

Sto lat temu w WM

SPRAWOZDANIA Z PIŚMIENNICTWA POLSKIEGO

W DZIEDZINIE NAUK MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.

ROK 1899.

I. MATEMATYKA.

1. *Arvay W. i Komperda H.* *O pewnych cechach charakterystycznych grupy ruchów euklidesowych.* Prace mat.-fizycz., t. 10. str. 113—128.

W artykule tym znajdują się analityczne dowody twierdzeń następujących: 1) Nieskończenie małe odkształcenie krzywej płaskiej w jej płaszczyźnie, które nie zmienia długości jej liniowych elementów i kątów pomiędzy jej stycznymi w punktach sąsiednich, należy do grupy ruchów euklidesowych płaszczyzny. 2) Nieskończenie małe odkształcenie krzywej skośnej, które nie zmienia długości jej liniowych elementów, kątów pomiędzy jej stycznymi w punktach sąsiednich i kątów pomiędzy jej płaszczyznami ściśle stycznymi, należy do grupy ruchów euklidesowych przestrzeni. 3) Nieskończenie małe odkształcenie powierzchni, które nie zmienia długości jej liniowych elementów i odległości płaszczyzn stycznych od punktów sąsiadujących z punktem styczności, należy do grupy ruchów euklidesowych przestrzeni.

K. Ż.

2. *Böttcher Ł.* *Zasady rachunku iteracyjnego.* Prace mat.-fizycz., t. 10. str. 66—101.

Jeżeli $T(x_1, z_1, \dots, z_n)$ przedstawia podstawienie, wykonywane na zmiennych x_1, z_2, \dots, z_n :

$$z'_i = f_i(x_1, z_2, \dots, z_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

to N -krotne wykonanie takiego działania na zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n nazywa się iteracją o wykładniku N i podstawie T :

$$\overset{N}{I}_{T(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Tym sposobem iteracja jest określona dla wykładników dodatnich i całkowitych. Lecz już podstawienia odwrotne doprowadzają do iteracji o wykładniku ujemnym. Rozważając zaś iteracje podstawień, które już same są iteracjami, otrzymuje się iteracje, których wykładniki są iloczynami, skąd łatwo dojść do określenia iteracji o wykładniku ułamkowym wymiernym i uogólnić je także do przypadków ułamków niewymiernych. Taka iteracja jest ściśle związana z rozwiązaniem pewnego równania funkcyjnego, które znowu służyć może za określenie iteracji.

Do iteracji o wykładniku dowolnym stosuje autor teorię Liego; wykładnik N ma grać rolę dowolnego parametru grupy jednoparametrowej, przyczem, oczywiście, podstawienie zasadnicze winno należeć do grupy tych podstawień; jest to warunek konieczny i wystarczający na to, aby iteracje o wykładniku dowolnym miały rację bytu. Zadaniem zatem głównym jest: do danego podstawienia i jego iteracji o wykładniku całkowitym znaleźć grupę jednoparametrową ciągłą, której podstawienia powyższe tworzą pólgrupę nieciągłą.

Zagadnienie to omawia autor w kilku ostatnich ustępach pierwszej części swej pracy, objaśniając twierdzenia Korkina i Farkasa przy pomocy pojęć z teorii grup Liego.

Część druga pracy jest poświęcona zmienności iteracji algebraicznych jednej zmiennej. Jeżeli $z_1 = f(z)$, $z_2 = f(z_1)$... przedstawiają punkty otrzymywane z punktu z , to widoczne jest, że punkty te mogą się grupować około jednego punktu „granicznego“ P , i szereg takich punktów z_i nazywa się wtedy „regularnie zbieżnym“; albo począwszy od pewnego z_i , szereg ten może się rozdzielać na skończoną liczbę szeregów zbieżnych, jest to t. z. szereg „rytmicznie zbieżny“; albo nakoniec otrzymuje się nieskończenie wiele takich szeregów,—wtedy mamy przypadek „przestępnej“ zbieżności. Rozważając dalej otoczenie punktów granicznych i zachowanie się w niem funkcji $f(z)$, wprowadza autor pewien podział punktów granicznych lub ich grup, a następnie zastanawia się nad obszarami „zbieżności iteracji“ płaszczyzny zmiennej z , których punkty przy wykonywaniu iteracji prowadzą do danego punktu granicznego. Tu należą badania Cayley'a, Königs'a i innych, które autor bliżej omawia.

