ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXV (1999)

Andrzej Daszkiewicz (Toruń)

Richard E. Borcherds

Richard E. Borcherds urodził się 29 listopada 1959 r. w Kapsztadzie w Republice Południowej Afryki. Studiował w Cambridge, tam również pod kierunkiem Johna H. Conwaya uzyskał doktorat. Po studiach pracował na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley i na Uniwersytecie w Cambridge, skąd powrócił do Berkeley. W roku 1992 otrzymał nagrodę Europejskiego Towarzystwa Matematycznego, a w roku 1998 przyznano mu medal Fieldsa.

Najważniejszym jak dotąd wynikiem Richarda Borcherdsa było udowodnienie hipotezy Conwaya i Nortona dotyczącej kręgu zagadnień znanego pod nazwą *Monstrous Moonshine*, leżącego na pograniczu teorii grup skończonych i teorii form modularnych ([4]). Ponieważ nie jest możliwe docenienie wkładu Borcherdsa w tę tematykę bez choćby pobieżnego omówienia jej historii i ponieważ rzecz dotyczy jednego z najbardziej nieoczekiwanych odkryć współczesnej matematyki, łączącego klasyczną teorię funkcji modularnych i automorficznych, teorię grup, teorię algebr Kaca–Moody'ego oraz kwantową teorię pola, dlatego rozpoczniemy ten artykuł od omówienia odkryć poprzedników Borcherdsa.

Jednym z najważniejszych problemów teorii grup jest problem klasyfikacji skończonych grup prostych, a więc grup nie posiadających właściwych dzielników normalnych. Większość tych grup występuje w nieskończonych seriach (są to grupy cykliczne, których rząd jest liczbą pierwszą, grupy alternujące oraz serie tzw. grup skończonych typu Liego, tj. odpowiedników prostych grup Liego zdefiniowanych nad ciałami skończonymi), ale istnieją też grupy proste nie dające się umieścić w żadnej nieskończonej serii, nazywane grupami sporadycznymi. Na początku lat siedemdziesiątych Bernd Fischer i Robert Griess niezależnie przewidzieli istnienie sporadycznej grupy prostej $\mathbb{M}$ rzędu

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71.$$

Grupa ta została nazwana Monstrum (ang. *Monster*) i zgodnie z zaanonsowaną na początku lat osiemdziesiątych klasyfikacją skończonych grup prostych miała być największą grupą sporadyczną (do dzisiaj znanych jest

26 grup sporadycznych, zgodnie z twierdzeniem o klasyfikacji mają to być wszystkie takie grupy, nie wszyscy są jednak przekonani, że dowód twierdzenia o klasyfikacji jest już kompletny – większa jego część została opublikowana w kilkudziesięciu pracach różnych autorów, a spore fragmenty ciągle czekają na publikację).

Wkrótce po zaanonsowaniu przypuszczenia Fischera i Griessa Jacques Tits wygłosił w Ann Arbor wykład poświęcony grupie Monstrum. Na wykładzie był obecny Andrew Ogg, który natychmiast rozpoznał w zbiorze liczb pierwszych dzielących rząd grupy Monstrum zbiór liczb pierwszych, na który natrafił jakiś czas przedtem w swoich badaniach dotyczących funkcji modularnych ([23]).

Teoria funkcji modularnych zajmuje się badaniem funkcji meromorficznych na górnej półpłaszczyźnie $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$, które zachowują się w dobry sposób przy działaniu podgrup grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ macierzy rzeczywistych 2×2 o wyznaczniku 1. Grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ działa na H poprzez

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Funkcję meromorficzną $f : H \to \mathbb{C}$ nazywamy funkcją modularną wagi k, jeśli

