \to \mathbb{R}$ mówi się, że jest *ortogonalnie addytywny* i $b\mu - \mu$ ciągły, gdy $\lambda(f+g) = \lambda(f) + \lambda(g)$ o ile $\mu(\{s : f(s)g(s) \neq 0\}) = 0$ oraz $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ o ile $f_n \to f$ wg miary μ i $|f_n|, |f| \leqslant |g|$ dla pewnej funkcji $g \in X$. Przy tak ogólnych założeniach Drewnowski i Orlicz uzyskują całkową reprezentację funkcjonału ortogonalnie addytywnego i $b\mu - \mu$ ciągłego λ, a mianowicie

$$(*) \qquad \lambda(f) = \int_S \varphi(f(s), s)\, d\mu,$$

gdzie φ jest funkcją spełniającą warunki typu Carathéodory'ego. Jednym z wniosków wynikających z powyższej postaci funkcjonału λ jest twierdzenie o tym, że operator $b\mu - \mu$ ciągły $T : X \to L^0(S,\Sigma,\mu)$ spełniający dodatkowo warunek $(T(f))1_A = (T(f1_A))1_A$ dla każdego zbioru $A \in \Sigma$ (1_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A) jest operatorem kompozycji, tzn. $(T(f))(s) = \varphi(f(s), s)$ μ prawie wszędzie, gdzie i tutaj φ jest pewną funkcją spełniającą warunki typu Carathéodory'ego.

Innym szerzej wykorzystywanym twierdzeniem reprezentacyjnym autorstwa Lecha Drewnowskiego i Władysława Orlicza jest wynik o postaci modularu ortogonalnie addytywnego ϱ zadanego na podkracie $X \subset L^0(S, \Sigma\, \mu)$, która zawierając funkcję f zawiera też iloczyn $f1_A$ dla dowolnego $A \in \Sigma$. Przez modular ortogonalnie addytywny rozumie się funkcję $\varrho : X \to [0,\infty]$ spełniającą cztery warunki:

(ϱ_A) $\quad \varrho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0,$

(ϱ_B) $\quad |f| \leqslant |g| \Rightarrow \varrho(f) \leqslant \varrho(g),$

(ϱ_C) $\quad 0 \leqslant f_n \nearrow f \Rightarrow \varrho(f_n) \nearrow \varrho(f),$

(ϱ_D) $\quad \varrho(f+g) = \varrho(f) + \varrho(g),$ gdy $\mu(\{s : f(s)g(s) \neq 0\}) = 0.$

Okazuje się, że modular ϱ jest także postaci $(*)$, przy czym jeśli μ jest dodatkowo bezatomowa oraz $\varrho(f) = \varrho(g)$ dla jednakowo mierzalnych funkcji $f, g \in X$ oraz $1_S \in X$, to funkcja φ reprezentująca ϱ jest funkcją jednej zmiennej: $\varrho(f) = \int_S \varphi(f(s))\, d\mu$.

Twierdzenie o reprezentacji modularów ortogonalnie addytywnych odgrywa kluczową rolę w badaniach *krat Orlicza* – abstrakcyjnych odpowiedników przestrzeni Musielaka–Orlicza. Kraty Orlicza, wprowadzone przez W. J. Classa, A. C. Zaanena i W. Wnuka, są naturalnym rozszerzeniem AL_p-przestrzeni F. Bohnenblusta będących abstrakcyjnymi odpowiednikami przestrzeni L^p. Całkowa postać modularu ortogonalnie addytywnego została użyta przez N. J. Kaltona i L. Drewnowskiego do wykazania twierdzenia o faktoryzacji operatorów AM-zwartych określonych na ideałach z normą porządkowo ciągłą zawartych w przestrzeniach Orlicza i Musielaka–Orlicza.

Władysław Orlicz rozwijał teorię przestrzeni modularnych zapoczątkowanej przez Hidegoro Nakano w książkach *Modulared Semi-ordered Linear Spaces* (Maruzen, Tokyo 1950) i *Topology and Topological Linear Spaces* (Maruzen, Tokyo 1951). Profesor Orlicz uzyskał szereg wyników dotyczących własności typu Fatou i Levi'ego w kratach liniowych z funkcjonałem ϱ spełniającym warunki $(\varrho 1), (\varrho 2)$ oraz warunek $\varrho(f \vee g) \leqslant \varrho(f) + \varrho(g)$ dla $f, g \geqslant 0$.

Współpracując z Julianem Musielakiem zauważył, że funkcjonał ϱ określony na rzeczywistej przestrzeni liniowej X i mający własności:

$(\varrho 1)$ $\qquad \varrho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$(\varrho 2)$ $\qquad \varrho(-x) = \varrho(x),$

$(\varrho 3)$ $\qquad \varrho(\alpha x + \beta y) \leqslant \varrho(x) + \varrho(y), \text{ dla } \alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1,$

$(\varrho 4)$ $\qquad \varrho(tx) \to 0 \text{ gdy } t \to 0,$

definiuje na X F-normę równością

$$\|x\|_\varrho = \inf\{\varepsilon > 0 : \varrho(x/\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}, \tag{$**$}$$

przy czym $\|x_n\|_\varrho \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(tx_n) \to 0$ dla wszystkich $t > 0$. Równość $(**)$ jest przeniesieniem na przypadek ogólnych przestrzeni liniowych pomysłu Mazura i Orlicza, którzy w pracy [76] tak właśnie wprowadzili topologię metryczną w przestrzeniach Orlicza generowanych przez niewypukłe funkcje Orlicza (w roli modularu występuje wtedy oczywiście funkcjonał $\int_S \varphi(|f(s)|)\,d\mu$).

Profesor Orlicz rozważał oprócz zbieżności w sensie F-normy $\|\cdot\|_\varrho$ tzw. *zbieżność modularną* przyjmując, że $x_n \xrightarrow{\varrho} 0$, gdy $\varrho(tx_n) \to 0$ dla pewnego $t > 0$. Zbieżność modularna nie jest na ogół topologiczna (tzn. nie można zadać topologii τ na X w taki sposób, aby $x_n \xrightarrow{\varrho} 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau} 0$). Bywa ona jednak przydatna w zagadnieniach aproksymacyjnych (np. funkcje klasy C_0^∞ nie muszą być F-normowo gęste w przestrzeni Orlicza–Sobolewa, ale każda funkcja z tej przestrzeni jest granicą, w sensie zbieżności modularnej, ciągu funkcji klasy C_0^∞).

Władysław Orlicz zajmował się również przypadkiem modularów s-wypukłych $(0 < s \leqslant 1)$, tzn. w miejsce aksjomatu $(\varrho 3)$ przyjmował warunek

$$\varrho(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha^s \varrho(x) + \beta^s \varrho(y) \text{ dla } \alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha^s + \beta^s = 1.$$

Jak wykazano w pracy [95] modular s-wypukły ϱ definiuje normę s-jednorodną ($= s$-normę) wzorem

$$\|x\|_{s\varrho} = \inf\{\varepsilon > 0 : \varrho(x/\varepsilon^{1/s}) \leqslant 1\}.$$

Co więcej, czego także dowiódł Profesor Orlicz w [95], zachodzi równość

$$\|x\|_{s\varrho} = \inf_{t>0} \max(t^{-s}, t^{-s}\varrho(tx)).$$

Powyższa s-norma jest równoważna s-normie

$$\|x\|^0_{s\varrho} = \inf_{t>0}(t^{-s} + t^{-s}\varrho(tx)),$$

która dla $s = 1$ jest tzw. normą Amemiya dobrze znaną w teorii przestrzeni modularnych Nakano.

Teoria przestrzeni modularnych pozwalała na objęcie wspólną metodyką badań klas przestrzeni dość od siebie pod różnymi względami odległych (np. przestrzeni Musielaka–Orlicza i przestrzeni funkcji o skończonej φ-wariacji). Jednak teoria ta, mimo wielokierunkowych badań, nie przyniosła istotnego postępu w „rozpracowywaniu” F-przestrzeni czy ogólniej przestrzeni liniowo-topologicznych.

[C1] R. Leśniewicz, *On modular spaces I, II*, Comment. Math. Prace Mat. 18 (1975), 23–242, 243–271.

[C2] J. Musielak, *Przestrzenie Modularne*, Wydawnictwo Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1978, 136 str.

[C3] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math. 1034, Springer-Verlag, Berlin 1983, iii + 222 str.

[C4] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, Monograf. Mat. 56, PWN, Warszawa, 1972, 287 str.

[C5] W. Wnuk, *Representations of Orlicz lattices*, Dissertationes Math. 235 (1984), 1–62.

G. Operatory wielomianowe. W latach trzydziestych, po stworzeniu zasadniczych zrębów liniowej analizy funkcjonalnej, podjęto we Lwowie pewne próby zbudowania nieliniowej analizy funkcjonalnej. Owocem tych wysiłków były prace J. Schaudera (m.in. twierdzenie o punkcie stałym) oraz prace Mazura i Orlicza o operatorach wielomianowych. Wcześniej operatory wielomianowe rozważali m.in. M. Fréchet, A. D. Michal, R. S. Martin, T. Hildebrandt, F. Leja.

Prace Mazura i Orlicza [23], [26], [29], [30], [32] mają charakter pionierski. W pracy [23] bada się trzy równoważne definicje funkcji i operatorów wielomianowych.

Operator $U_m : X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami liniowo-topologicznymi, nazywa się *wielomianem jednorodnym stopnia* m, jeżeli U_m jest obcięciem do przekątnej operatora m-liniowego, tzn. $U_m(x) = U^*_m(x, x, \ldots, x)$, gdzie $U^*_m : X^m \to Y$ jest operatorem m-liniowym. Operator $P : X \to Y$ jest *operatorem wielomianowym stopnia* n jeżeli jest sumą skończonej liczby operatorów wielomianowych jednorodnych, tzn.

$$P(x) = U_0(x) + U_1(x) + \ldots + U_n(x),$$

gdzie każdy U_m jest albo wielomianem jednorodnym stopnia m lub operatorem zerowym dla $0 \leqslant m \leqslant n$. Inne równoważne definicje operatorów wielomianowych podane przez Mazura i Orlicza są następujące:

— operator $P : X \to Y$ jest operatorem wielomianowym stopnia n gdy

$$\Delta_h^{n+1} P(x) = 0 \quad \text{dla } x, h \in X,$$

gdzie różnice Δ_h^{n+1} określa się indukcyjnie w zwykły sposób,

— operator $P : X \to Y$ jest operatorem wielomianowym stopnia n jeżeli dla każdego $x, h \in X$ i każdej liczby t

$$P(x + th) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x, h) t^k,$$

gdzie $a_k(x, h) \in Y$ są niezależne od t.