S. K.

3. **Böttcher Ł.** *Kilka słów z dziedziny rachunku iteracyjnego.* Lwów. 1889.
4. **Danielewicz B.** *Systemy grupowe obliczania rezerwy od ubezpieczeń na dożycie ze zwrotem premij.* Wiad. mat. 3, str. 275—287.

Autor podaje wzory, odnoszące się do następującego zagadnienia: Niechaj x oznacza wiek, jaki w chwili zawierania umowy posiada osoba ubezpieczona, tak, że otrzyma kapitał k , gdy przeżyje n lat; w razie zaś jej wcześniejszej śmierci, mające do tego prawo osoby otrzymają bezzwłocznie wszystkie premie brutto, wniesione przez osobę ubezpieczoną ratami rocznymi aż do chwili jej śmierci. Autor podaje najprzód wyrażenie na rezerwę, jaką towarzystwo ubezpieczeń powinno odłożyć na rachunek tej osoby po upływie n lat ubezpieczeniowych; następnie wyprowadza stąd wyrażenie sumy takich rezerw dla rowieśników, zapisanych na jednym i tym samym rachunku w księdze rezerwowej, t. j. dla osób, urodzonych w tym samym roku, bez względu na to, w jakim wieku, na jaki kapitał i z jakim terminem zawierają ubezpieczenie, i dochodzi do żądanego wzoru ogólnego. W podobny sposób postępując, wyprowadza wzór na rezerwę zbiorową od ubezpieczeń, zawartych przez wpłacenie premij jednorazowych. Wzorom otrzymanym nadaje nową postać, rozkładając ubezpieczenia na dożycie ze zwrotem premij na dwie części: na ubezpieczenie samego kapitału na dożycie bez zwrotu premij i na ubezpieczenie samego zwrotu premij wrazie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej, i wyprowadzając dla każdej z tych dwóch części oddzielnie wzór na obliczanie rezerwy. S. D.

5. **Dickstein S.** *Przyczynek do historii zasad rachunku nieskończonościowego.* (Krytycy „Teorii funkcji analitycznych“ Lagrange'a). Prace mat.-fizycz., t. 10. 178—192.

Praca ta odnosi się do pewnego bardzo ważnego momentu w historii matematyki. Zasady rachunku nieskończonościowego pozostawały w końcu XVIII-go i na początku XIX-go stulecia pod względem jasności i ścisłości bardzo wiele do życzenia. Chciano założyć fundamenty tej nauki bez uciekania się do pojęcia wielkości nieskończenie małych. „Théorie des fonctions analytiques“ Lagrange'a (1797) jest właśnie dziełem, wywołanem przez to dążenie. Wywarło ono znaczny wpływ na późniejszy rozwój umiejętności matematycznych i może być słusznie uważane za pierwszą podwalinę nauki, którą dziś nazywamy teorią funkcji analitycznych. Niemniej jednak spotkało się ono z krytyką współczesnych i ich następców. Praca, o której mowa, poświęcona jest właśnie historycznemu przeglądowi krytyk teorii funkcji Lagrange'a, ze szczególnem uwzględnieniem krytyków najwcześniejszych. Do nich należą Burja, Wroński, Śniadecki

i Bolzano. Burja (1801) podnosi, że założenia Lagrange'a o rozwinięciu funkcyj sprawdzają się wprawdzie dla funkcyj najprostszych, ale kwestya, czy sprawdzają się dla bardziej złożonych; widzi on trudność w uzasadnieniu możliwości rozwinięcia. Wronski (1811), którego poglądy autor omawia najobszerniej, powstaje przeciwko opieraniu zasad rachunku nieskończonościowego na rozwinięciu pewnego określonego kształtu; powiada, że z takim samym prawem możnaby oprzeć rachunek nieskończonościowy na rozwinięciach innej formy; widzi trudność także w uzasadnieniu możliwości rozwinięcia, które Lagrange bierze za podstawę swych rozważań; wreszcie czyni ważną uwagę, że należy odróżniać samą funkcję od jej rozwinięcia na szereg nieskończony. Mniej głęboką jest krytyka Śniadeckiego (1815), który w teorii Lagrange'a nie widzi znacznej różnicy z teorią poprzednią, i wypowiada zdanie, że w przedstawieniu Lagrange'a rachunek różniczkowy byłby tylko sztuką przybliżenia. Natomiast ważnemi są w tej dziedzinie prace czeskiego matematyka Bolzano (1817), który—być może—pierwszy subtelniej traktował zasadnicze kwestye teorii funkcyj i szeregów nieskończonych. W końcu pracy mniej obszernie omawia autor późniejszych znanych krytyków Lagrange'a i te kierunki wiedzy nowoczesnej, które stoją w blizkim związku z dziełem wielkiego geometry.

