ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXV (1999)

Feliks Przytycki (Warszawa)

# Curtis McMullen

Curtis McMullen rozwiązał szereg problemów dotyczących działania grup Kleina i iteracji funkcji holomorficznych na sferze Riemanna, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wielkim osiągnięciem było udowodnienie „uniwersalności" geometrii w małych skalach wokół *głębokich punktów* zbiorów granicznych. Ta „sztywność", której klasycznym przejawem jest Twierdzenie Mostowa, jest unifikującym motywem wielu prac McMullena i pokazuje jedność pozornie odległych zagadnień. McMullen kontynuował badania Stevena Smale'a, Williama Thurstona i Dennisa Sullivana.

W tej próbie opisu niektórych wyników McMullena, będę opierał się na kilku jego pracach i dwóch książkach oraz na artykule Milnora i artykułach McMullena z materiałów Kongresów ICM w Kyoto 1990 i w Berlinie w 1998 r.

**1. Iteracyjne algorytmy.** Dla funkcji $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ zmiennej zespolonej iterowanie funkcji $N(f)(z) = z - f(z)/f'(z)$ pozwala znajdować zera $f$. To znaczy, że na ogół $(N(f))^n(z) = N(f) \circ N(f) \circ \ldots \circ N(f)(z)$ zbiega do najbliższego zera $f$ przy $n \to \infty$. $N(f)$ nazywa się funkcją Newtona, a ta metoda szukania zer – metodą Newtona. Jeśli $f$ jest wielomianem kwadratowym, to dla prawie każdego $z$, $(N(f))^n(z) \to Z(f)$. Tutaj $Z(f)$ oznacza zbiór pierwiastków $f$. Są one punktami stałymi przyciągającymi dla iteracji $N(f)$. Istnieje jednak [CGS] otwarty zbiór $U$ wielomianów stopnia 3 i otwarty podzbiór $V \subset \mathbb{C}$ takie, że dla $f \in U$, $z \in V$, $(N(f))^n(z) \not\to Z(f)$, np. $(N(f))^n(z)$ może dążyć do trajektorii okresowej okresu większego niż 1.

*Czysto iteracyjnym algorytmem* znajdowania pierwiastków wielomianu nazywamy przekształcenie $T : \mathrm{Poly}_d \to \mathrm{Rat}_k$ gdzie $\mathrm{Poly}_d$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów stopnia $d$, ze współczynnikiem 1 przy najwyższej potędze, a $\mathrm{Rat}_k$ zbiór wszystkich funkcji wymiernych stopnia $k$ (nieskracalnych ilorazów wielomianów, z których jeden ma stopień $k$, a drugi nie większy niż $k$). Chcąc, żeby $T$ było porządną funkcją, np. wymierną, $\mathrm{Poly}_d$ i $\mathrm{Rat}_k$ parametryzujemy współczynnikami. Algorytm nazywa się *typowo zbieżnym*, jeśli $(T(f))^n(z) \to Z(f)$ dla otwartego gęstego, pełnej miary, podzbioru

$\mathrm{Poly}_d \times \mathbb{C}$. Metoda Newtona, jak wyżej napisałem, nie jest typowo zbieżnym algorytmem dla wielomianów stopnia $d = 3$. McMullen znalazł inny algorytm, który jest typowo zbieżny: np. dla $P = X^3 + aX + b$ bierzemy

$$T(P) = N\left(\frac{X^3 + aX + b}{3aX^2 + 9bX - a^2}\right).$$

W [Mc1], [Mc2] McMullen, odpowiadając na pytanie Smale'a [S], udowodnił, że dla $d \geqslant 4$ typowo zbieżny algorytm nie istnieje, nawet jeśli żądać tylko ciągłości $T$. Ideą dowodu była obserwacja, że grupa $Br_d$ warkoczy działająca na przestrzeni $\mathcal{T}$ deformacji wielomianu o parami różnych zerach (zachowująca $Z(f)$, tzn. $\mathcal{T}/G \subset \mathrm{Poly}_d$) jest bogatsza, niż odpowiednia grupa, która działałaby na $T(\mathcal{T})$. Zbiór Julii dla $T(f)$, rozdzielający zera $f$, daje przeszkodę.

Definicja: Dla funkcji wymiernej $F$ (lub całkowitej) zbiór Julii, to domknięcie zbioru wszystkich punktów okresowych odpychających, to znaczy takich, że istnieje $k \in N$ takie, że $F^k(z) = z$ i $|(F^k)'(z)| > 1$.

W [DM] ta teoria była kontynuowana. Autorzy udowodnili, że istnieje skończona wieża algorytmów typowo zbieżnych dla $d \leqslant 5$, ale nie istnieje dla $d$ większych. Oprócz rozszerzeń cyklicznych wymaga to opisu algorytmu dla grupy nierozwiązalnej $A_5$. Odpowiednia funkcja wymierna ma symetrie 20-ścianu foremnego.

**2. Struktury hiperboliczne na 3-rozmaitościach Hakena.** McMullen podał nowe dowody słynnych twierdzeń Thurstona o geometryzacji, związanych z klasyfikacją 3-rozmaitości.