W dyskusji nad różnymi definicjami Mazur i Orlicz posługują się tzw. formą biegunową. Wykazują oni mianowicie, że jeżeli U_k jest operatorem jednorodnym stopnia k, to odpowiadający mu symetryczny operator k-liniowy jest wyznaczony jednoznacznie; ten operator nazywa się *operatorem generującym* lub *formą biegunową*. Wyraża się on wzorem

$$U_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k = 0,1} (-1)^{k-(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)} U_k(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k).$$

Główny rezultat w [26] to przeniesienie twierdzenia Banacha–Steinhausa o ciągach operatorów liniowych na przypadek operatorów wielomianowych o jednostajnie ograniczonych stopniach. Autorzy wykazali następujący fakt:

TWIERDZENIE MAZURA–ORLICZA ([26]). *Jeżeli P_n jest ciągiem ciągłych operatorów wielomianowych stopnia $\leqslant N$ z F-przestrzeni X do przestrzeni F-unormowanej Y oraz jeżeli $\{x \in X : \{P_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$ jest ograniczony$\}$ jest zbiorem drugiej kategorii Baire'a w X, to ciąg $(P_n(x))$ jest jednakowo ciagły w $x = 0$. W konsekwencji, jeżeli $P_n(x) \to P(x)$ dla każdego $x \in X$, to P jest operatorem wielomianowym.*

W dwóch notach [30] i [32], opublikowanych w *Comptes Rendus* Akademii Paryskiej w 1936 roku, Mazur i Orlicz podali szereg twierdzeń o podzielności funkcjonałów wielomianowych oraz twierdzenia o funkcjonałach wymiernych. Postawili oni również kilka problemów w *Księdze Szkockiej* ([C7], problemy 20.1, 56, 73, 74) związanych z operatorami wielomianowymi. Problem 73 to pytanie:

Niech c_n będzie najmniejszą stałą o własności, że dla dowolnego symetrycznego operatora n-liniowego F między przestrzeniami unormowanymi mamy

$$\sup_{\|x_i\| \leqslant 1,\, i=1,\ldots,n} \|F(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant c_n \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|F(x, \ldots, x)\|.$$

Czy $c_n = \frac{n^n}{n!}$?

Problem ten został rozwiązany pozytywnie, a dokładne omówienie można znaleźć w komentarzu do Problemu 73 w *The Scottish Book* ([C7]).

Operatory wielomianowe sa najprostszymi funkcjami analitycznymi między przestrzeniami Banacha. Ponadto są one używane do konstruowania innych operatorów analitycznych (przez rozwijanie w szereg wielomianów jednorodnych). Naturalnymi dziedzinami istnienia analitycznych odwzorowań są dziedziny w przestrzeniach zespolonych. Z drugiej strony, w wielu zastosowaniach analizy funkcjonalnej operatory analityczne w rzeczywistych przestrzeniach Banacha grają też istotną rolę. Dlatego w dwóch pracach Orlicza [48], [56] – wspólnych z A. Alexiewiczem – przenosi się dobrze znaną teorię w zespolonych przestrzeniach Banacha na przypadek rzeczywistych przestrzeni Banacha. Dla przykładu, w pracy [56] wykazuje się równoważność słabej i mocnej analityczności.

Wyniki Mazura i Orlicza oraz Alexiewicza i Orlicza są cytowane w monografiach [C2], [C3], [C4]. Wyniki te stały się przedmiotem dalszych badań wielu matematyków, m.in. P. Lelonga [C5], [C6], J. Bochnaka i J. Siciaka [C1], Ph. Turpina [C9] i S. Dineena [C2].

Monografia [C2] zawiera pełną bibliografię dotyczącą operatorów wielomianowych i operacji analitycznych wraz z interesującymi komentarzami.

[C1] J. Bochnak, J. Siciak, *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces*, Studia Math. 39 (1971), 59–76 i 77–112.

[C2] S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, Notas de Matemática 83, North-Holland 1981, xii + 492 str.

[C3] E. Hille, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, New York 1948, xii + 528 str.

[C4] E. Hille, R. S. Philips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, Providence 1957, xii + 808 str.

[C5] P. Lelong, *Sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et une extension du théorème de Banach–Steinhaus aux families d'applications polynomiales*, Troisième Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle (Liège 1970), Vander, Louvain 1971, 21–45.

[C6] P. Lelong, *Théorème de Banach–Steinhaus pour les polynômes; applications entières d'espaces vectoriels complexes*, Séminaire d'Analyse P. Lelong 1970, exposé no. 9, Lecture Notes in Math. 205, Springer-Verlag, Berlin 1970, 87–112.

[C7] R. D. Mauldin, *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1981, xiii + 268 str.

[C8] G. Köthe, *Wkład Stanisława Mazura w analizę funkcjonalną*, Wiadom. Mat. 30 (1994), 199–250 (polskie tłumaczenie artykułu *Stanislaw Mazur's Contributions to Functional Analysis*, Math. Ann. 277 (1987), 489–528).

[C9] Ph. Turpin, *Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux*, Dissertationes Math. 131 (1976), 221 str.

H. Interpolacja operatorów. Operator $T : X \to X$ nazywa się *operatorem Lipschitza* w przestrzeni unormowanej X, jeżeli $T0 = 0$ oraz istnieje stała dodatnia M taka, że $\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in X$.

Najmniejsza stała M jest normą Lipschitza operatora T i oznacza się ją przez $\|T\|_{\mathrm{Lip}(X)}$. Niech X_0, X, X_1 będzie trójką przestrzeni Banacha, przy czym mamy ciągłe włożenia $X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_0$. Jeżeli dowolny operator liniowy i ciągły (Lipschitza) $T : X_i \to X_i$, $i = 0, 1$, jest ciągły (Lipschitza) z X w X, to przestrzeń X nazywa się *interpolacyjną* między X_0 i X_1 dla operatorów liniowych (Lipschitza). Oczywiście, jeśli X jest interpolacyjna dla operatorów Lipschitza to jest interpolacyjna dla operatorów liniowych.

W 1935 roku Profesor Orlicz [24] wykazał, że ośrodkowa przestrzeń Orlicza $L^{\varphi}[a,b]$ jest interpolacyjna między $L^1[a,b]$ i $L^{\infty}[a,b]$ dla operatorów liniowych. Wiele lat później, bo w 1954 roku, uzyskał rezultat dla wszystkich przestrzeni Orlicza i dla operatorów Lipschitza, a mianowicie:

Twierdzenie interpolacyjne Orlicza ([61]). *Każda przestrzeń Orlicza $L^{\varphi}[a,b]$ jest interpolacyjna między $L^1[a,b]$ i $L^{\infty}[a,b]$ dla operatorów Lipschitza oraz*

$$\|T\|_{\mathrm{Lip}(L^{\varphi})} \leqslant \max(\|T\|_{\mathrm{Lip}(L^1)}, \|T\|_{\mathrm{Lip}(L^{\infty})}).$$

W orginalnym sformułowaniu twierdzenia, po prawej stronie nierówności występuje w miejsce 1 stała $C > 1$. Twierdzenie to było uogólniane na przypadek przestrzeni symetrycznych przez B. S. Mitjagina (1965), A. P. Calderóna (1966), T. Shimogaki'ego (1968), G. G. Lorentza i T. Shimogaki'ego (1969, 1971), G. I. Russu (1969), L. Maligrandę (1979, 1989, 1991). Problematyka tych uogólnień jest podejmowana w [C4], [C1], [C5], [C6], [C7].

W 1954 roku w pracy [60] Profesor Orlicz udowodnił również, że dla dowolnej funkcji rosnącej i wklęsłej w na $[0,\infty)$ przestrzeń funkcji lipschitzowskich $\mathrm{Lip}\, w$ *jest interpolacyjna między* $C[a,b]$ *i* $\mathrm{Lip}\, 1$ *na* $[a,b]$ *dla operatorów liniowych* (i dla pewnej klasy operatorów nieliniowych). Twierdzenie to nie zostało zauważone w literaturze, choć było pierwszym twierdzeniem interpolacyjnym wykraczającym poza przestrzenie Banacha funkcji mierzalnych. Analogiczne badania wiele lat później prowadzili R. O'Neil (1966), E. M. Semenov (1968), J. Peetre (1969).

W pracy [141], wspólnej z Henrykiem Hudzikiem i Ryszardem Urbańskim, udowodnione zostało twierdzenie o interpolacji operatorów subliniowych w ciągowych przestrzeniach Musielaka–Orlicza. Wykazane zostało twierdzenie typu Riesza–Thorina przy użyciu metody trzech prostych dla funkcji subharmonicznych. Zaletą takich rozważań jest stała 4 lub 8 w oszacowaniu norm operatorów w zależności od przypadku rzeczywistego lub zespolonego. Bardziej ogólne twierdzenia o interpolacji przestrzeni Orlicza, bez zwracania specjalnej uwagi na najlepsze oszacowanie norm, były wykazane przez wielu autorów (porównaj [C8], [C6], [C3]), przy czym rezultat V. I. Ovchinnikova ([C8]) jest tutaj najważniejszy.

[C1] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure Appl. Math. 129, Academic Press, Boston 1988, xiv + 469 str.
[C2] Yu. A. Brudnyi, S. G. Krein, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Itogi Nauki i Techniki, T. Mat. Analiz, Moskwa 1986, 3–163; angielskie tłumaczenie w J. Soviet Math. 42 (1988), 2009–2113.
[C3] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces. I*, North-Holland, Amsterdam 1991, xvi + 718 str.
[C4] S. G. Krein, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Nauka, Moskwa 1978; angielskie tłumaczenie Amer. Math. Soc., Providence 1982, xii + 375 str.
[C5] L. Maligranda, *Some remarks on Orlicz's interpolation theorem*, Studia Math. 95 (1989), 43–58.
[C6] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Math. 5, Univ. of Campinas, Campinas SP, Brazil 1989, iii + 206 str.
[C7] L. Maligranda, *On Orlicz results in interpolation theory*, Proc. Orlicz Mem. Conf., Oxford/MS (USA) 1991, Exp. No. 5, 1–12 (1991).
[C8] V. I. Ovchinnikov, *The Method of Orbits in Interpolation Theory*, Math. Reports Vol. 1, Part 2, Harwood Publishers 1984, 349–516.

I. Równania różniczkowe – twierdzenia generyczne. Zbiór A w przestrzeni metrycznej X nazywa sie zbiorem *I kategorii Baire'a* (chudym), jeżeli jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów nigdziegęstych; zbiór jest nigdziegęsty (rzadki), jeżeli wnętrze domknięcia jest puste. Jeżeli zbiór A nie jest I kategorii Baire'a, to nazywamy go zbiorem *II kategorii Baire'a.* Zbiór A jest *rezydualny*, jeśli jego dopełnienie jest zbiorem I kategorii. Czasami zamiast mówić, że zbiór jest rezydualny, mówimy, że opisywana przez niego własność jest generyczna. Podstawą wszystkich rozważań jest klasyczne twierdzenie Baire'a: zupełna przestrzeń metryczna jest II kategorii. Każdy zbiór rezydualny w tej przestrzeni jest gęsty i II kategorii.