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \cdot F(\tau), \quad \text{dla} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Niech N będzie liczbą naturalną większą od 1. Przez $\Gamma_0(N)$ będziemy oznaczać podgrupę grupy $SL_2(\mathbb{Z})$ złożoną z macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, w których $c \equiv 0 \pmod N$. Przez $\Gamma_0^+(N)$ będziemy oznaczać podgrupę w $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ generowaną przez grupę $\Gamma_0(N)$ i przez macierz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & N \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Grupa $\Gamma_0^+(N)$ działa na H w taki sam sposób jak to zdefiniowano powyżej. Twierdzenie udowodnione przez Ogga mówi, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to powierzchnia Riemanna $H/\Gamma_0^+(p)$ ma genus zero wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}$, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy p dzieli rząd grupy Monstrum. Ogg zaoferował butelkę whisky jako nagrodę za wyjaśnienie tej zbieżności.

Nieco później, w połowie lat siedemdziesiątych, matematyk kanadyjski John McKay zauważył kolejny, jeszcze bardziej zadziwiający fakt. W tym czasie, choć nie podano jeszcze dowodu istnienia Monstrum, to znano już tablice charakterów hipotetycznej grupy, w szczególności znano wymiary jej reprezentacji nieprzywiedlnych. Najmniejszą nietrywialną reprezentacją miała być reprezentacja wymiaru 196 883, a kolejna miała mieć wymiar 21 296 876. Ta pierwsza liczba wzbudziła zainteresowanie McKaya.

Najprostszą formą modularną wagi zero (a więc funkcją meromorficzną na H niezmienniczą przy działaniu grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) jest funkcja $j(\tau)$, którą można zdefiniować następująco: najpierw definiujemy funkcję

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n>0} (1-q^n)^{24}, \qquad \text{gdzie } q = e^{2\pi i \tau},$$

następnie funkcję

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n, \qquad \text{gdzie } \sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3,$$

i wreszcie funkcję

$$j(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)}.$$

Funkcja $j(\tau)$ jest najprostszą funkcją modularną wagi zero, gdyż każda inna taka funkcja jest funkcją wymierną od $j(\tau)$. Innymi słowy, funkcja j generuje ciało funkcji meromorficznych na powierzchni Riemanna $H/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (taka funkcja na powierzchni Riemanna genusu zero jest też znana pod nazwą *Hauptmodul* tej powierzchni).

Funkcję $j(\tau)$ można rozwinąć w szereg

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196\,884q + 21\,493\,760q^2 + \ldots = \sum_{n \geqslant -1} c(n) q^n + 744,$$

($c(-1) = 1$, $c(0) = 0$, $c(1) = 196\,884, \ldots$; współczynniki $c(n)$ będą w dalszym ciągu odgrywały ważną rolę). Obserwacja McKaya była bardzo prosta: $196\,884 = 196\,883 + 1$, a więc współczynnik przy q jest równy wymiarowi minimalnej nietrywialnej reprezentacji grupy Monstrum, powiększonemu o jeden. Wkrótce potem McKay i John Thompson zauważyli, że $21\,493\,760 = 21\,296\,876 + 196\,883 + 1$, a więc, że kolejny współczynnik w rozwinięciu funkcji j jest sumą wymiarów reprezentacji nieprzywiedlnych grupy $\mathbb{M}$. Naturalnym krokiem było wyrażenie przez McKaya i Thompsona przypuszczenia, że powinna istnieć *naturalna* reprezentacja z gradacją $V = \bigoplus_{n \geqslant -1} V_n$ grupy $\mathbb{M}$, o własności $\dim V_n = c(n)$ („naturalna", a więc w jakiś „naturalny" sposób powiązana z funkcjami modularnymi; zauważmy, że istnieje oczywista reprezentacja „nienaturalna" o żądanej własności – wystarczy jako V_n wziąć reprezentację trywialną odpowiedniego wymiaru). W tym czasie John H. Conway nazwał przypuszczenie McKaya i Thompsona *Monstrous Moonshine*, co należałoby przetłumaczyć jako *Monstrualne Majaczenie*!