TWIERDZENIE [Th1], [Th3]. *Dla dowolnej zamkniętej 3-rozmaitości $M$, pierwszej, Hakena, beztorusowość jest równoważna istnieniu na $M$ struktury hiperbolicznej.*

Struktura hiperboliczna, to metryka o stałej krzywiźnie równej $-1$. Inaczej, struktura hiperboliczna na $M$, to przedstawienie $M$ jako $B^3/G$, otwartej kuli o środku w $0 \in \mathbb{R}^3$ i promieniu 1, podzielonej przez działanie dyskretnej podgrupy $G$ grupy $\mathrm{Iso}(B^3)$. Ta ostatnia, to grupa izometrii hiperbolicznych $B^3$, inaczej: grupa wszystkich zachowujących orientację przekształceń $B^3$ generowanych przez symetrie i inwersje zachowujące $B^3$.

Taka grupa $G$ nazywa się grupą Kleina. Elementy $G$ obcięte do sfery Riemanna $\partial B^3 = \overline{\mathbb{C}}$ reprezentowane są przez homografie $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, $ad - bc = 1$.

Thurston wysunął hipotezę, że każdą zwartą 3-rozmaitość można pociąć wzdłuż sfer i torusów na 3-rozmaitości, z których każda ma jedną z ośmiu standardowych struktur (sferyczna, euklidesowa, hiperboliczna i ich kombinacje). Dla sześciu z nich sytuacja jest jasna. Trudności pozostają w przypadku hiperbolicznym. Badaniom opiera się przypadek sferyczny: hipoteza Poincarégo.

3-rozmaitość można najpierw pociąć wzdłuż sfer (po rozcięciu sfery zalepiamy kulami). Rozmaitości, w których nie ma już nietrywialnych sfer (z wyjątkiem $S^1 \times S^2$), nazywamy *pierwszymi.* Dalej, rozmaitość pierwszą można ciąć wzdłuż zanurzonych torusów. Otrzymamy rozmaitość z brzegiem (spójną lub niespójną), którego składowe są tymi torusami.

Rozmaitość nazywa się *homotopijnie beztorusowa* „atoroidal”, jeśli każde przekształcenie w nią 2-torusa, które jest włożeniem dla grup podstawowych, jest homotopijne którejś składowej brzegu.

3-rozmaitość pierwsza zamknięta $M$ nazywa się *Hakena*, jeśli zawiera dwustronną, różną od sfery, nieściesnialną powierzchnię o brzegu w brzegu $M$. Powierzchnia $S$ nazywa się *nieściesnialna*, jeśli każda zawarta w niej pętla ograniczająca dysk w $M \setminus S$ ogranicza dysk w $S$.

Okazuje się, że rozmaitość Hakena można zbudować z kul sklejając wzdłuż nieściesnialnych powierzchni zawartych w brzegach kul. Inaczej mówiąc: po pierwszym rozcięciu można już ciąć aż do kul.*

(Analogicznie, o jeden wymiar niżej, powierzchnię Riemanna można pociąć na hiperboliczne sześciokąty.)

Kiedy mamy sklejenie (inwolucję) $\tau : \partial M \to \partial M$, chcemy skonstruować strukturę hiperboliczną na $M/\tau$. Struktury hiperboliczne na $M$ są parametryzowane strukturami hiperbolicznymi brzegu. (Nie ma sztywności struktury hiperbolicznej na $M$ jak w przypadku zamkniętej 3-rozmaitości – Twierdzenie Mostowa). Trzeba znaleźć więc taką strukturę na $\partial M$, żeby $\tau$ było izometrią. Mając $\tau$ konstruuje się przekształcenie przestrzeni Teichmüllera $\mathrm{Teich}(\partial M)$ (to jest przestrzeń struktur hiperbolicznych z dokładnością do izometrii homotopijnej identyczności). McMullen udowodnił, że to przekształcenie jest zwężające jednostajnie w ograniczonych obszarach Teich. Albo jest więc punkt stały, albo ucieczka do nieskończoności. W tym drugim przypadku istnieją w $\partial M$ krótkie geodezyjne i uzyskuje się homotopijny torus; sprzeczność z beztorusowością.

Idea tego dowodu jest związana z ideą dowodu twierdzenia Thurstona dla krytycznie skończonych przekształceń wymiernych sfery Riemanna. Definicja: $f$ jest *krytycznie skończone*, jeśli dla $\mathrm{Crit}(f) = \{z : f'(z) = 0\}$ zbiór $P = \bigcup_{n>0} f^n(\mathrm{Crit}(f))$ jest skończony. Thurston udowodnił [DH], że warunkiem istnienia struktury konforemnej, dla której rozgałęzione topologiczne nakrycie $f$ jest konforemne, jest nieistnienie pewnych przeszkód, pewnych rodzin pętli. Dzięki temu zwężające przekształcenie $\mu \mapsto f^{-1}(\mu)$ dla $\mu \in \mathrm{Teich}(\overline{\mathbb{C}}, P)$ ma punkt stały.

**3. Hipoteza Kra.** Własność zwężania dla powyższych przekształceń przestrzeni Teichmüllera została udowodniona przez McMullena [Mc3] przy

*Polecam książkę: W. Jakobsche, J. H. Przytycki, *Topologia 3-wymiarowych rozmaitości*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1987.

użyciu następującego twierdzenia znanego wcześniej (w szczególnym przypadku) jako Hipoteza Kra.