Odpowiedź na pytanie, czy w zbiorze X jakichś obiektów matematycznych istnieją obiekty o danej własności W można często uzyskać stosując metodę kategorii Baire'a. Należy wyposażyć X w pewną metrykę zupełną i stwierdzić w niej rezydualność (generyczność) zbioru elementów o własności W. Tego rodzaju problematyka była przedmiotem zainteresowań Szkoły Lwowskiej już w latach trzydziestych. Powszechnie znane są twierdzenia S. Mazurkiewicza (1931) i S. Banacha (1931) o generyczności własności nieróżniczkowalności wszędzie w przestrzeni funkcji ciągłych $C[a,b]$. Pierwsze zastosowanie metody kategorii Baire'a w teorii równań różniczkowych podał Władysław Orlicz w 1932 roku. Rozważmy wszystkie funkcje f ciagłe i ograniczone w prostokącie $Q = [a,b] \times [c,d]$ lub $Q = [a,b] \times \mathbb{R}^n$. Klasyczne twierdzenie Peano informuje o istnieniu co najmniej jednego rozwiązania problemu Cauchy'ego

$$(*) \qquad x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Standardowym założeniem gwarantującym jednoznaczność rozwiązania w Q jest założenie, że f spełnia warunek Lipschitza. W przestrzeni Banacha

$C(Q)$ z norma supremalną zbiór funkcji spełniających warunek Lipschitza jest zbiorem I kategorii Baire'a i można by przypuszczać, że zbiór funkcji f dla których $(*)$ ma jednoznaczne rozwiązanie jest zbiorem I kategorii, ale jak wykazał właśnie Profesor Orlicz, zbiór ten jest zbiorem II kategorii Baire'a.

Twierdzenie Orlicza o kategoriach ([14]). *Zbiór funkcji f, dla których równanie $(*)$ posiada jednoznaczne rozwiązanie, jest rezydualny w przestrzeni $C(Q)$.*

Mamy tutaj więc trochę paradoksalną sytuację, gdyż twierdzenie Orlicza pokazuje, iż „praktycznie wszystkie" równania różniczkowe mają jednoznaczne rozwiązania, bo te bez jednoznacznego rozwiązania stanowią zbiór chudy.

Podobny rezultat dla problemu Darboux dotyczącego równań typu hiperbolicznego $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ został uzyskany przez Alexiewicza i Orlicza w [66].

Od lat siedemdziesiątych dał się zauważyć wyraźny wzrost zainteresowania problematyką generyczną w przestrzeniach nieskończonego wymiaru. Zapoczątkowała go praca A. Lasoty i J. Yorke'a [C1]. Autorzy dowiedli tam, że zbiór funkcji ciągłych f, dla których problem Cauchy'ego dla równania $x'(t) = f(t, x(t))$ w przestrzeni Banacha posiada własność istnienia, jednoznaczności i ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych, jest zbiorem rezydualnym w przestrzeni funkcji ciągłych. Przypomnijmy, że problem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha X ma rozwiązanie dla dowolnej funkcji ciagłej f wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończenie wymiarowa (A. N. Godunov 1975).

Dalsze twierdzenia typu Orlicza o kategoriach (dotyczące własności punktów stałych dla odwzorowań nierozszerzających, zbieżności kolejnych przybliżeń, rozwiązań rozmaitych typów równań różniczkowych, równań funkcyjnych i różniczkowo-funkcyjnych) uzyskali m.in. G. J. Butler, F. S. De Blasi, T. Costello, T. Dominguez Benavides, M. Kisielewicz, M. Kwapisz, J. Myjak, G. Pianigiani, S. Szufla, G. Vidossich.

W latach 1979–1981 Władysław Orlicz powrócił do własności generycznych. W pracy [140], wspólniej z Stanisławem Szuflą, wykazane zostało, że zbieżność kolejnych przybliżeń dla równania $x = f(x)$ jest własnością generyczną ($f : C(K, X) \to C(K, X)$ oznacza funkcję ciągłą, a X jest przestrzenią Frécheta).

W artykule [146] badali oni generyczne własności istnienia, jednoznaczności i zbieżności ciągu aproksymacji nieskończonego układu równań całkowych typu Volterry w przestrzeniach Banacha. Dokładne omówienie powyższych rezultatów znajduje się w [147], [C4], [C5].

W kolejnych publikacjach [148] i [154], także wspólnych z S. Szuflą, podano warunki dostateczne istnienia rozwiązania całkowego równania Volterry

$$x(t) = p(t) + \int_0^t f(t, s, x(s))\, ds,$$

gdzie rozwiązanie x jest funkcją z $J = [0, a]$ do ośrodkowej przestrzeni Banacha X i należy do wektorowej przestrzeni Orlicza $L^{\varphi}(J, X)$. Następnie stwierdzili, że przy tych samych założeniach zbiór wszystkich rozwiązań $x \in L^{\varphi}(J, X)$ jest kompaktem R_δ w sensie Aronszajna.

[C1] F. S. De Blasi, J. Myjak, *Generic properties of hyperbolic partial differential equations*, J. London Math. Soc. 15 (1977), 113–118.

[C2] F. S. De Blasi, J. Myjak, *Orlicz type category results for differential equations in Banach spaces*, Comment. Math. Prace Mat. 23 (1983), 193–197.

[C3] A. Lasota, J. Yorke, *The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach space*, J. Differential Equations 13 (1973), 1–12.

[C4] J. Myjak, *Twierdzenie o kategoriach w teorii równań różniczkowych i różniczkowo-funkcyjnych*, Zeszyty Naukowe AGH, Matematyka-Fizyka-Chemia 38 (1978), 7–61.

[C5] J. Myjak, *Orlicz type category theorems for functional and differential equations*, Dissertationes Math. 206 (1980), 81 str.

[C6] L. C. Piccinini, G. Stampacchia, G. Vidossich, *Ordinary Differential Equations in* $\mathbb{R}^n$. Problems and Methods, Appl. Math. Sci. 39, Springer-Verlag, New York – Berlin 1984, xii + 385 str.

J. Miara i całka. Funkcje rzeczywiste. Funkcje o skończonej wariacji. Władysław Orlicz jest autorem szeregu prac dotyczących skończenie addytywnych miar wektorowych. Zajmował się w nich m.in. konstrukcją całki z funkcji skalarnej względem miary μ o wartościach w przestrzeni Banacha X ([114]–[116], [128]) oraz zagadnieniem absolutnej ciągłości (w różnych znaczeniach tego pojęcia) miary wektorowej względem subaddytywnych funkcji zbioru ([121], [123], [127]). Warto tu zwrócić uwagę na twierdzenie podane w [123], gdzie przedstawiono dość ogólną sytuację, w której absolutna ciągłość każdej ze skalarnych funkcji zbioru $x^*\mu$ względem subaddytywnej skalarnej funkcji zbioru η implikuje absolutną ciągłość μ względem η (x^* jest tu ciągłym funkcjonałem liniowym na X). Problematyce różnych funkcji zbioru, twierdzeniu Brooksa–Jewetta, poświęcone są ponadto artykuły [142], [143], [152].

Inne prace, [37], [40], [53], przygotowane w okresie wojennym, ale z oczywistych względów opublikowane dopiero po kilku latach, traktują o zagadnieniu istnienia nieróżniczkowalnych funkcji ciągłych. Zastosowane tam metody dowodów, teorio-miarowe i kategoryjne, nawiązują do przedwojennych idei S. Banacha, S. Mazurkiewicza i H. Auerbacha. Rezultaty Władysława Orlicza zawarte w [37] są o tyle ciekawe, że są pośrednie między efektywnymi konstrukcjami nieróżniczkowalnych funkcji ciągłych a twierdzeniami egzystencjalnymi w rodzaju: w topologii normy supremalnej ciągłe funkcje różniczkowalne tworzą zbiór pierwszej kategorii Baire'a. Profesor Orlicz analizował różniczkowalność funkcji typu

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x), \qquad f_\varepsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(t) f_n(x),$$

gdzie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest jednostajnie zbieżnym w pewnym przedziale szeregiem funkcji ciągłych, $\varepsilon_n \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ lub $\varepsilon_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a $\varepsilon_n(t)$ oznaczają funkcje typu Rademachera. Władysław Orlicz sformułował warunki, których spełnienie przez funkcje f_n i ich pochodne implikuje, że funkcje f_ε nie są różniczkowalne dla ciągów (ε_n) należących do pewnego zbioru drugiej kategorii, a funkcje $f_\varepsilon(x,t)$ nie są różniczkowalne dla prawie wszystkich t.

W publikacji [40] podane zostało rozwiązanie problemu S. Ruziewicza (wpisanego do Księgi Szkockiej pod numerem 57) dotyczącego istnienia funkcji spełniających jednocześnie warunek Lipschitza względem niemalejącej funkcji w_0 oraz warunek nieróżniczkowalności względem innej funkcji niemalejącej w_1. Profesor Orlicz podał warunek konieczny i dostateczny istnienia takiej funkcji wyrażający się pewną relacją między w_0 i w_1.

Twierdzenie Orlicza ([40]). *Niech w_0 i w_1 będą funkcjami niemalejącymi na $[0,\ell]$, o wartości zero jedynie w zerze i prawostronnie ciągłymi w punkcie* 0. *Na to by istniała ℓ-okresowa funkcja f na $\mathbb{R}$ spełniająca warunki*:

(1) $|f(x+h) - f(x)| \leqslant w_0(|h|)$ *dla wszystkich* $|h| \leqslant \ell$,

(2) $\limsup_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)|/w_1(|h|) = +\infty$, *dla wszystkich* $x \in \mathbb{R}$, *potrzeba i wystarcza by*

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{w_1(h)}{h}\gamma(h) = 0, \qquad \text{gdzie } \gamma(h) = \sup_{0<k\leqslant h} \frac{k}{w_0(k)}.$$

Dostateczność została udowodniona przez efektywne skonstruowanie funkcji f. Z twierdzenia Orlicza otrzymujemy jako bezpośrednie konsekwencje nastepujące rezultaty:

— rezultat A. Zygmunda (1929) i S. Steckela (1929): istnieje okresowa funkcja f taka, że zachodzi (1) oraz $\limsup_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)|/h = +\infty$ dla wszystkich x wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{h\to 0} h/w_0(h) = 0$,

— jeżeli $s > 1$ to $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} \varphi(2^{sn^2})$ jest ciągła, nieróżniczkowalna, spełnia warunek Höldera dla $\gamma < 1/s$ i dla $\delta > 1/s$ $\limsup_{h\to 0^+} |f(x+h) - f(x)|/h^\delta = +\infty$ dla wszystkich x, przy czym φ jest niestałą funkcją spełniającą warunek Lipschitza.

Cytowane wyżej twierdzenie, opatrzone komentarzem, znaleźć można w książce [C9].

Analogicznym kwestiom poświęcona jest praca [53] gdzie zastąpiono granicę górną przez aproksymatywną granicę górną. Badania w tym zakresie kontynuował uczeń Władysława Orlicza, E. Tarnawski w połowie lat pięćdziesiątych.