Ponieważ wymiar reprezentacji jest równy wartości charakteru tej reprezentacji w jedynce, więc naturalna jest sugestia McKaya i Thompsona, żeby dla dowolnego elementu $g \in \mathbb{M}$ (wystarczy wziąć po jednym elemencie z każdej klasy sprzężoności) zdefiniować szereg

$$T_g(\tau) = \sum \mathrm{Tr}(g|_{V_n}) q^n$$

i poszukać związku tych szeregów (nazywanych szeregami McKaya–Thompsona) z funkcjami modularnymi. W roku 1979 John H. Conway i Simon Norton wyliczyli kilka pierwszych wyrazów każdego z szeregów McKaya–Thompsona (nie wiedzieli jeszcze, jak wygląda cała reprezentacja V, ale mogli przypuszczać, że dla $n = -1, 0, 1, 2$ reprezentacja V_n rozkłada się na reprezentacje nieprzywiedlne, zgodnie z obserwacjami McKaya i Thompsona) i zauważyli, że otrzymane wyrażenia są identyczne z początkowymi wyrazami rozwinięć w szereg funkcji *Hauptmodul* (a więc generatorów ciał funkcji meromorficznych) powierzchni Riemanna genusu zero, postaci H/G dla pewnych podgrup $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Obserwacja Conwaya i Nortona wzmocniła hipotezę McKaya i Thompsona, a nazwa *Monstrous Moonshine* została powszechnie przyjęta jako nazwa hipotezy we wzmocnionej wersji Conwaya i Nortona.

W roku 1981 Griess ([19]) udowodnił istnienie grupy Monstrum, konstruując ją jako grupę automorfizmów pewnej skonstruowanej przez siebie „ad hoc” przemiennej (ale nie łącznej) algebry wymiaru 196 883. Wkrótce potem Atkin, Fong i Smith udowodnili hipotezę McKaya i Thompsona, dowodząc, że istnieje odpowiednia reprezentacja Monstrum. Nie podali jednak ani jawnej konstrukcji tej reprezentacji, ani też żadnego wyjaśnienia, które tłumaczyłoby co kryje się za *Monstrous Moonshine.*

W tym czasie Victor Kac, David Kazhdan, James Lepowsky i Robert Wilson pokazali jak konstruować tzw. reprezentacje bazowe afinicznych algebr Liego przy pomocy pewnych operatorów różniczkowych nieskończonej liczby zmiennych ([21]). Howard Garland zauważył, że operatory te to nic innego, jak *operatory wierzchołkowe* (ang. *vertex operators*), od kilku lat używane przez fizyków zajmujących się kwantową teorią pola, a ściślej teorią strun. Wkrótce potem McKay zauważył związek funkcji $j(\tau)^{1/3}$ z reprezentacjami wyjątkowej algebry Liego E_8. Wyniki te zainspirowały kilku matematyków do pracy nad poszukiwaniem związków pomiędzy *Monstrous Moonshine* i algebrami Liego. W połowie lat osiemdziesiątych Igor Frenkel, James Lepowsky i Arne Meurman ([17]), stosując operatory wierzchołkowe, znaleźli jawną konstrukcję reprezentacji $V = \sum V_n$ grupy $\mathbb{M}$ spełniającej warunek $\dim V_n = c(n)$, nie byli jednak w stanie wyliczyć żadnych szeregów McKaya–Thompsona dla tej reprezentacji, ani pokazać, że charakter skonstruowanej przez nich reprezentacji jest równy charakterowi, którego istnienie udowodnili wcześniej Atkin, Fong i Smith.