Dla dowolnej powierzchni hiperbolicznej (Riemanna) oznaczmy przez $Q(X)$ przestrzeń Banacha wszystkich różniczek kwadratowych $\Phi = \phi(z)dz^2$ z normą $\int |\phi|\, dz\, d\bar{z}$ skończoną. Dowolne nakrycie $f : X \to Y$ indukuje $f_* : Q(X) \to Q(Y)$. Różniczka w $y$ jest sumą obrazów różniczek z wszystkich punktów $f^{-1}(y)$. Ten operator nie zwiększa normy.

TWIERDZENIE [Mc4]. *Jeśli nakrycie nie jest amenabelne*, *to* $||f_*|| < 1$.

Norma zmniejsza się dzięki uśrednianiu, sumowane liczby zespolone mają różne argumenty.

W przypadku regularnego nakrycia $X \to Y = X/G$, amenabelne znaczy, że $G$ jest *grupą ze średnią*, co znaczy mniej więcej: o niezbyt szybkim wzroście liczby możliwych różnych słów w zależności od liczby użytych liter. Założenie, że nakrycie nie jest amenabelne, jest spełnione, jeśli na przykład $X$ jest dyskiem Poincarégo, uniwersalnym nakryciem zwartej powierzchni Riemanna $Y$. Hipoteza Kra była formułowana w tym przypadku i nazywała się Theta Hipotezą.

**4. Renormalizacje przekształceń odcinka.** Niech $f : I \to I$ będzie gładkim przekształceniem odcinka $I$ w siebie, $f(\partial I) \subset \partial I$, mającym jeden punkt krytyczny $f'(a) = 0$ taki, że $f''(a) \neq 0$. Takie $f$ nazywamy przekształceniem *rzeczywistym typu kwadratowego.* Przykładem może być $x \mapsto x^2 + c$, $-2 \leqslant c \leqslant 1/4$. Wyobraźmy sobie wykres jako fałdkę i wyobraźmy sobie, że przekształcenie zależy od parametru (np. $c$), fałdka spłaszcza się się przy wzroście parametru. Oznaczmy przez $p$ jedyny punkt stały we wnętrzu $I$. Taki punkt istnieje, jeśli fałdka nie jest zbyt płaska. Oznaczmy przez $p'$ drugi punkt taki, że $f(p') = p$. Początkowo (np. $c = -2$) $[p', p]$ przechodzi przy $f^2 = f \circ f$ na cały odcinek między $\partial I$ a $p$, zawierający $p'$. Jeśli jednak fałdka jest dostatecznie płaska, to $[p', p]$ przechodzi w siebie. Jeśli nie jest zbyt płaska, to istnieje w $(p', p)$ punkt stały dla $f^2$ i można powtórzyć operację zawężając zbiór parametrów.

Jeśli dla przekształcenia typu kwadratowego $f : I \to I$ istnieje odcinek $I_1 \subset I$ i $m \geqslant 2$ liczba naturalna takie, że $f^m : I_1 \to I_1$ jest typu kwadratowego, to $\mathcal{R}(f) := \alpha \circ f^m \circ \alpha^{-1}$, gdzie $\alpha$ przekształca $I_1$ afinicznie na $I$, nazywa się *renormalizacją* $f$. Powyżej mieliśmy przykład renormalizacji rzędu 2.

Porządek odcinków $I_1, f(I_1), \ldots, f^m(I_1) = I_1$ w $\mathbb{R}$ wyznacza permutację $\sigma(f)$ na $m$ symbolach. Przekształcenie nazywa się nieskończenie renormalizowalne, jeśli zdefiniowany jest ciąg kolejnych renormalizacji $\mathcal{R}^n(f)$ dla ciągu $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Mówimy, że $f$ ma *ograniczoną kombinatorykę*, jeśli ciąg $m_j$ jest ograniczony, i *okresową*, jeśli ciąg $\sigma(\mathcal{R}^n(f))$ jest okresowy.

Przykład powyżej, $m_1 = m_2 = \ldots = 2$, nazywa się *typu Feigenbauma.* Istnieje tylko jeden taki wielomian postaci $z^2 + c$, $c = -1,4101155\ldots$, [Su].

TWIERDZENIE 4.1 [Mc5]. *Jeśli $f : I \to I$ jest przekształceniem rzeczywistym analitycznym, nieskończenie renormalizowalnym, z kombinatoryką okresu $q$, to $\mathcal{R}^{qn}(f) \to F$ wykładniczo. $F$ jest jedynym punktem stałym dla operatora renormalizacji $\mathcal{R}^q$ o kombinatoryce takiej samej jak $f$.*

Ta zbieżność wykładnicza ma miejsce na pewnym otoczeniu $I$ w płaszczyźnie zespolonej, na które rozszerzają się holomoficznie wszystkie $\mathcal{R}^{qn}(f)$.

Nie zakładajmy teraz okresowości kombinatoryki $f$. Wiadomo, że prawie wszystkie punkty z $I$, przy działaniu iteracjami $f$, zbiegają do tzw. *postkrytycznego zbioru Cantora* $P(f) = \overline{\bigcup_{n>0} f^n(a)} \subset I$, gdzie $a = a(f)$ jest punktem krytycznym.