Dla podziału $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ przedziału $[a, b]$, funkcji rzeczywistej x na $[a, b]$ oraz funkcji Orlicza φ przyjmujemy

$$\sigma_\varphi(x, \pi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(|x(t_k) - x(t_{k-1})|).$$

Jeżeli $v_\varphi(x) = \sup_\pi \sigma_\varphi(x, \pi) < \infty$, to mówimy, że x ma *ograniczoną* (*skończoną*) *φ-wariację* na $[a, b]$. Dla $\varphi(u) = u^p$ otrzymujemy w przypadku $p = 1$ klasyczną wariację Jordana, a dla $p \neq 1$ tzw. p-tą wariację wprowadzoną w 1924 roku przez N. Wienera, a wykorzystaną wkrótce przez J. Marcinkiewicza i L. C. Younga w teorii szeregów Fouriera i całki Riemanna–Stieltjesa. Natomiast pojęcie φ-wariacji pojawiło się już w 1937 roku w pracy [C11].

Funkcjonał $v_\varphi(\cdot)$ jest ważnym przykładem modularu. Związana z nim klasa $V_0^\varphi = \{x : v_\varphi(x) < \infty \text{ i } x(a) = 0\}$ oraz przestrzeń $V^\varphi = \{x : \lambda x \in V_0^\varphi$ dla pewnego $\lambda > 0\}$ była badana przez Juliana Musielaka i Władysława Orlicza w [78]. Zauważyli oni m.in., że równość $V_0^\varphi = V^\varphi$ równoważna jest spełnianiu przez φ warunku Δ_2 dla małych u oraz $V_0^{\varphi_1} \subset V_0^{\varphi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych $C, u_0 > 0$ zachodzi $\varphi_2(u) \leqslant C\varphi_1(u)$ o ile $u \in [0, u_0]$. Autorzy artykułu [78] stwierdzili też zupełność przestrzeni V^φ (generowanej przez wypukłą funkcję φ) względem normy będącej funkcjonałem Minkowskiego zbioru V_0^φ, a ponadto podali uogólnienie twierdzenia Helly'ego o wyrywaniu podciągu i rozszerzyli wyniki E. R. Love z 1951 roku dotyczące φ-absolutnej ciągłości.

W [133] badane były warunki istnienia całki Riemanna–Stieltjesa $\int_a^b x(t)\,dy(t)$. W szczególnie ważnej roli wystąpiły tu logartymicznie wypukłe funkcje Orlicza φ:

$$\varphi(u^\alpha v^\beta) \leqslant \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) \quad \text{dla } u, v, \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

Autorzy pracy [133] rozpatrywali szereg Younga

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right),$$

gdzie φ, ψ oznaczają ściśle rosnące funkcje Orlicza, i dowiedli dwóch implikacji wiążących zbieżność powyższego szeregu z indeksami Matuszewskiej–Orlicza funkcji φ, ψ:

$$\frac{1}{s_\varphi^0} + \frac{1}{s_\psi^0} > 1 \Rightarrow S < \infty, \qquad \frac{1}{s_\varphi^0} + \frac{1}{s_\psi^0} < 1 \Rightarrow S = \infty.$$

Podali też dwa dowody twierdzenia Younga (patrz [C12]): *jeżeli φ, ψ są logarytmicznie wypukłymi ściśle rosnącymi funkcjami Orlicza dla których* *szereg Younga jest zbieżny oraz $x \in V^\varphi$ jest funkcją ciągłą, a $y \in V^\psi$, to całka Riemanna–Stieltjesa funkcji x względem y istnieje i ponadto*

$$\Big|\int_a^b x(t)\,dy(t)\Big| \leqslant \varphi^{-1}(v_\varphi(x))\psi^{-1}(v_\psi(y)) + \sum_{n=1}^\infty \varphi^{-1}(n^{-1}v_\varphi(x))\psi^{-1}(n^{-1}v_\psi(y)).$$

Leśniewicz i Orlicz zauważyli też, że założenie $S < \infty$ jest istotne, bo gdy $S = \infty$, funkcje φ, ψ i funkcje do nich sprzężone φ^*, ψ^* spełniają warunek Δ_2 dla małych u, to istnieją funkcje ciągłe $x \in V^\varphi$, $y \in V^\psi$ dla których całka $\int x\,dy$ nie istnieje. Rezultaty przedstawione w [133] były później uogólniane w [C10] i [C13]. Co więcej, zostały zamieszczone w książce [C2].

W cyklu dziewięciu artykułów Władysława Orlicza, napisanych wspólnie z Jarosławem Ciemnoczołowskim i Wandą Matuszewską ([149], [153], [157–159], [162], [165], [167], [171]), badane były związki przestrzeni V^φ z różnymi innymi przestrzeniami funkcji (w tym z przestrzenią funkcji o skończonej wariacji w sensie Watermana), przedstawione zostało uogólnienie twierdzenia Marcinkiewicza z pracy [C5] oraz następujące rozszerzenie twierdzenia Rjazanova z [C8]: *jeżeli wypukła funkcja Orlicza φ spełnia warunek Δ_2 dla wszystkich u i $v_\varphi(x) < \infty$, gdzie x jest funkcją okresową na $\mathbb{R}$ o okresie* 1, *to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $A \subset [0,1]$ taki, że $|[0,1] \setminus A| < \varepsilon$ a zawężenie $x_{|A}$ funkcji x do zbioru A spełnia warunek typu Höldera*: $\varphi(|x_{|A}(t) - x_{|A}(s)|) \leqslant K|t-s|$.

Jeżeli P_δ oznacza podział przedziału $[a,b]$ o średnicy co najwyżej δ, to funkcjonał $v_\varphi^\delta(x) = \sup_{P_\delta} \sigma_\varphi(x, P_\delta)$ jest także modularem i to modularem wypukłym, gdy φ jest wypukłą funkcją Orlicza. Wyznacza on więc normę typu Luxemburga $\|x\|_\varphi^\delta = \inf\{\varepsilon > 0 : v_\varphi^\delta(x/\varepsilon) \leqslant 1\}$. Podprzestrzeń domknięta $V_1^\varphi \subset V^\varphi$ zdefiniowana jako $V_1^\varphi = \{x \in V^\varphi : \lim_{\delta\to 0^+} \|x\|_\varphi^\delta = 0\}$ ma ciekawe własności topologiczne – jest ośrodkowa, ale jej przestrzeń dualna jest nieośrodkowa, a jeśli dodatkowo funkcja sprzężona φ^* spełnia warunek Δ_2 dla małych u, to V_1^φ nie zawiera izomorficznej kopii przestrzeni ℓ^1. Fakty te zostały ustalone w [164]. Tym samym Władysław Orlicz rozszerzył wynik J. Lindenstraussa i C. Stegalla z 1975 roku, którzy wskazali po raz pierwszy na przestrzenie V_1^φ, wyznaczone przez wypukłe funkcje potęgowe φ, jako na przykład ośrodkowej przestrzeni Banacha bez kopii ℓ^1 z nieośrodkowym dualem. Uproszczenia rozumowań Lindenstraussa i Stegalla dokonał w [C4] S. V. Kisliakov.

W pracy [167] znajduje się analiza własności funkcjonału v_φ oraz związki przestrzeni V^φ z przestrzeniami funkcji o skończonej wariacji w sensie Wienera (tzn. $v_\varphi^W(x) = \lim_{\delta\to 0^+} v_\varphi^\delta(x) < \infty$) i z przestrzeniami o skończonej wariacji w sensie Riesza tj. $r_\varphi(x) = \sup_\pi \varrho_\varphi(x,\pi) < \infty$, gdzie

$$\varrho_\varphi(x,\pi) = \sum_{k=1}^n \varphi(|x(t_k) - x(t_{k-1})|/(t_k - t_{k-1}))(t_k - t_{k-1}).$$

Pokazano tam m.in., że addytywność (subaddytywność) funkcjonału v_φ jako funkcji przedziału oznacza liniowość funkcji φ (równoważność funkcji φ z funkcją liniową) w pewnym otoczeniu zera. Ponadto Profesor Orlicz zauważył, iż w ogólności $v_\varphi^W(x) \leqslant v_\varphi(x)$, chociaż zawsze istnieją funkcje dla których w powyższej nierówności zachodzi równość, a w przypadku subaddytywnych funkcji φ mamy $v_\varphi^W(x) = v_\varphi(x)$ dla dowolnej funkcji x. W artykule [167] znaleźć też można warunki implikujące, dla absolutnie ciągłej funkcji x o skończonej wariacji w sensie Riesza, przynależność pochodnej x' do klasy Orlicza $L_0^\varphi[a,b]$, przy czym rozważane są przede wszystkim niewypukłe funkcje Orlicza φ (przypadek wypukłych funkcji φ badali wcześniej J. T. Medvedev w 1953 roku i K. U. Rzaev w 1976 roku).

Odnotować wypada również pracę [165] napisaną wspólnie z Lechem Maligrandą. Przyjmując $v_p = v_\varphi$ oraz $V^p = V^\varphi$, gdzie $p \in (0,\infty)$, $\varphi(u) = u^p$, autorzy tejże pracy udowodnili submultiplikatywność funkcjonału v_p dla $p \in (0,1]$ (tj. $v_p(xy) \leqslant v_p(x)v_p(y)$) oraz nierówność

$$v_1(\psi(|x|)) \leqslant \psi(v_1(x)), \tag{+}$$

która zachodzi dla dowolnej wypukłej funkcji Orlicza ψ oraz dowolnej funkcji $x \in V^1$. Zauważyli oni ponadto, że V^ψ jest algebrą Banacha względem norm $\|\cdot\|_{L^\infty} + \|\cdot\|$ oraz $2\psi^{-1}(1)\|\cdot\|$ (norma $\|\cdot\|$ jest tu normą typu Luxemburga związaną z modularem v_ψ) i zwrócili uwagę na fakt wynikania z nierówności (+) dobrze znanej uogólnionej *nierówności Opiala*:

$$\int_a^b |x(t)|^p |x'(t)|\, dt \leqslant (b-a)^p (p+1)^{-1} \int_a^b |x'(t)|^{p+1}\, dt.$$

Dowody przedstawione w [165] oparte są na szeregu nierówności, które były później dokładniej analizowane i uogólniane przez J. Pečaricia i I. Gusicia ([C6]).

Profesora Orlicza zajmowały ponadto operatory kompozycji działające między przestrzeniami typu V^φ. Przykładowo, w pracy [162] istotnie rozszerzył następujący rezultat M. Josephy ([C3], patrz również [C1]): *jeśli φ, ψ są funkcjami Orlicza spełniającymi warunek Δ_2 dla małych u oraz $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją przyjmującą wartość zero w punkcie zero, to operator superpozycji $\mathbb{F}(x) = F(x(\cdot))$ odwzorowuje V^φ w V^ψ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $v > 0$ istnieje taka stała K_v, że dla $|t|, |s| \leqslant v$ mamy $\psi(|F(t) - F(s)|) \leqslant K_v\varphi(|t-s|)$.* Założenie warunku Δ_2 w powyższym twierdzeniu może być opuszczone – zauważono to w [C7].

[C1] J. Appell, P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge Tracts in Math. 95, Cambridge University Press, Cambridge 1990, viii + 311 str.

[C2] R. M. Dudley, R. Norvaisa, *Differentiability of Six Operators on Nonsmooth Functions and p-variation*, Lecture Notes in Math. 1703, Springer-Verlag, Berlin 1999, viii + 277 str.