Od tego momentu decydującą rolę w badaniach *Monstrous Moonshine* zaczął odgrywać Borcherds. Jego pierwszym ważnym krokiem było wprowadzenie pojęcia algebry wierzchołkowej (ang. *vertex algebra*) ([1]), które porządkuje teorię operatorów wierzchołkowych. Istnieje kilka równoważnych definicji tego pojęcia, tutaj podamy chyba najbardziej elementarną. *Algebrą wierzchołkową* nad ciałem liczb rzeczywistych nazywamy przestrzeń wektorową V nad $\mathbb{R}$ wyposażoną w przeliczalną rodzinę dwuliniowych odwzorowań

$V \times V \to V$, oznaczanych $(u, v) \mapsto u_n v$, $n \in \mathbb{Z}$ (lub równoważnie, w przeliczalną liczbę odwzorowań liniowych $V \ni u \mapsto u_n \in \mathrm{Hom}(V, V)$, $n \in \mathbb{Z}$), spełniających następujące warunki:

1. dla wszystkich $u, v \in V$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$ (zależne na ogół od u i v), że $u_n v = 0$ dla $n \geqslant N$,

2. dla wszystkich $u, v, w \in V$ i dla wszystkich $m, n, p \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{m}{i} (u_{p+i} v)_{m+n-i} w =$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{p}{i} [u_{m+p-i}(v_{n+i} w) - (-1)^p v_{n+p-i}(u_{m+i} v)].$$

3. istnieje wektor $1 \in V$ (nazywany wektorem próżni) spełniający warunki $v_n 1 = 0$ dla $n \geqslant 0$, $v_{-1} 1 = v$.

Operatorem wierzchołkowym stowarzyszonym z wektorem $u \in V$ jest wówczas szereg formalny $V(u, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \cdot z^{-n-1}$ o współczynnikach w $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Najprostsze przykłady algebr wierzchołkowych pochodzą od przemiennych $\mathbb{R}$-algebr z derywacją. Niech V będzie taką algebrą, a $D : V \mapsto V$ ustaloną derywacją. Definiujemy

$$u_n v = \begin{cases} \dfrac{D^{-n-1}(u) \cdot v}{(-n-1)!} & \text{dla } n < 0, \\ 0 & \text{dla } n \geqslant 0. \end{cases}$$

Można pokazać, że w taki sposób otrzymuje się wszystkie algebry wierzchołkowe skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$.

Jeśli V jest dowolną algebrą wierzchołkową, a odwzorowanie $D : V \to V$ jest zdefiniowane wzorem $D(v) = v_{-2} 1$, to przestrzeń V/DV staje się algebrą Liego z nawiasem $[u, v] = u_0 v$. Według słów Borcherdsa algebry wierzchołkowe stanowią jednoczesne uogólnienie pierścieni przemiennych i algebr Liego.

Najważniejszym dla *Monstrous Moonshine* przykładem algebry wierzchołkowej okazuje się przestrzeń V skonstruowana przez Frenkela, Lepowsky'ego i Meurmana ([17]). Działanie grupy $\mathbb{M}$ na V zachowuje strukturę algebry wierzchołkowej, co więcej, $\mathbb{M}$ jest pełną grupą automorfizmów algebry wierzchołkowej V. Otrzymujemy w ten sposób nową konstrukcję grupy Monstrum, bardziej naturalną, niż konstrukcja Griessa.

Kolejnym krokiem Borcherdsa było wykorzystanie algebry wierzchołkowej V do skonstruowania dwóch algebr Liego: Fałszywej Monstrualnej algebry Liego $\mathcal{L}'_M$ (ang. *Fake Monster Lie algebra*) ([3]) i Monstrualnej algebry Liego $\mathcal{L}_M$ (ang. *Monster Lie algebra*) ([4]). Algebry te stanowią przykłady tzw. uogólnionych algebr Kaca–Moody'ego, nazywanych również algebrami Borcherdsa.