TWIERDZENIE 4.2. *Niech $f, g$ będą rzeczywistymi analitycznymi, nieskończenie renormalizowalnymi przekształceniami odcinka z tą samą ograniczoną kombinatoryką. Wtedy $P(f)$ i $P(g)$ są $C^{1+\alpha}$-sprzężone.*

(To znaczy istnieje homeomorfizm $h : P(f) \to P(g)$ taki, że $hf = gh$ i $h$ rozszerza się do różniczkowalnego przekształcenia na otoczenie $P(f)$, którego pochodna jest ciągła w sensie Höldera: $|f'(x) - f'(y)|/|x - y|^\alpha$ jest funkcją ograniczoną.)

Twierdzenie to oznacza, że geometryczne niezmienniki atraktora $P$ (np. wymiar Hausdorffa) są wyznaczone przez kombinatorykę. Im głębiej patrzymy, tym bardziej atraktory wyglądają tak samo.

Te i inne uniwersalne własności $P$ i $\mathcal{R}^{qn}$ były zaobserwowane eksperymentalnie przez Feigenbauma oraz Coullet'a i Tressera w latach 70-tych. Dla $f$ typu Feigenbauma istnienie $F$ i przyciąganie $\mathcal{R}^n(f)$ z bardzo małego otoczenia $F$ było udowodnione wtedy przy wsparciu komputera [L]. Jednak dopiero wprowadzenie metod zespolonych przez Douady'ego, Hubbarda i Sullivana'a i ich dalszy rozwój, w którym prace McMullena miały fundamentalne znaczenie, pozwoliły zrozumieć sytuację.

Nietrudno udowodnić, że oba powyższe twierdzenia (dla okresowej kombinatoryki) są równoważne. Zajmiemy się Twierdzeniem 4.2. McMullen wprowadził tutaj nowe narzędzie: *wieże.* Dla $f$ rzeczywistego analitycznego i $n$ dostatecznie dużego, zespolone rozszerzenie $f_n = \mathcal{R}^n(f)$ staje się przekształceniem *zespolonym typu kwadratowego.* To znaczy istnieją otoczenia jednospójne $U(f_n) \subset\subset V(f_n)$ odcinka $I$ takie, że, oznaczając $U(f_n) = U_n$, $V(f_n) = V_n$, mamy $f_n(U_n) = V_n$ i $f_n$ nawija dwukrotnie $\partial U_n$ na $\partial V_n$. Wszystkie $f_n$ mają wspólnie ograniczone geometrie, to znaczy można wybrać $U_n, V_n$ tak, żeby moduły („szerokości") pierścieni $V_n \setminus \overline{U_n}$ były wspólnie ograniczone z góry i z dołu i podobnie średnice $f_n^j(U_n)$, $0 \leqslant j \leqslant m_n$ i wzajemne odstępy (z wyjątkiem $m = 2$, gdy te zbiory są zlepiane po dwa). Zatem istnieje ciąg $k_j \to \infty$ i przekształcenia zespolone typu kwadratowego $\widehat{f_n}$, $n \in \mathbb{Z}$, takie, że dla $k = k_j$ mamy $f_{n+k_j} \to \widehat{f_n}$. Mamy wtedy $\mathcal{R}(\widehat{f_n}) = \widehat{f}_{n+1}$. Przeskalujmy w końcu wszystkie $\widehat{f_n}$, $n \neq 0$, tak, żeby $\widehat{f}_{n+1} = \widehat{f}_n \circ \ldots \circ \widehat{f}_n$, $m_n$ razy. (Standardowo skalowane zostaje tylko $\widehat{f}_0$.) Ta rodzina $\{\widehat{f}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ jest nazywana *wieżą McMullena*. Dziedziny $U_n$ są coraz większe dla $n \to -\infty$.

W tym dowodzie wystąpiło bardzo ważne narzędzie, którym posługiwał się McMullen w wielu swoich pracach: geometryczna granica ciągu obiektów należących do pre-zwartej rodziny.

Dzięki ograniczonej geometrii sprzężenie $h$ z Twierdzenia 4.2 rozszerza się $K$-quasikonforemnie dla pewnej stałej $K \geqslant 1$. Homeomorfizm $h$ między obszarami nazywamy $K$-*quasikonforemnym* jeśli jest prawie wszędzie różniczkowalny i różniczka przekształca jednostkowe dyski styczne na elipsy o mimośrodzie ograniczonym przez $K$ (dokładny warunek $K$-quasikonforemności jest nieco silniejszy).

Stąd wynika, że istnieje $K$-quasikonforemny homeomorfizm $\widehat{h}$ całej płaszczyzny zespolonej, który sprzęga $\widehat{f}_n$ z $\widehat{g}_n$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Okazuje się, że $\widehat{h}$ jest konforemne. W przeciwnym razie istnieje mierzalne pole kierunków $\ell$ (np. dłuższe osie powyższych elips) niezmiennicze dla wieży $G = \{\widehat{g}_n\}$.