[C3] M. Josephy, *Composing functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 354–356.
[C4] S. V. Kisliakov, *A remark on the space of functions of bounded p-variation*, Math. Nachr. 119 (1984), 137–140.
[C5] J. Marcinkiewicz, *On a class of functions and their Fourier series*, C. R. Soc. Sci. Varsovie 26 (1934), 71–77; przedruk w: J. Marcinkiewicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1964, 36–41.
[C6] J. Pečarić, I. Gusić, *On some inequalities of Maligranda and Orlicz*, Comment. Math. Prace Mat. 36 (1996), 169–178.
[C7] F. Prus-Wiśniowski, *On superposition of functions of bounded φ-variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 361–366.
[C8] B. V. Rjazanov, *Functions of class V_γ*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 23 (1968), No. 6, 36–39 (po rosyjsku).
[C9] A. C. M. van Rooij, W. H. Schikhof, *A Second Course on Real Functions*, Cambridge University Press, Cambridge – New York 1982, xiii + 200 str.
[C10] M. Schramm, *Functions of φ-bounded variation and Riemann–Stieltjes integration*, Trans. Amer. Math. Soc. 287 (1985), 49–63.
[C11] L. C. Young, *Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p-ième bornée au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), 470–472.
[C12] L. C. Young, *General inequalities of Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series*, Math. Ann. 115 (1938), 581–612.
[C13] L. C. Young, *A converse to some inequalities and approximations in the theory of Stieltjes and stochastic integrals, and for nth derivatives*, Studia Math. 55 (1976), 215–223.

W dorobku Władysława Orlicza znajduje się kilka książek. Dwie z nich to podręczniki szkolne. Fakt podjęcia odpowiedzialnego trudu przygotowania podręczników potwierdza przywiązywanie przez Profesora Orlicza dużej wagi do spraw dydaktycznych. O książce *Linear Functional Analysis* wspominaliśmy w części D. Przetłumaczenie niemieckiego rękopisu na chiński, a potem po niemal trzydziestu latach z chińskiego na angielski miało kilka motywów. Krótki pobyt Władysława Orlicza w Chinach okazał się ważny dla tamtejszego środowiska, spowodował bowiem zainteresowanie dużej grupy badaczy tematyką analizy funkcjonalnej. Wydanie w formie książkowej wykładów Profesora, poszerzonych o 75 zadań wybranych przez Aleksandra Pełczyńskiego, prowadzącego ćwiczenia do tych wykładów, jest formą hołdu matematyków azjatyckich złożonego dokonaniom Władysława Orlicza.

Profesor Orlicz napisał szereg artykułów omawiających osiągnięcia matematyki polskiej ([134], [145], [155]) oraz przedstawiających życie i działalność matematyków polskich: Stefana Banacha ([42]), Stefana Kaczmarza ([108], [165]), Antoniego Łomnickiego ([132]), Stanisława Mazura ([107]), Zbigniewa Polniakowskiego ([156]), Juliusza Pawła Schaudera ([139]). Drukiem ukazało się ponadto kilka okolicznościowych przemówień Władysława Orlicza ([111], [124], [144], [161]). Uważnie je czytając można znaleźć w nich poglądy Profesora na temat matematyki i jego ocenę polskiego wkładu w rozwój królowej nauk.

Mówiąc o dorobku Władysława Orlicza trzeba wspomnieć o jego *Dziełach Zebranych* wydanych przez Państwowe Wydawnictwo Naukowe w dwóch tomach w 1988 roku jako *Collected Papers* (patrz spis książek Władysława Orlicza pozycja [V]).

Władysław Orlicz przez wiele lat gromadził materiały zamierzając przygotować specjalną publikację o znanych i mniej znanych osobach związanych ze Szkołą Lwowską. Niestety, tego planu nie udało mu się zrealizować.

Spis książek Władysława Orlicza

[MR = Mathematical Reviews, Zbl = Zentralblatt für Mathematik, JFM = Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik]

[I] (wspólna z S. K u b r a c z k i e w i c z e m), *Rachunki do I klasy szkoły powszechnej*, Wydawnictwo Zakładu Narodowego im. Ossolińskich, Lwów 1937, 92 strony.

[II] (wspólna z A. F r e j l i c h e m), *Matematika dlya klyasi serednikh zagal'no-osvitnikh shkil*, Państwowe Wydawnictwo Książek Szkolnych we Lwowie 1938, 168 stron (po ukraińsku).

[III] *Liniowa Analiza Funkcjonalna*, Peking 1963, 138 stron (po chińsku).

[IV] *Linear Functional Analysis*, tłumaczenie z chińskiego książki [III] przez Lee Peng Yee. Dodatek przez Wu Congxin, Series in Real Analysis 4, World Scientific Publishing Co., Singapore 1992, xvi + 246 stron. MR 94c:46002 Zbl 799.46002

[V] *Władysław Orlicz*: *Collected Papers. I*, *II.* With contributions by Wanda Matuszewska and Lech Maligranda, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988, vi + x + 1688 stron. MR 89i:01141 Zbl 675.01024

[VI] Władysław Orlicz i Andrzej Alexiewicz dokonali rekonstrukcji książki S. Banacha *Wstęp do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej*, Monograf. Mat. 17, Warszawa–Wrocław 1951. MR 13,216a. Książka była przygotowywana do publikacji w drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego, ale w wyniku działań okupanta zniszczony został rękopis i część gotowego już składu. Orlicz i Alexiewicz uzupełnili brakujące fragmenty tekstu.

Spis prac Władysława Orlicza

1926

[1] *Zur allgemeinen Limitierungstheorie*, Tohôku Math. J. 26 (1926), 233–237. JFM 52.0216.02

1927

[2] *Zur Theorie der Orthogonalreihen*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Sér. A 1927, 81–115. JFM 53.0265.05

[3] *Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Funktionenreihen*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Sér. A 1927, 117–125. JFM 53.0243.04

1929

[4] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. 1 (1929), 1–39.

[5] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II*, Studia Math. 1 (1929), 241–255. JFM 55.0164.02

1930

[6] *Einige Bemerkungen über die Divergenzpunktmengen von Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. 2 (1930), 72–86. JFM 56.0944.01

[7] *Einige Bemerkungen über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. 2 (1930), 87–90. JFM 56.0944.02

[8] (wspólna z Z. W. Birnbaumem), *Über Approximation im Mittel*, Studia Math. 2 (1930), 197–206. JFM 56.0931.01

1931

[9] (wspólna z Z. W. Birnbaumem), *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Studia Math. 3 (1931), 1–67. Zbl 003.25202

[10] *Über konjugierte Exponentenfolgen*, Studia Math. 3 (1931), 200–211. Zbl 003.25203

1932

[11] *Quelques théorèmes sur les développements orthogonaux*, C. R. Acad. Sci. Paris 194 (1932), 157–158. Zbl 003.25201

[12] *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales*, C. R. Acad. Sci. Paris 194 (1932), 2118–2120. Zbl 004.34702

[13] *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, No. 8/9, 207–220 (1932). Zbl 006.31503

[14] *Zur Theorie der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, No. 8/9, 221–228 (1932). Zbl 006.30401

[15] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (III)*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, No. 8/9, 229–238. Zbl 006.39704

1933

[16] *Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen*, Studia Math. 4 (1933), 27–32. Zbl 008.30902

[17] *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I)*, Studia Math. 4 (1933), 33–37. Zbl 008.31501

[18] *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (II)*, Studia Math. 4 (1933), 41–47. Zbl 008.31501

[19] (wspólna z S. Mazurem), *Sur les méthodes linéaires de sommation*, C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1933), 32–34. Zbl 006.05202

[20] (wspólna z S. Mazurem), *Über Folgen linearer Operationen*, Studia Math. 4 (1933), 152–157. Zbl 008.25004

1934

[21] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (IV)*, Studia Math. 5 (1934), 1–14. Zbl 010.35002

[22] *Z badań nad układami ortogonalnemi*, Ossolineum, Lwów 1934, 1–15.

1935

[23] (wspólna z S. Mazurem), *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen I*, Studia Math. 5 (1935), 50–68. Zbl 013.21002

[24] *Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen*, Studia Math. 5 (1935), 127–140. Zbl 013.21101

[25] *Über Folgen linearer Operationen, die von einem Parameter abhaengen*, Studia Math. 5 (1935), 160–170. Zbl 013.21102

[26] (wspólna z S. Mazurem), *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen II*, Studia Math. 5 (1935), 179–189. Zbl 013.21002

1936

[27] *Über Räume* (L^M), Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1936, 93–107. Zbl 014.16302

[28] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (V)*, Studia Math. 6 (1936), 20–38. Zbl 015.29904

[29] (wspólna z S. Mazurem), *Polynomische Operationen in abstrakten Räumen*, C. R. Congrès Int. Math., Oslo 1936, 107–108.

[30] (wspólna z S. Mazurem), *Sur la divisibilité des polynômes abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), 621–623. Zbl 013.26803

[31] *Einige Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. 6 (1936), 98–103. Zbl 016.10801

[32] (wspólna z S. Mazurem), *Sur les fonctionnelles rationnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), 904–905. Zbl 013.30803

[33] *Über k-fach monotone Folgen*, Studia Math. 6 (1936), 149–159. Zbl 016.16003

1938

[34] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (VI)*, Stud. Math. 8 (1938), 141–147. Zbl 020.29804

1940

[35] (wspólna z S. Mazurem), *Sur quelques propriétés de fonctions périodiques et presque-périodiques*, Studia Math. 9 (1940), 1–16. MR 3,107a Zbl 061.16401

1945

[36] (wspólna z A. Alexiewiczem), *Remarques sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Fund. Math. 33 (1945), 314–315. MR 8,27d Zbl 061.26405

1947

[37] *Sur les fonctions continues non dérivables*, Fund. Math. 34 (1947), 45–60. MR 9,18a Zbl 037.17503

[38] *Une généralisation d'un théorème de MM. S. Banach et S. Mazur*, Ann. Soc. Polon. Math. 19 (1947), 62–65. MR 9,17h Zbl 032.15104

1948

[39] *Une généralisation d'un théorème de Cantor–Lebesgue*, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), 38–45. MR 10,113g Zbl 032.19902

[40] *Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée (I)*, Stud. Math. 10 (1948), 21–39. MR 9,504a Zbl 036.31701

[41] *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Math. 10 (1948), 60–89. MR 9,595d Zbl 037.07902

[42] *Sur l'oeuvre scientifique de Stefan Banach. I. Théorie des opérations et théorie des séries orthogonales*, Colloq. Math. 1 (1948), 81–92. MR 10,174p Zbl 037.29109

[43] (wspólna z A. Alexiewiczem), *Contribution à la théorie des fonctions abstraites*, Colloq. Math. 1 (1948), 179–180. Zbl 037.35603

[44] *Sur la convergence uniforme des développements orthogonaux de fonctions bornées*, Colloq. Math. 1 (1948), 218–224. MR 10,450c Zbl 038.04304

[45] *Sur quelques propriétés des fonctions de Baire périodiques*, Studia Math. 10 (1948), 148–158. MR 11,27h Zbl 038.03902

[46] (wspólna z A. Alexiewiczem), *Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites*, Fund. Math. 35 (1948), 105–126. MR 10,307e Zbl 031.21903