Zwykłe algebry Kaca–Moody'ego stanowią uogólnienie skończenie wymiarowych, półprostych algebr Liego. Półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ ma rozkład na sumę prostą podprzestrzeni

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

gdzie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ jest pewną abelową podalgebrą, nazywaną podalgebrą Cartana, Φ jest skończonym podzbiorem przestrzeni dualnej $\mathfrak{h}^*$, nazywanym systemem pierwiastków algebry $\mathfrak{g}$, zaś $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x\}$ jest podprzestrzenią własną operatorów $ad_h = [h, \ ]$, $h \in \mathfrak{h}$. Przestrzenie $\mathfrak{g}_\alpha$ są jednowymiarowe. Z algebrą $\mathfrak{g}$ jest też stowarzyszona pewna podgrupa W grupy wszystkich bijekcji zbioru Φ, nazywana grupą Weyla algebry $\mathfrak{g}$. Jednym z najważniejszych twierdzeń teorii reprezentacji półprostych algebr Liego jest twierdzenie Weyla o charakterze (ang. *Weyl character formula*), które po zastosowaniu do reprezentacji trywialnej daje tzw. wzór mianownikowy Weyla (ang. *Weyl denominator formula*), mający postać

$$\sum_{w \in W} (-1)^w w(e^\rho) = e^\rho \prod_{\alpha > 0} (1 - e^\alpha).$$

Nie będziemy tu wyjaśniać obiektów występujących w tym wzorze (zainteresowany czytelnik może sięgnąć np. do książki [22]), zauważmy jednak, że wzór ten wyraża pewną sumę indeksowaną elementami grupy Weyla w postaci iloczynu indeksowanego zbiorem pierwiastków dodatnich (będącym „połową” zbioru wszystkich pierwiastków Φ).

W najprostszym przypadku algebry Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ wzór mianownikowy Weyla jest równoważny klasycznemu rozwinięciu wyznacznika Vandermonde'a:

$$\sum_{w \in S_n} (-1)^w x_{w(1)}^{n-1} x_{w(2)}^{n-2} \dots x_{w(n)}^0 = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Algebry Kaca–Moody'ego są nieskończenie wymiarowym uogólnieniem półprostych algebr Liego ([20]). Algebra Kaca–Moody'ego $\mathfrak{g}$ ma rozkład

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

tym razem jednak system pierwiastków Φ może być nieskończony; grupa Weyla W jest też na ogół nieskończona. W przeciwieństwie do półprostych algebr Liego, dla algebr Kaca-Moody'ego podprzestrzenie pierwiastkowe $\mathfrak{g}_\alpha$ mogą mieć wymiar większy od 1. Wymiar ten nazywamy krotnością pierwiastka α i oznaczamy go przez $\operatorname{mult}(\alpha)$. Pierwiastki o krotności większej od 1 należą do zbioru pierwiastków urojonych (mają one ujemny „kwadrat długości” ze względu na pewną symetryczną formę dwuliniową na $\mathfrak{h}^*$). Tym niemniej pierwiastki proste, które odpowiadają podprzestrzeniom $\mathfrak{g}_\alpha$ generującym algebrę $\mathfrak{g}$, są zawsze rzeczywiste, tj. mają dodatni kwadrat długości. Każda algebra Kaca–Moody'ego ma swój wzór mianownikowy

$$\sum_{w\in W}(-1)^w w(e^\rho) = e^\rho \prod_{\alpha>0}(1-e^\alpha)^{\mathrm{mult}(\alpha)},$$

będący konsekwencją twierdzenia Weyla–Kaca o charakterze ([20]). Najprostszym przykładem takiego wzoru jest słynny wzór Jacobiego (ang. *Jacobi triple product formula*), który jest konsekwencją wzoru mianownikowego dla afinicznej algebry Liego $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$:

$$\prod_{n>0}(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1})(1-q^{2n}) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} q^{l^2}z^l.$$

Piękny pochodzący od Borcherdsa dowód tego wzoru, całkowicie elementarny, choć wykorzystujący język teorii elektronu Diraca, można znaleźć w ksiażce [16, str. 216].