Zbiorem Julii $J(f)$ dla przekształcenia typu kwadratowego nazywamy brzeg zbioru $K(f)$ punktów nieuciekających z $U(f)$ przy działaniu iteracjami $f$. Dla nieskończenie renormalizowalnych przekształceń $J(f) = K(f)$ jest brzegowy, jest to pewien *dendryt.* Okazuje się, że dla każdej wieży $G = \{g_n\}$ (odtąd dla uproszczenia oznaczeń opuszczam daszki) zbiór $J(G) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} J(g_n)$ jest gęsty w $\mathbb{C}$ [Mc5, Section: Julia sets fill the plane].

Istnieje zbiór $A$ dodatniej miary Lebesgue'a, na którym $\ell$ jest ciągłe. Można wybrać punkt gęstości $z \in A$. Dowolnie blisko $z$ istnieje punkt $z_1$ i istnieje $g_n$ oraz $k > 0$ takie, że $g_n^k(z_1)$ wpada blisko punktu krytycznego. Przeniesione z $A$ pole kierunków jest ciągłe, „prawie równoległe”, a jego obraz zagina się pod kątem $\pi$ wokół wartości krytycznej. Natomiast $g_n^{-m_n+1}$ przeprowadza $\ell$ z okolic punktu krytycznego na prawie równoległe pole w okolicach wartości krytycznej (iterujemy w tył). Sprzeczność.

Ponieważ $\widehat{h}$ zachowuje końce $I$ oraz $\infty$, i, jak udowodniliśmy, jest konforemne na $\mathbb{C}$, musi być identycznością. Stąd wynika zbieżność w Twierdzeniu 4.1.

Pokazaliśmy, że nie istnieje nietrywialna quasikonforemna deformacja wieży lub, równoważnie, nieistnienie niezmienniczego pola kierunków. Te własności noszą nazwę *sztywność.*

Dalej pracuje kluczowy pomysł McMullena tzw. głębokich punktów. Dla podzbioru $X \subset \mathbb{C}$ punkt $x \in X$ nazywamy *głębokim*, jeśli istnieją $c, \varepsilon > 0$ takie, że $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{dist}(z, X) \leqslant c|z - x|^{\varepsilon+1}$. To znaczy, że $X$ jest bardzo gęsty blisko $x$. Geodezyjna w $B^3$ zbiegająca do głębokiego $x \in X \subset \partial B^3 = \overline{\mathbb{C}}$ jest coraz głębiej w $C(X)$, *hiperbolicznym uwypukleniu* $X$ w $B^3$. McMullen udowodnił, że punkt krytyczny jest głęboki w $J(f)$ dla $f$ takich jak w Twierdzeniu 4.1. Co więcej, całe $P(f)$ składa się z punktów głębokich.

Drugą kluczową koncepcją jest jednostajne skręcanie. Mając daną rodzinę funkcji holomorficznych $\mathcal{F} = \{f\}$, gdzie $f : U(f) \to \mathbb{C}$ i $X \subset \overline{\mathbb{C}}$, mówimy, że para $(\mathcal{F}, X)$ jest *jednostajnie skręcająca*, jeśli patrząc z dowolnego punktu $p \in C(X)$, to znaczy zmieniając współrzędne na $B^3$ izometrią hiperboliczną tak, żeby $p$ przeszło na 0, znajdziemy $f \in \mathcal{F}$ takie, że dla dowolnego pola równoległych kierunków $\ell$ (zamiast kuli rozpatrujemy półprzestrzeń) $f(\ell)$ jest daleko od $\ell$ w $L^1$, nawet jeśli rozpatrujemy $K$-quasikonforemne deformacje $\mathcal{F}$ przy ustalonym $K$.

Mówimy, że homeomorfizm $\phi : U \to V$ dla $U, V$, dowolnych obszarów w $\overline{\mathbb{C}}$, jest $C^{1+\varepsilon}$-konforemny w $z \in U$, jeśli istnieje pochodna zespolona $\phi'(z)$ i, co więcej, $\phi(z + t) = \phi(z) + \phi'(z) \cdot t + O(|t|^{1+\varepsilon})$.

Twierdzenie 4.3 (o dynamicznej nieelastyczności) [Mc5]. *Załóżmy, że para $(\mathcal{F}, X)$ jest jednostajnie skręcająca i $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ jest quasikonforemnym sprzężeniem $\mathcal{F}$ z drugą rodziną $\mathcal{F}'$. Wtedy $\phi$ jest $C^{1+\varepsilon}$-konforemne w każdym głębokim punkcie $x \in X$.*

Chodzi tu o to, że im punkt $p \in B^3$ jest głębiej w $C(X)$, tym bliższe izometrii hiperbolicznej w okolicach $p$ jest przedłużenie („harmoniczne") $\phi$ na $B^3$. W przeciwnym razie, przechodząc do odpowiedniej geometrycznej granicy, otrzymalibyśmy parę jednostajnie skręcającą dla $X = \overline{\mathbb{C}}$ z niezmienniczym polem kierunków, co nie jest możliwe (sztywność).

Okazuje się, że rodzina $\mathcal{F} = f^{-k_1} f^{k_2}$ dla gałęzi $f^{-k_1}$ jest tak bogata, że $(\mathcal{F}, J(f))$ spełnia warunek jednostajnego skręcania. Zaginanie pola wokół wartości krytycznej dla $f^k = \mathcal{R}^n(f)$ przenosi się bowiem sprzęgając $f^{-l}$ w okolice dowolnego punktu należącego do $J(f)$ [Mc5, Section: Small Julia sets everywhere]

To pozwala zastosować do $(\mathcal{F}, J(f))$ i $P(f)$ Twierdzenie 4.3 i kończy dowody Twierdzeń 4.1 i 4.2.