[47] (wspólna z S. Mazurem), *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, Stud. Math. 10 (1948), 184–208. MR 10,611a Zbl 036.07801

1950

[48] *Linear operations in Saks spaces. I*, Studia Math. 11 (1950), 237–272. MR 12,418b Zbl 041.43602

1951

[49] (wspólna z A. A l e x i e w i c z e m), *On analytic vector-valued functions of a real variable*, Studia Math. 12 (1951), 108–111. MR 13,250b Zbl 042.35201

[50] (wspólna z A. A l e x i e w i c z e m), *Remarks on Riemann-integration of vector-valued functions*, Studia Math. 12 (1951), 125–132. MR 13,250c Zbl 042.35202

[51] *On a class of asymptotically divergent sequences of functions*, Studia Math. 12 (1951), 286–307. MR 13,936d Zbl 044.05701

1952

[52] (wspólna z A. A l e x i e w i c z e m), *On the differentials in Banach spaces*, Ann. Soc. Polon. Math. 25 (1952), 95–99. MR 14,1093f Zbl 048.35204

1953

[53] *Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz géneralisée (II)*, Studia Math. 13 (1953), 69–82. MR 16,230b Zbl 050.06401

[54] (wspólna z S. M a z u r e m), *Sur les espaces métriques linéaires (II)*, Studia Math. 13 (1953), 137–179. MR 16,932e Zbl 052.11103

[55] *On the convergence of functionals representable as integrals over some classes of bounded functions*, Studia Math. 13 (1953), 208–217. MR 15,325c Zbl 053.08203

[56] *On functions of finite variation, depending on a parameter*, Studia Math. 13 (1953), 218–232. MR 15,534e Zbl 052.11301

[57] (wspólna z A. A l e x i e w i c z e m), *Analytic operations in real Banach spaces*, Studia Math. 14 (1953), 57–78. MR 16,47d Zbl 052.34601

1954

[58] *Der Einfluss moderner mathematischer Methoden auf die klassischen Theorien der Mathematik*, Die Hauptreferate des 8 Polnischen Mathematikerkongresses vom 6 bis 12 September 1953 in Warschau, §4, Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954, 61–66; po polsku: Prace Mat. 2 (1958), 19–24. MR 16,575a Zbl 057.09301

[59] (wspólna z S. M a z u r e m), *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1954), 129–160. MR 16,814a Zbl 064.05603

[60] *On a class of operations over the space of continuous vector valued functions*, Studia Math. 14 (1955), 285–297. MR 16,834b Zbl 068.09507

[61] *On a class of operations over the space of integrable functions*, Studia Math. 14 (1954), 302–309. MR 16,834c Zbl 064.10702

1955

[62] (wspólna z A. A l e x i e w i c z e m), *On a theorem of C. Carathéodory*, Ann. Polon. Math. 1 (1955), 414–417. MR 17,611a Zbl 064.36202

[63] (wspólna z A. A l e x i e w i c z e m), *On summability of double sequences (I)*, Ann. Polon. Math. 2 (1956), 170–181. MR 18,205h Zbl 070.06103

[64] *O szeregach doskonale zbieżnych w pewnych przestrzeniach funkcyjnych*, Prace Mat. 1 (1955), 393–414 (po polsku); angielskie tlumaczenie *On perfectly convergent series in certain functional spaces*, *Władysław Orlicz Collected Papers*, Warszawa 1988, 830–850. Zbl 066.35601

[65] *Linear operations in Saks spaces (II)*, Studia Math. 15 (1955), 1–25. MR 17,511d Zbl 067.08904

1956

[66] (wspólna z A. Alexiewiczem), *Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$*, Studia Math. 15 (1956), 201–215. MR 18,132e Zbl 070.09204

[67] (wspólna z J. Musielakiem), *Linear functionals over the space of functions continuous in an open interval*, Studia Math. 15 (1956), 216–224. MR 18,53d Zbl 070.33801

1957

[68] (wspólna z V. Ptakiem), *Some remarks on Saks spaces*, Studia Math. 16 (1957), 56–68. MR 20#1198 Zbl 078.28704

[69] *On the continuity of linear operations in Saks spaces with an application to the theory of summability*, Studia Math. 16 (1957), 69–73. MR 20#1135 Zbl 080.32603

[70] *Contribution to the theory of Saks spaces*, Fund. Math. 44 (1957), 270-294. MR 22#4938 Zbl 081.10604

[71] (wspólna z J. Musielakiem), *On spaces of functions of finite generalized variation*, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 5 (1957), 389–392. MR 19,638d Zbl 077.10301

[72] (wspólna z W. Matuszewską), *On a class of Saks spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 5 (1957), 611–614. MR 19,564d Zbl 085.09701

[73] *On perfect convergence in certain Banach spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 5 (1957), 779–782. MR 19,665a Zbl 079.32502

1958

[74] *On the summability of bounded sequences by continuous methods*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 6 (1958), 549–556. MR 21#1470 Zbl 083.04601

[75] (wspólna z Z. Ciesielskim), *Some remarks on the convergence of functionals on bases*, Studia Math. 16 (1958), 335–352. MR 20#222 Zbl 093.12103

[76] (wspólna z S. Mazurem), *On some classes of linear spaces*, Studia Math. 17 (1958), 97–119. MR 20#298 Zbl 085.32203

[77] *Funktionalanalysis und allgemeine Theorie der linearen Transformationen*, Colloque sur la Théorie des Suites, tenu à Bruxelles du 18 au 20 déc. 1957, Centre Belge Rech. Math. 1958, 121–147. MR 21#1469 Zbl 086.04901

1959

[78] (wspólna z J. Musielakiem), *On generalized variations (I)*, Studia Math. 18 (1959), 11–41. MR 21#3524 Zbl 088.26901

[79] (wspólna z J. Musielakiem), *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), 49–65. MR 21#298 Zbl 086.08901

[80] (wspólna z A. Alexiewiczem), *Consistency theorems for Banach space analogues of Toeplitzian methods of summability*, Studia Math. 18 (1959), 199–210. MR 21#7382 Zbl 096.03701

[81] (wspólna z A. Alexiewiczem), *On summability of double sequences (II)*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), 171–180. MR 21#6488 Zbl 88. 091.24401

[82] (wspólna z W. Matuszewską), *On the local tests for convergence of Fourier series*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959), 549–556. MR 22#2839 Zbl 093.26602

[83] (wspólna z J. Musielakiem), *Some remarks on modular spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959), 661–668. MR 22#2875 Zbl 099.09202

[84] *Saks-space and its applications in the theory of linear operators*, Acta Math. Sinica 9 (1959), 143–149 (po chińsku); angielskie tłumaczenie w Chinese Math. 9 (1967), 463–469 (1968). Zbl 144.37302; Zbl 164.15103

[85] *On the generation of l^α-space and L^α-space*, Acta Math. Sinica 9 (1959), 150–155 (po chińsku); angielskie tłumaczenie w Chinese Math. 9 (1967), 470–475 (1968) Zbl 144.16801; Zbl 182.16801

[86] *Ciągi operacji liniowych zależne od parametru*, Trzeci Wszechzwiązkowy Kongres Matematyków w Moskwie, 25 czerwca – 5 lipca 1956, Trudy Tret'ego Vsesoyuzn. Mat. Sjezda, Moskva 1959, 185–188 (po rosyjsku). Zbl 198.17001

1960

[87] *Über lokale Konvergenzkriterien der Fourierreihen*, Unione Matematica Italiana, Atti del VI Congresso, Napoli 1959, Ed. Cremonese, Roma 1960, 331.

[88] (wspólna z A. Alexiewiczem), *Inequalities for functionals in locally convex linear spaces*, Zeszyty Nauk. Uniw. im. A. Mickiewicza Mat. Fiz. Chem. 2 (1960), 9–13. MR 23#A2730 Zbl 095.08902

[89] (wspólna z W. Matuszewską), *On certain properties of φ-functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 439–443. MR 23#A3454 Zbl 101.09001

[90] (wspólna z J. Musielakiem), *A generalization of certain extension theorems*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 531–534. MR 24#A2225 Zbl 100.11102

[91] *Operations and linear functionals in spaces of φ-integrable functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 563–565. MR 23#A3455 Zbl 201.16402

[92] *On integral representability of linear functionals over the space of φ-integrable functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 567–569. MR 23#A3456 Zbl 201.16403

[93] *Some remarks on the absolute convergence of biorthogonal expansions in the space C*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Lorando Eötvös Sect. Math. 3-4 (1960/61), 217–222. MR 24#A2228 Zbl 103.28902

1961

[94] *On spaces of φ-integrable functions*, Proc. Int. Symp. on Linear Spaces, held at the Hebrew University of Jerusalem, July 5–12, 1960; Academic Press, Jerusalem 1961, 357–365. Zbl 114.31102

[95] *A note on modular spaces. I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 9 (1961), 157–162. MR 24#A1611 Zbl 109.33404

[96] (wspólna z W. Matuszewską), *A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions*, Studia Math. 21 (1961), 107–115. MR 26#6750 Zbl 202.39903

1962

[97] *Über gewisse Klassen von Modularräumen*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague 1961), Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague 1962, 295. MR 30#4149 Zbl 203.11702

[98] (wspólna z J. Albrychtem), *A note on modular spaces. II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1962), 99–106. MR 25#4350a Zbl 178.16101

[99] (wspólna z J. Albrychtem), *A note on modular spaces. III*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1962), 153–157. MR 25#4350b Zbl 178.16101

[100] *A note on modular spaces. IV*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1962), 479–484. MR 26#5396 Zbl 114.30706

[101] (wspólna z J. Musielakiem), *On modular spaces of strongly summable sequences*, Stud. Math. 22 (1962), 127–146. MR 26#1655 Zbl 111.30501

[102] Book review *G. Alexits*: *Convergence Problems of Orthogonal Series*, Acta Sci. Math. (Szeged) 23 (1962), 176–178.

1963

[103] *On some spaces of strongly summable sequences*, Studia Math. 22 (1963), 331–336. MR 31#5079 Zbl 123.30204

[104] (wspólna z W. Matuszewską), *A note on modular spaces. V*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 11 (1963), 51–54. MR 27#2843

[105] (wspólna z W. Matuszewską), *A note on modular spaces. VI*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 11 (1963), 449–454. MR 28#3316 Zbl 121.09202

1964

[106] *A note on modular spaces. VII*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1964), 305–309. MR 29#6287 Zbl 135.16202

1965

[107] *Stanisław Mazur*, Nauka Polska 13, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, 1965, 41–46.

[108] *Stefan Kaczmarz*, Polski Słownik Biograficzny PAN 11 (1964–1965), 387.

[109] (wspólna z W. Matuszewską), *On some classes of functions with regard to their orders of growth*, Studia Math. 26 (1965), 11–24. MR 32#7686 Zbl 134.31604

[110] *On the convergence of norms in spaces of φ-integrable functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 205–210. MR 31#5080 Zbl 131.11506

[111] *Referat o działalności naukowej prof. Hugo Steinhausa wygloszony przy nadaniu doktoratu honorowego przez Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu*, Wiadom. Mat. 8 (1965), 115–118.