Borcherds rozszerzył klasę algebr Kaca–Moody'ego ([2]), dopuszczając istnienie prostych pierwiastków urojonych, oraz udowodnił dla tak rozszerzonej klasy algebr zarówno uogólnienie twierdzenia Weyla–Kaca o charakterze, jak i odpowiedni wzór mianownikowy, który ma następująca strukturę

$$\sum_{w\in W}(-1)^w w\Big(e^\rho \sum_S (-1)^S e^S\Big) = e^\rho \prod_{\alpha>0}(1-e^\alpha)^{\mathrm{mult}(\alpha)},$$

gdzie wewnętrzna suma po lewej stronie przebiega po skończonych sumach S parami ortogonalnych prostych pierwiastków urojonych, a znak $(-1)^S$ zależy od parzystości liczby składników w S.

Podstawowym problemem pojawiającym się przy próbach stosowania wzoru mianownikowego Weyla–Kaca jest to, że dla większości algebr Kaca–Moody'ego wyliczenie krotności $\mathrm{mult}(\alpha)$ jest beznadziejnie trudne. Zdefiniowane przez Borcherdsa algebry $\mathcal{L}'_M$ i $\mathcal{L}_M$ okazały się pod tym względem dużo łatwiejsze. Opiszemy tu pokrótce strukturę Monstrualnej algebry $\mathcal{L} = \mathcal{L}_M$, mającej fundamentalne znaczenie w pracy Borcherdsa [4] poświęconej *Monstrous Moonshine*.

System pierwiastków algebry $\mathcal{L}$ może być utożsamiony ze zbiorem $\Phi = \{(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid mn \geqslant -1,\ mn \neq 0\}$. Podalgebra Cartana $\mathfrak{h}$ jest równa $\mathbb{R}^2$, a rozkład na przestrzenie pierwiastkowe ma postać

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}^2 \oplus \bigoplus_{(m,n)\in\Phi} \mathcal{L}_{(m,n)}.$$

Na algebrze $\mathcal{L}$ działa grupa $\mathbb{M}$ zachowując powyższy rozkład i dla wszystkich $(m,n)\in\Phi$ istnieje izomorfizm reprezentacji $\mathcal{L}_{(m,n)} \cong V_{mn}$ (gdzie V_{mn} jest składnikiem prostym algebry wierzchołkowej V), zatem krotność $\mathrm{mult}(m,n)$

jest równa współczynnikowi $c(mn)$ w rozwinięciu funkcji $j(\tau)$ (dowód istnienia tego izomorfizmu Borcherds oparł na twierdzeniu *no-ghost* Goddarda i Thorna pochodzącym z teorii strun). Grupa Weyla algebry $\mathcal{L}$ ma rząd 2 i wzór mianownikowy Weyla–Kaca–Borcherdsa algebry $\mathcal{L}$ przyjmuje postać

$$j(\sigma) - j(\tau) = p^{-1} \prod_{m>0, n\in\mathbb{Z}} (1 - p^m q^n)^{c(mn)}, \quad \text{gdzie } p = e^{2\pi i\sigma},\ q = e^{2\pi i\tau}$$

(pojawienie się po lewej stronie funkcji j jest konsekwencją struktury zbioru prostych pierwiastków urojonych). Wzór ten oraz analogiczne wzory produktowe dla pozostałych szeregów McKaya–Thompsona $T_g(\tau)$ pozwoliły Borcherdsowi na udowodnienie, że szeregi te spełniają identyczne tożsamości jak funkcje *Hauptmodul* dla powierzchni Riemanna genusu zero postaci H/G. Następnie Borcherds znalazł wystarczającą ilość „warunków początkowych”, żeby udowodnione wcześniej tożsamości jednoznacznie wyznaczały te szeregi, co pokazało, że szeregi McKaya–Thompsona są równe funkcjom *Hauptmodul* i zakończyło dowód hipotez Conwaya i Nortona składających się na *Monstrous Moonshine.*

Przedstawione powyżej wyniki Borcherdsa nie wyczerpują jego bogatego dorobku. Należy tu przede wszystkim wspomnieć o konsekwencjach wzorów mianownikowych dla innych uogólnionych algebr Kaca–Moody'ego. Borcherds pokazał jak stosować te wzory do konstruowania form automorficznych na grupach ortogonalnych $O_{p,2}(\mathbb{R})$ ([7], [13]) oraz do badania przestrzeni moduli powierzchni Enriquesa ([11]), otwierając w ten sposób nowe kierunki badań zarówno w teorii form automorficznych, jak i w klasycznej geometrii algebraicznej. Idee Borcherdsa znalazły również zastosowanie w kwantowej teorii pola.