Należy jeszcze wspomnieć o pięknej książce [Mc6], poprzedzającej [Mc5], w której McMullen uporządkował metody hiperboliczne dla zespolonych renormalizacji i udowodnił, że dla $z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, nie ma niezmienniczych mierzalnych pól kierunków na $J$. (To dotyczy hipotetycznego przypadku, gdy miara Lebesgue'a $J$ jest dodatnia.) Dowód jest podobny jak w przypadku wież. W szczególności domknięcie zbioru parametrów $c$ zespolonych, dla których jest hiperboliczność na $J$ (tzn. jednostajne rozciąganie), jest całym $\mathbb{R}$. (W tym czasie powstał pierwszy dowód silniejszego twierdzenia, J. Graczyka i G. Świątka, mówiącego, że rzeczywiste parametry $c$, dla których jest hiperboliczność, są gęste w $\mathbb{R}$, [GS].)

**5. Geometryczna nieelastyczność.** Twierdzenie Mostowa o sztywności mówi, że jeśli dwie 3-rozmaitości zamknięte hiperboliczne są homotopijnie równoważne, to są izometryczne.

Inaczej, jeśli $M = B^3/G$ i $N = B^3/H$ i $G, H$ są izomorficzne, to są sprzężone: $G = \phi H \phi^{-1}$ dla $\phi$ hiperbolicznej izometrii $B^3$.

Zamkniętość rozmaitości implikuje, że *zbiór graniczny Poincarégo* $\Lambda(G) = \lim_{g\in G} g(p)$, dla dowolnie ustalonego $p \in B^3$, jest cała sferą $\partial B^3$. (Łatwo pokazać, że $\Lambda(G)$ nie zależy od $p$.)

McMullen udowodnił wariant Twierdzenia Mostowa dla $M$ 3-rozmaitości otwartej.

Definicje: 1. $M$ spełnia warunki *ograniczonej injektywności*, jeśli istnieją $0 < r < R < \infty$ takie, że dla dowolnego $p \in C(\Lambda(G))$, gdzie $C(X)$ oznacza *hiperboliczne uwypuklenie* $X$, największa kula hiperboliczna $B(Gp, s)$, która zanurza się w $M$, ma promień $s \in [r, R]$.

2. $f : M \to N$ jest $K$-*quasi-izometrią*, jeśli podniesienie $\widetilde{f}$ do $B^3$ spełnia dla każdego zbioru $A \subset B^3$ $\operatorname{diam}(\widetilde{f}(A)) \leqslant K(\operatorname{diam} A + 1)$ i podobnie dla $\widetilde{f}^{-1}$.

3. homeomorfizm $f : M \to N$ jest *asymptotyczną izometrią*, jeśli dla każdej kuli $B$ o środku w $p$, $p \in C(\Lambda(G))$, promieniu $\leqslant 1$, mamy

$$\left| \log \frac{\operatorname{diam} B}{\operatorname{diam} \widetilde{f}(B)} \right| \leqslant C A^{-\operatorname{dist}(p, C(\Lambda(G)))},$$

dla pewnych stałych $C > 0, A > 1$.

Twierdzenie 5.1 (o geometrycznej nieelastyczności) [Mc5]. *Jeśli $M, N$, to quasi-izometryczne 3-rozmaitości hiperboliczne z ograniczoną injektywnością, to istnieje między nimi homeomorfizm, który jest asymptotyczną izometrią.*

Inna wersja, bliższa Twierdzeniu 4.3, mówi, że $K$-quasi-izometria $\widetilde{f}$ jest $C^{1+\varepsilon}$-konforemna w każdym głębokim punkcie $\Lambda(G)$.

Ponieważ quasi-izometria rozszerza się quasikonforemnie na $\partial B^3$ i grupa przekształceń $G$ dająca rozmaitość z ograniczoną injektywnością jest jednostajnie skręcająca, Twierdzenie 5.1 wynika z Twierdzenia 4.3.

**6. Struktury hiperboliczne na 3-rozmaitościach, które są rozwłóknieniami nad okręgiem.** McMullen wykorzystał geometryczną nieelastyczność do podania nowego dowodu drugiego twierdzenia Thurstona o geometryzacji:

Twierdzenie 6.1 [Th1], [Th4]. *Niech $S$ będzie zamkniętą powierzchnią Riemanna genusu $\geqslant 2$ i $\psi : S \to S$ homeomorfizmem pseudo-Anosowa,* [Th2]. *Wtedy 3-rozmaitość postaci*

$$T_\psi = S \times [0,1]/\{(x,0) \approx (\psi(x), 1)\}$$

*ma strukturę hiperboliczną.*

Zamiast definicji podam istotną własność homeomorfizmu pseudo-Anosowa: istnieje pętla, której obrazy coraz gęściej nawijają się na $S$ i w granicy dają niezmienniczą foliację.