1966

[112] *On some classes of modular spaces*, Studia Math. 26 (1966), 165–192. MR 32#8137 Zbl 156.36701

[113] *A note on modular spaces. VIII*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 14 (1966), 151–158. MR 34#6500

1967

[114] (wspólna z J. Musielakiem), *Notes on the theory of integral. I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 15 (1967), 329–337. MR 36#3945 Zbl 154.15504

[115] (wspólna z J. Musielakiem), *Notes on the theory of integral. II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 15 (1967), 723–730. MR 37#6426 Zbl 173.16304

1968

[116] (wspólna z J. Musielakiem), *Notes on the theory of integral. III*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 317–326. MR 38#287 Zbl 169.46802

[117] (wspólna z W. Matuszewską), *A note on modular spaces. IX*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 801–808. MR 39#3278 Zbl 164.43002

[118] (wspólna z L. Drewnowskim), *A note on modular spaces. X*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 809–814. MR 39#3279 Zbl 164.43003

[119] (wspólna z L. Drewnowskim), *A note on modular spaces. XI*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 877–882. MR 39#6068 Zbl 174.43905

[120] (wspólna z L. Drewnowskim), *On orthogonally additive functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 883–888. MR 39#6069 Zbl 172.42003

[121] *On some classes of finitely additive set functions*, Prace Mat. 11 (1968), 317–327. MR 37#2928

[122] *On spaces $L^{*\varphi}$ based on the notion of a finitely additive integral*, Prace Mat. 12 (1968), 99–113. MR 40#4750 Zbl 243.28008

[123] *Absolute continuity of vector-valued finitely additive set functions. I*, Studia Math. 30 (1968), 121–133. MR 37#2929 Zbl 169.46703

1969

[124] *O pracach teoretycznych H. Steinhausa z zakresu matematyki*, Wiadom. Mat. 11 (1969), 77–80. Zbl 299.01021

[125] (wspólna z L. Drewnowskim), *On representation of orthogonally additive functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 17 (1969), 167–173. MR 40#3296 Zbl 174.46201

[126] (wspólna z L. Drewnowskim), *Continuity and representation of orthogonally additive functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 17 (1969), 647–653. MR 41#806 Zbl 198.19302

1970

[127] *Absolute continuity of set functions with respect to a finitely subadditive measure*, Comment. Math. Prace Mat. 14 (1970), 101–118. MR 42#6174 Zbl 243.28006

[128] *Notes on the theory of integral. IV*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 589–596. MR#2181 Zbl 202.41203

1971

[129] (wspólna z B. Kotkowskim), *A note on modular spaces. XII*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), 817–822. MR 46#5987 Zbl 232.46014

[130] (wspólna z B. Kotkowskim), *A note on modular spaces. XIII*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), 823–829. MR 46#5987 Zbl 232.46015

1972

[131] (wspólna z W. Matuszewską), *On the Riesz–Fischer theorem for vector-valued functions*, Studia Math. 44 (1972), 149–164. MR 53#6312 Zbl 241.46037

1973

[132] *Antoni Łomnicki*, Polski Słownik Biograficzny PAN 18 (1973), 388–389.

[133] (wspólna z R. Leśniewiczem), *On generalized variations. II*, Studia Math. 45 (1973), 71–109. MR 49#11234 Zbl 247.26006

[134] *Matematyka w ośrodku poznańskim (1919–1969)*, Nauka w Wielkopolsce, Wydawnictwo Poznańskie, 1973, 199–230.

1974

[135] (wspólna z I. Labudą), *Some remarks on Saks spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), 909–914. MR 53#3633 Zbl 297.46018

[136] (wspólna z R. Leśniewiczem), *A note on modular spaces. XIV*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), 915–923. MR 50#14161 Zbl 297.46026

1975

[137] (wspólna z W. Matuszewską), *Modulus of continuity of a set function and some of its applications*, Ann. Polon. Math. 29 (1975), 411–419. MR 51#13173 Zbl 312.28002

1978

[138] (wspólna z C. Bylką), *On some generalizations of the Young inequality*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), 115–123. MR 58#7055 Zbl 389.46020

[139] *Juliusz Paweł Schauder*, *1899–1943*, *J. P. Schauder*, *Oeuvres*, PWN, Warszawa 1978, 9–10. MR 58#10260 Zbl 455.01012

1979

[140] (wspólna z S. Szuflą), *On the convergence of successive approximations for nonlinear equations in function spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), 153–156. MR 80h:47066 Zbl 435.47062

1980

[141] (wspólna z H. Hudzikiem i R. Urbańskim), *Interpolation of sublinear, bounded operators in sequence spaces $h_M(X)$ of nonsymmetric type*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 28 (1980), 45–54. MR 83j:46043 Zbl 466.46038

[142] (wspólna z R. Urbańskim), *A generalization of the Brooks–Jewett theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 28 (1980), 55–59. MR 82i:28013 Zbl 497.28004

[143] (wspólna z R. Urbańskim), *On σ-additivity of set functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 28 (1980), 447–452. MR 83b:28017 Zbl 482.28013

[144] *Przemówienie wygłoszone przy nadaniu doktoratu honorowego Politechniki Poznanskiej*, Wiadom. Mat. 22 (1980), 279–284.

1981

[145] *Lwowska Szkoła Matematyczna w okresie międzywojennym*, Wiadom. Mat. 23 (1981), 222–231. MR 84f:01038

[146] (wspólna z S. Szuflą), *Generic properties of infinite system of integral equations in Banach spaces*, Ann. Polon. Math. 40 (1981), 67–79. MR 83h:45016 Zbl 501.45012

1982

[147] *Metoda kategorii Baire'a w zastosowaniu do pewnych zagadnień analizy*, Wiadom. Mat. 24 (1982), 1–15. MR 85e:26005 Zbl 529.54028

[148] (wspólna z S. Szuflą), *On some classes of nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), 239–250. MR 84b:45021 Zbl 501.45013

1983

[149] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *On some classes of vector valued functions of bounded weak variation*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 31 (1983), 335–344. MR 85k:46040 Zbl 549.46017

[150] (wspólna z D. Jach), *Some classes on Saks spaces*, Comment. Math. Prace Mat. 23 (1983), 41–48. MR 84h:46038 Zbl 598.46019

[151] (wspólna z W. Matuszewską), *On a class of linear functionals which are modular continuous*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 31 (1983), 345–352. MR 85k:46027 Zbl 548.46023

[152] (wspólna z R. Urbańskim), *Total variation of a set-valued measure*, Comment. Math. Prace Mat. 23 (1983), 85–89. MR 84m:28020 Zbl 593.28008

1984

[153] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Inclusion theorems for classes of functions of generalized bounded variations*, Comment. Math. Prace Mat. 24 (1984), 181–194. MR 86g:26009 Zbl 579.46024

[154] (wspólna z S. Szuflą), *On the structure of L_φ-solution sets of integral equations in Banach spaces*, Studia Math. 77 (1984), 465–477. MR 85h:45028 Zbl 553.45005

[155] *Achievements of Polish mathematicians in the domain of functional analysis in the years 1919–1951*, *Władysław Orlicz*, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 1616–1641.

[156] *Zbigniew Polniakowski (1925–1977)*, Wiadom. Mat. 25 (1984), 247–253. MR 86i:01053 Zbl 559.01019

1985

[157] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Variation and compactness*, Comment. Math. Prace Mat. 25 (1985), 201–214. MR 87h:46037 Zbl 606.46004

[158] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Functions of bounded φ-variation and some related operators*, Demonstratio Math. 18 (1985), 231–251 (1985). MR 87g:26016 Zbl 603.26005

[159] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Subseries convergence in the space of functions of bounded φ-variation*, Resultate Math. 8 (1985), 1–8. MR 88a:46027 Zbl 611.46015

[160] *Stefan Kaczmarz (1895–1939)*, Wiadom. Mat. 26 (1985), 155–164. MR 87f:01053 Zbl 605.01014

[161] *Fragmenty przemówienia wygłoszonego podczas uroczystości doktoratu h.c. w Poznaniu*, Wiadom. Mat. 26 (1985), 165–169. Zbl 609.01045

1986

[162] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Composing functions of bounded φ-variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 431–436. MR 87k:26012 Zbl 603.26004

[163] (wspólna z R. Grząślewiczem i H. Hudzikiem), *Uniform non-$\ell_n^{(1)}$ property in some normed spaces*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 34 (1986), 161–171. MR 88b:46031 Zbl 603.46023

[164] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *A Lindenstrauss–Stegall theorem for φ-variation*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 34 (1986), 173–180. MR 88a:26018 Zbl 606.46018

1987

[165] (wspólna z L. Maligrandą), *On some properties of functions of generalized variation*, Monatsh. Math. 104 (1987), 53–65. MR 88i:46072 Zbl 623.26009

[166] (wspólna z W. Matuszewską), *On property B_1 for functions of bounded φ-variation*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 35 (1987), 57–69. MR 88i:26023 Zbl 625.46033

[167] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim i W. Matuszewską), *Some properties of functions of bounded φ-variation and of bounded φ-variation in the sense of Wiener*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 35 (1987), 185–194. MR 88i:26020 Zbl 634.26007

1990

[168] (wspólna z J. Ciemnoczołowskim i W. Matuszewską), *On some properties of linear operators on $L^{*\varphi}$ which are continuous with respect to a modular*, Comment. Math. Prace Mat. 30 (1990), 27–39. MR 92i:47033 Zbl 753.47009

[169] *On decomposability of elements into positive elements in normed spaces of continuous functions*, Math. Japon. 35 (1990), 1019–1029. MR 92d:46061 Zbl 790.46019

1991

[170] (wspólna z W. Wnukiem), *Absolutely continuous and modularly continuous operators defined on spaces of measurable functions*, Ricerche Mat. 40 (1991), 243–258. MR 94c:47049 Zbl 782.47024

1992

[171] (wspólna z W. Matuszewską), *On some properties of functions of bounded φ-variation in the sense of Riesz*, Comment. Math. Prace Mat. 32 (1992), 91–102. MR 93m:46030 Zbl 770.26006

Doktoraty wykonane pod kierunkiem profesora Władysława Orlicza
(daty dotyczą dnia obrony rozprawy)