Czytelnikom poszukującym bardziej szczegółowych informacji o wynikach Borcherdsa polecam wykład Goddarda [18], artykuły przeglądowe autorstwa samego Borcherdsa ([5], [8], [12], [15]), oraz jego oryginalne prace, które na ogół zawierają bardzo przejrzyste komentarze, pozwalające nawet niespecjalistom prześledzić główne idee rozważań. Wybór ważniejszych prac Borcherdsa zawiera przytoczony poniżej spis literatury. Dobrym źródłem informacji o jego wynikach jest strona WWW Borcherdsa, zawierająca między innymi większość jego prac (http://www.math.berkeley.edu/~reb).

Bibliografia

[1] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac–Moody algebras and the monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83 (1986), 3068–3071.

[2] R. E. Borcherds, *Generalized Kac–Moody algebras*, J. Algebra 115 (1988), 501–512.

[3] R. E. Borcherds, *The monster Lie algebra*, Adv. Math. 83 (1990), 30–47.

[4] R. E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie algebras*, Invent. Math. 109 (1992), 405–444.

[5] R. E. Borcherds, *Sporadic groups and string theory*, w tomie *First European Congress of Mathematics*, vol. 1, Birkhäuser, 1994, 411–421.

[6] R. E. Borcherds, *A characterization of generalized Kac–Moody algebras*, J. Algebra 174 (1995), 1073–1079.

[7] R. E. Borcherds, *Automorphic forms on* $SO_{s+2,2}$ *and infinite products*, Invent. Math. 120 (1995), 161–213.

[8] R. E. Borcherds, *Generalized Kac–Moody algebras and modular forms on* $O_{n,2}$, w *Proceedings of the ICM 1994*, vol. 2, Birkhäuser, 1995, 744–752.

[9] R. E. Borcherds, A. J. E. Ryba, *Modular moonshine II*, Duke Math. J. 83 (1996), 435–459.

[10] R. E. Borcherds, *Modular moonshine III*, Duke Math. J. 93 (1998), 129–154.

[11] R. E. Borcherds, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, Topology 35 (1996), 699–710.

[12] R. E. Borcherds, *Automorphic forms and Lie algebras*, w tomie *Current Developments in Mathematics*, International Press, 1998.

[13] R. E. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. 132 (1998), 491–562.

[14] R. E. Borcherds, *Vertex algebras*, w *Topological field theory*, *primitive forms and related topics*, Progr. Math. 160, 35–77, Birkhäuser, 1998.

[15] R. E. Borcherds, *What is moonshine*, Doc. Math. J. DMV, Extra volume ICM 1998 vol. 1, 607–616.

[16] P. J. Cameron, *Combinatorics*: *topics*, *techniques*, *algorithms*, Cambridge University Press, 1994.

[17] E. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure Appl. Math. 134, Academic Press, 1988.

[18] P. Goddard, *The work of R. E. Borcherds*, Doc. Math. J. DMV, Extra volume ICM 1998 vol. 1, 99–108.

[19] R. L. Griess, *The Friendly Giant*, Invent. Math. 69 (1982), 1–102.

[20] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Cambridge University Press, 1990.

[21] V. G. Kac, D. A. Kazhdan, J. Lepowsky, R. L. Wilson, *Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebras*, Adv. Math. 42 (1981), 83–112.

[22] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progr. Math. 140, Birkhäuser, 1996.

[23] A. P. Ogg, *Automorphismes des courbes modulaires*, Sem. Delange–Pisot–Poitou, 16 année (1974–75), n. 7.