Przekształcenie $\psi$ działa na Teich($S$), ale nie ma punktu stałego i nie można postępować jak w dowodzie pierwszego twierdzenia geometryzacyjnego, §2. (Zamiast niezmienniczej struktury konforemnej, ma specjalną parę niezmienniczych foliacji (patrz wyżej), elementów „brzegu" przestrzeni Teichmüllera.)

Grupa Kleina $G$ działająca na $B^3$ i zachowująca dysk $B^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$ nazywa się *grupą Fuchsa.* Dla $S = B^2/G$ istnieje naturalne przekształcenie $\operatorname{Teich} S \times \operatorname{Teich} \overline{S} \to \{\text{grupy Kleina}\}$. $\overline{S}$ oznacza $S$ z przeciwną orientacją. Jeśli $G_1$ i $G_2$, dwie grupy Fuchsa, mają działania quasikonforemnie sprzężone na $\partial B^3$ homeomorfizmami $\psi_1$ i $\psi_2$ z naszym wyróżnionym działaniem $G$, to możemy zadać działanie $\psi_1^{-1} G_1 \psi_1$ na górnej półsferze i $\psi_2^{-1} G_2 \psi_2$ na dolnej. Struktura konforemna $\nu$ (pole elips z dokładnością do skali), $\nu = \psi_1^{-1}(\mu_0)$, gdzie $\mu_0$ to standardowa struktura (pole okręgów), na górnej półsferze i $\nu = \psi_2^{-1}(\mu_0)$ na dolnej, będzie zachowywana przy tym działaniu. To jest po prostu działanie $G$, ale z inną strukturą. Zmieniamy w końcu quasikonforemnie współrzędne tak, żeby $\nu$ przeszło na $\mu_0$ (twierdzenie Bojarskiego–Ahlforsa–Bersa). Otrzymujemy działanie grupy przekształceń zachowujące $\mu_0$, zatem przekształceń konforemnych, grupę Kleina, reprezentację $G$ w $\operatorname{Iso} B^3$. Taka grupa nazywa się *quasi-Fuchsa.* Jej zbiorem granicznym $\Lambda$ jest quasi-okrąg (fraktalny okrąg). Przy tym mamy reprezentację $G$ w $\operatorname{Iso} B^3$. Obrazem jest $[G_1, G_2]$.

Dla struktur $X = B^2/G_1, Y = B^2/G_2$ w $\operatorname{Teich} S$ i $\operatorname{Teich} \overline{S}$ oznaczamy otrzymaną strukturę $B^3/G$ wraz z wyróżnioną reprezentacją $\rho : G \to \operatorname{Iso} B^3$ przez $Q(X, Y)$. Okazuje się, że istnieje $M(X, \psi) = \lim Q(X, \psi^{-n}(Y))$, algebraiczna granica. Zbiór graniczny $\Lambda$ grupy Kleina tej 3-rozmaitości staje się dendrytem, nie rozcina sfery.

Iteracje $\psi^n$, $n = 1, 2, \ldots$, działają na $M = M(X, \psi)$. To działanie nie zmienia rozmaitości, tylko reprezentację grupy $G$. Można je porównać z kolejnymi renormalizacjami przekształceń odcinka. $M$ jest „$\infty$-renormalizowalne".

Oznaczmy to działanie $\psi$ przez $\mathcal{R}$. Z Twierdzenia 5.1 (o geometrycznej nieelastyczności) wynika, że w klasie homotopii działania $\psi$ istnieje przekształcenie, które głęboko jest coraz bliższe izometrii. Przy iterowaniu zbliżamy się bowiem do głębokiego punktu w $\Lambda$, głęboko w uwypukleniu $C(\Lambda)$.

TWIERDZENIE 6.2. *Renormalizacje $\mathcal{R}^n(M)$ zbiegają wykładniczo do punktu stałego $M_\psi = \mathcal{R}(M_\psi)$.*

Rozpatrujemy tutaj reprezentacje $G$, dające $\mathcal{R}^n(M)$, odpowiednio przeskalowane: $\alpha_n G \alpha_n^{-1}$, $\alpha_n \in \operatorname{Iso} B^3$. W granicy, dla $M_\psi$, dendryt $\Lambda$ rozrasta się do całej sfery. Nasze $M_\psi$, *geometrycznie nieskończone*, topologicznie $S \times (-\infty, \infty)$, ma strukturę hiperboliczną niezmienniczą przy izometrii $(x, n) \mapsto (\psi(x), n + 1)$. To dowodzi Twierdzenia 6.1.

**7. Ostrza są gęste w brzegu Bersa.** $B_Y = Q(\mathrm{Teich}(S) \times Y)$ dla dowolnie ustalonej struktury $Y$ nazywa się *cięciem Bersa* (Bers' slice). Elementy brzegu, granicy algebraicznej, albo mają dendryt jako zbiór graniczny, jak wyżej, albo istnieje dla takiej grupy nietrywialna pętla w $S$, której obraz przy reprezentacji jest elementem parabolicznym grupy $\rho(G)$. Takie elementy brzegu $B_Y$ nazywamy *ostrzami* („cusps"). *Maksymalne ostrza* to elementy brzegu, dla których maksymalny układ rozłącznych pętli przechodzi przy $\rho$ na układ elementów parabolicznych.