1. Andrzej **Alexiewicz**, *O ciągach operacji*, 1 maja 1944
2. Eustachy **Tarnawski**, *Funkcje ciągle z punktu widzenia warunków Höldera i Diniego*, 16 grudnia 1951
3. Stanisław **Knapowski**, *Zastosowanie metod Turaná w analitycznej teorii liczb*, 30 września 1957
4. Julian **Musielak**, *O bezwzględnej zbieżności szeregów Fouriera funkcji prawie okresowych wielu zmiennych*, 2 kwietnia 1958
5. Jozef **Meder**, *Sumowalność i zbieżność szeregów ortogonalnych*, 2 kwietnia 1958
6. Feliks **Barański**, *O pewnych zagadnieniach jakościowych typu Sturma dla rozwiązań równań liniowych typu eliptycznego rzędu drugiego*, 27 listopada 1958
7. Jerzy **Albrycht**, *Teoria przestrzeni Marcinkiewicza–Orlicza i pewne jej zastosowanie*, 17 stycznia 1959
8. Roman **Taberski**, *Aproksymacje całkami osobliwymi funkcji lipschitzowskich i zagadnienia pokrewne*, 13 czerwca 1959
9. Zbigniew **Ciesielski**, *O rozwinięciach ortogonalnych prawie wszystkich funkcji w przestrzeni Wienera*, 7 kwietnia 1960
10. Wanda **Matuszewska**, *Przestrzenie funkcji φ-całkowalnych*, 14 czerwca 1960
11. Quan-Fu **Ci**, *Wybrane zagadnienia z teorii funkcji wektorowych*, 30 listopada 1960
12. Dobieslaw **Bobrowski**, *O całkach oscylacyjnych i nieoscylacyjnych pewnych równań różniczkowych*, 8 czerwca 1962
13. Zbigniew **Polniakowski**, *Wielomianowe transformacje Hausdorffa*, 6 października 1962
14. Jerzy **Radecki**, *O zmodyfikowanych wielomianach Landau'a i Bernsteina*, 20 grudnia 1962
15. Henryk **Ratajski**, *Kryteria zbieżności szeregów ortogonalnych o jądrze typu wielomianowego*, 20 grudnia 1962
16. Marian **Jarosz**, *O zagadnieniach jakościowych dla pewnej klasy równań różniczkowych eliptycznych i hiperbolicznych rzędu drugiego*, 8 maja 1963
17. Jadwiga **Pawłowska**, *O liniach węzłów rozwiązań pewnych równań eliptycznych rzędu $2p$*, 29 lutego 1964
18. Henryk **Wiśniewski**, *Oszacowanie całek pewnych układów równań różniczkowych liniowych zwyczjnych*, 29 lutego 1964

19. Zbigniew **Ratajczak**, *Metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych w zastosowaniu do pewnych zagadnień teorii sprężystości*, 27 maja 1964
20. Adam **Wachułka**, *O pewnych własnościach funkcji poliharmonicznych. Twierdzenie o wartości średniej dla rozwiązań równania różniczkowego cząstkowego quasi p-harmonicznego*, 26 października 1965
21. Maria **Filar**, *O rozwiązaniu podstawowym dla pewnej klasy równań cząstkowych typu eliptycznego rzędu czwartego i rzędów wyższych*, 16 października 1966
22. Jurand **Ryterski**, *O pewnych zagadnieniach brzegowych związanych z drganiami łopatek turbin*, 8 grudnia 1966
23. Aleksander **Waszak**, *Zagadnienia mocnej sumowalności z punktu widzenia metryk Orlicza*, 1 czerwca 1967
24. Ryszard **Leśniewicz**, *Przestrzenie Hardy'ego–Orlicza*, 4 grudnia 1967
25. Bogdan **Kotkowski**, *Przestrzenie o normie symetrycznej*, 26 lutego 1969
26. Henryk **Sampławski**, *Zagadnienia multiplikatorów w przestrzeniach Banacha*, 21 kwietnia 1969
27. Franciszek **Klorek**, *Funkcje o uogólnionej wariacji*, 17 lutego 1970
28. Lech **Drewnowski**, *O pewnych zagadnieniach z teorii przestrzeni funkcji całkowalnych*, 19 kwietnia 1971
29. Barbara **Firlej**, *Zagadnienia aproksymacji funkcji w przestrzeniach modularnych*, 14 czerwca 1972
30. Stanisław **Szufla**, *Równania różniczkowe w przestrzeniach liniowych topologicznych*, 28 grudnia 1972
31. Marek **Karpiński**, *Wolnostrukturowe automaty dendrytowe*, 15 maja 1973
32. Iwo **Labuda**, *O pewnych zagadnieniach związanych z twierdzeniami typu Orlicza–Pettisa*, 18 grudnia 1973
33. Przemysław **Kranz**, *Miary na siatkach*, 12 czerwca 1975
34. Czesław **Bylka**, *O pewnych klasach φ-funkcji, przestrzeniach Orlicza i ich zastosowaniach*, 30 września 1976
35. Ryszrd **Serafin**, *O pewnej klasie przestrzeni lokalnie wypukłych związanej z przestrzeniami Saksa i przestrzeniami dwunormowymi*, 19 kwietnia 1978
36. Wojciech **Friedrich**, *Wybrane zagadnienia z teorii przestrzeni modularnych*, 12 czerwca 1979
37. Lech **Maligranda**, *Interpolacja pewnych operatorów nieliniowych w przestrzeniach Banacha*, 17 grudnia 1979
38. Danuta **Jach**, *Wybrane zagadnienia z przestrzeni Saksa*, 6 listopada 1980
39. Jarosław **Ciemnoczołowski**, *Wybrane zagadnienia z teorii przestrzeni funkcji o skończonych wariacjach przy różnych definicjach wariacji*, 9 listopada 1984

3. Źródła. Uczniowie, współpracownicy, historycy nauki i zawodowi dziennikarze są autorami licznych artykułów oraz wywiadów prasowych prezentujących życie i działalność naukową Władysława Orlicza. Powstawały one m.in. z okazji różnych rocznic i uroczystości poświęconych Profesorowi. Także w publikacjach Władysława Orlicza o historii i dokonaniach matematyki polskiej znajdują się informacje o nim samym. W latach 80-tych został zrealizowany film dokumentalny o Profesorze. Poniżej podaje się materiały źródłowe, na które natrafili autorzy przygotowując niniejszą publikację.

[Z1] J. Albrycht, *Przemówienie wygłoszone z okazji nadania członkostwa honorowego W. Orliczowi*, Wiadom. Mat. 18(1974), 200–204.

[Z2] G. Banaszkiewicz, *Ostatni*, Wprost nr 45/49, 6 listopada 1983, 3–5.

[Z3] G. Banaszkiewicz, *Władysław Orlicz: przestrzenie*, Życie Literackie 7 (1769), 1986, str. 7.

[Z4] G. Banaszkiewicz, *Przestrzenie*, Intrepress-Film, Telewizja Poznań 1988, 20 min.

[Z5] *Dzieje Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza 1919–1969*, red. Z. Grot, Poznań 1972, str. 211.

[Z6] W. Jankowski, *O działalności naukowej Profesora W. Orlicza*, Wiadom. Mat. 22 (1980), 275–279.

[Z7] *Kto jest kim w Polsce 1984*, Edycja 1, Interpress, Warszawa 1984, str. 697.

[Z8] T. Lubart, *Wszystko dla matematyki*, Gazeta Zachodnia nr 218, 26 września 1977, str. 3.

[Z9] L. Maligranda, *Władysław Orlicz: 24 May 1903 – 9 August 1990*, w: On Orlicz results in interpolation theory, Research Reports, Department of Mathematics, Luleå University of Technology 7 (1992), 13–15.

[Z10] L. Maligranda, W. Matuszewska, *A survey of Władysław Orlicz's scientific work*, w: *Władyslaw Orlicz*, *Collected Papers*, PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988, xv–Liv.

[Z11] L. Maligranda, L. E. Persson, *Władysław Orlicz (1903–1990)*, Notices Amer. Math. Soc. 38 (1991), 21.

[Z12] L. Maligranda, W. Wnuk, *Władysław Orlicz (1903-1990)*, Nauka Polska 3 (1992), 187–193.

[Z13] L. Maligranda, W. Wnuk, *Władysław Orlicz — his life and contributions to mathematics*, w: Function Spaces (Proc. Conf. on Function Spaces held in Poznań in 1998), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. No. 213, Marcel Dekker, New York 2000, 23–29.

[Z14] A. Marciniak, *Władysław Orlicz (1903–1990)*, w: Członkowie PAN w Wielkopolsce, Wydawnictwo Oddziału PAN w Poznaniu, Poznań 2000, 6 stron.

[Z15] *Materiały Władysława Orlicza w Archiwum PAN Oddział w Poznaniu*, sygn. P. III-91.

[Z16] W. Matuszewska, *Władysław Orlicz*, Nauka Polska 5 (1968), 94–97.

[Z17] W. Matuszewska, *Wybitny matematyk Prof. Dr Władysław Orlicz*, Kronika Miasta Poznania, Vol. 43, 1975, 112–118.

[Z18] W. Matuszewska, *Władysław Orlicz — A review of his scientific work*, Comment. Math. Tomus Specialis in Honorem Ladislai Orlicz, Vol. I, 1978, 1–17.

[Z19] W. Matuszewska, *Władysław Orlicz*, w: *Władysław Orlicz*, *Collected Papers*, PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988, xi–xiv.

[Z20] B. Miśkiewicz, *Uniwersytet im. Adama Mickiewicza 1919–1989*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1989, str. 119, 120, 200, 305.

[Z21] J. Musielak, *Z Żałobnej Karty, Prof. dr hab. Władysław Orlicz (1903–1990)*, Informator UAM, Poznań, 30 września 1990, 1–3.

[Z22] *Nauka Polska i jej Osiągnięcia*, red. J. Szyłłejko, Warszawa 1975, 37–40.

[Z23] M. Nowak, *Człowiek, którego imię nosi przestrzeń (85-lecie profesora Władysława Orlicza)*, Gazeta Poznańska nr 121, 25 maja 1988, str. 1 i 2.

[Z24] W. Orlicz, *Matematyka w Ośrodku Poznańskim (1919–1969)*, w: Nauka w Wielkopolsce. Przyszłość i Teraźniejszość, red. G. Labuda, Wydawnictwo Poznańskie, Poznań 1973, 199–230.

[Z25] W. Orlicz, *Idee przewodnie nauki – wypowiedź*, Nurt 1973 nr 11, 7–8.

[Z26] W. Orlicz, *Przemówienie wygłoszone przy nadaniu doktoratu honorowego Politechniki Poznańskiej*, Wiadom. Mat. 22 (1980), 279–284.

[Z27] W. O r l i c z, *Lwowska Szkoła Matematyczna w okresie międzywojennym*, Wiadom. Mat. 23 (1981), 222–231.

[Z28] W. O r l i c z, *Fragmenty przemówienia wygłoszonego podczas uroczystości doktoratu h.c. w Poznaniu*, Wiadom. Mat. 26 (1985), 165–169.

[Z29] *Orlicz Władysław Roman*, Biogramy Uczonych Polskich, Suplement (opr. A. Śródka), Polska Akademia Nauk, Ośrodek Informacji Naukowej, Warszawa 1993, 131–133.

[Z30] *Profesor Władysław Orlicz*, Nurt 1973 nr 6, str. 14.

[Z31] Z. S e m a d e n i, *O pracach W. Orlicza z analizy funkcjonalnej*, Wiadom. Mat. 18 (1974), 191–199.

[Z32] A. Ś r ó d k a, *Uczeni Polscy XIX–XX Stulecia*, Tom III: M–P, Warszawa 1998, 310–313.

[Z33] *Władysław Orlicz*: *24 May 1903 – 9 August 1990*, Studia Math. 97 (1990), No. 2, ii–iv.

[Z34] *Zarys Dziejów Nauk Przyrodniczych w Polsce*, Warszawa 1983, str. 204, 211.