TWIERDZENIE [Mc7]. *Maksymalne ostrza są gęste w brzegu cięcia Bersa.*

Podobna sytuacja ma hipotetycznie miejsce w brzegu zbioru Mandelbrota $M = \{c : f_c^n(0) \not\to \infty\}$, gdzie $f_c(z) = z^2 + c$. Hipoteza mówi, że parametry $c$, dla których istnieje punkt okresowy paraboliczny (pochodna iteracji jest pierwiastkiem z 1), są gęste. (Dla $c \in \mathbb{R}$ zostało to udowodnione, [GS].)

**8. Gruba Julia.** Jednym z pierwszych osiągnięć McMullena, [Mc8], było udowodnienie, że dla iteracji $f(z) = \lambda \exp z$, gdzie $|\lambda|$ dostatecznie małe, żeby istniał punkt stały przyciągający, zbiór Julii ma wymiar Hausdorffa 2. Dla $\lambda \sin z$ nawet miara Lebesgue'a jest dodatnia.

Dla $f$ funkcji wymiernej pytanie, czy jeśli zbiór Julii nie jest całą sferą to może mieć dodatnią miarę jest znanym problemem. (Dla skończenie generowanych grup Kleina, $\Lambda \neq \overline{C}$, pytanie, czy $\mathrm{Leb}(\Lambda) = 0$, nazywane jest problemem Ahlforsa.)

Dla funkcji całkowitej $f$ zbiór Julii, to brzeg zbioru punktów nie uciekających do $\infty$ przy działaniu iteracjami $f$. W obu powyższych przypadkach jest to tzw. *bukiet Cantora*, składający się z nieprzeliczalnej rodziny półprostych zbiegających do $\infty$. Końce tych linii są gęste w bukiecie. Niedawno B. Karpińska, pisząca pod moją opieką doktorat, udowodniła paradoksalne twierdzenie mówiące, że wymiar Hausdorffa tylko tego zbioru końców jest równy 2 (i ma dodatnią miarę dla $\sin z$), a wymiar bukietu bez końców ma wymiar 1, [K1], [K2].

McMullenowi bardzo się to podobało. Dyskutowaliśmy z nim te bukiety w Luminy w maju 1998 r.

**Bibliografia**

[CGS] J. Curry, L. Garnett, D. Sullivan, *On the iteration of a rational function: computer experiments with Newton's method*, Comm. Math. Phys. 91.2 (1983), 267–277.

[GS] J. Graczyk, G. Świątek, *The Real Fatou Conjecture*, Ann. Math. Stud. 144, Princeton University Press, 1998.

[DH] A. Douady, J. Hubbard, *A proof of Thurston's topological characterization of rational maps*, Acta Math. 171.2 (1993), 263–297.

[DM] P. Doyle, C. McMullen, *Solving the quintic by iteration*, Acta Math. 163.3–4 (1989), 151–180.

[K1] B. Karpińska, *Area and Hausdorff dimension of the set of accessible points of the Julia sets of* $\lambda e^z$ *and* $\lambda \sin z$, Fund. Math. 159 (1999), 269–287.

[K2] B. Karpińska, *Hausdorff dimension of the hairs without endpoints for* $\lambda \exp z$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), 1039–1044.

[L] O. Lanford, *A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. 6.3 (1982), 427–434.

[Mc1] C. McMullen, *Families of rational maps and iterative root finding algorithms*, Ann. of Math. 125 (1987), 467–493.

[Mc2] C. McMullen, *Braiding of the attractor and the failure of iterative algorithms*, Invent. Math. 91.2 (1988), 259–272.

[Mc3] C. McMullen, *Iteration on Teichmüller space*, Invent. Math. 99 (1990), 425–454.

[Mc4] C. McMullen, *Amenability*, *Poincaré series and quasiconformal maps*, Invent. Math. 97 (1989), 95–127.

[Mc5] C. McMullen, *Renormalization and* 3*-Manifolds which Fiber over the Circle*, Ann. Math. Stud. 142, Princeton University Press, 1996.

[Mc6] C. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Ann. of Math. Stud. 135, Princeton University Press, 1994.

[Mc7] C. McMullen, *Cusps are dense*, Ann. of Math 133 (1991), 217–247.

[Mc8] C. McMullen, *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 300.1 (1987), 329–342.

[S] S. Smale, *On the complexity of algorithms in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 13 (1985), 87–121.

[Su] D. Sullivan, *Bounds*, *quadratic differentials and renormalization conjectures*, w: *Mathematics into the Twenty-first Century*: *1988 Centennial Symposium*, edited by F. Browder, Amer. Math. Soc., 1992, 417–466.

[Th1] W. Thurston, *Three-dimensional manifolds*, *Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6.3 (1982), 357–381.

[Th2] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 19 (1988), 417–431.

[Th3] W. Thurston, *Hyperbolic structures on* 3*-manifolds I*: *Deformations of acylindrical manifolds*, Ann. of Math. 124 (1986), 203–246.

[Th4] W. Thurston, *Hyperbolic structures on* 3*-manifolds II*: *Surface groups and* 3*-manifolds which fiber over the circle*, preprint.


Ostatnie prace McMullena, jego zdjęcie i mnóstwo innych atrakcji można znaleźć na stronie http://www.math.harvard.edu/~ctm/