K. Ż.

6. Huber M. T. *O sumowaniu liczb waryacyj.* Wiad. mat., 3, str. 39—42.

Autor wprowadza kilka wzorów na sumę liczb waryacyj różnych klas z n elementów. W tomie 4 „Wiad. mat.” str. 93 znajduje się sprostowanie pewnego rachunkowego błędu w tych wzorach, dostrzeżonego przez p. B. Danielewicz a.

K. Ż.

7. Kępiński S. *O całkach rozwiązań równań różniczkowych z sobą sprzężonych rzędu 2-go, posiadających trzy punkty osobliwe.* Rozpr. Akad. Um. w Krakowie, 37, 112—138.

W pracy dawniejszej p. t.: *O całkach rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych liniowych jednorodnych rzędu 2-go* (Rozpr. Akad., 25, 264—328, porówn. referat w „Pracach mat.-fiz.”, 6, 199—203) badał autor pewne funkcyje przestępne, które przy pomocy rozwiązań równania różniczkowego ze sobą sprzężonego o trzech punktach osobliwych, znajdujących się w odległości skończonej:

$$A_2 y'' + A_2 y' + A_0 y = 0$$

dają się sprowadzić do postaci analogicznej z postacią całek hypereliptycz-

nych gatunku 3-go, a mianowicie do postaci (porówn. referat wyżej wspomniany):

$$Q_{ik} = \int_y^x \int_\eta^\zeta \frac{y_i v_k}{(z-\zeta)^3} \left[F_A^3 + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 F_b^s \right] dz d\zeta.$$

Zadaniem głównym pracy niniejszej jest dalsze badanie własności tych całek. W tym celu wprowadza autor w sposób analogiczny „całki gatunku 1-go“:

$$w_i^{xy} = \int_y^x y_i dz \quad (i=1, 2),$$

oraz „całki gatunku 2-go“:

$$Z_i^{xy}(t) = \int_y^x \frac{y_i}{(z-t)^3} \left[F_A^3 + \frac{1}{2} (z-t)^2 F_b^s \right] dz$$

i bada zachowanie się tych całek przy dowolnych obiegach jednego z krańców np. punktu x . Dowodzi między innymi twierdzenia, że różnica dwóch całek $Z_i(t)$ i $Z_i(t')$ z różnymi punktami nieskończonościowymi t i t' daje się wyrazić liniowo i jednorodnie przez funkcje y_i i y_i' , skąd wynika bezpośrednio, że t. zw. moduły peryodyczności całek gatunku 2-go $Z_i(t)$ są od parametru t niezależne. Wskazuje następnie drogę do znalezienia związków dwuliniowych, zachodzących pomiędzy całkami gatunku 1-go i całkami gatunku 2-go, i przeprowadza rachunki dla pewnych peryodów częściowych. Okazuje się, że otrzymane związki są z pewnymi zmianami identyczne ze znanymi związkami dwuliniowymi L. Fuchsa, podanymi w rozprawie: „Ueber Relationen u. sw“ (Crelle's Journal, t. 76). Rezultaty i metody, podane przez autora, dają się z małymi zmianami zastosować i do równań różniczkowych, posiadających ilekolwiek punktów osobliwych. S. D.

8. *Klein F. Odczyty o matematyce*, miane w Evanston od 28 sierpnia do 9 września 1893 dla członków Kongresu matematycznego, odbytego w czasie wystawy wszechświatowej w Chicago, spisane przez A. Ziveta, przełożył za upoważnieniem autora S. Dickstein. Z portretem F. Kleina. Warszawa. Wydawnictwo Redakcji „Wiadomości matematycznych“, 1899, 8°, str. II, 109.

W „Odczytach tych daje autor obraz kierunków rozwoju matematyki współczesnej, omawiając szerzej badania własne. Obraz ten ujęty jest w 12

odczytów o tytułach następujących: Clebsch, Sophus Lie (dwa wykłady), O postaci krzywych i powierzchni algebraicznych, Teorya funkcyj i Geometrya, O charakterze matematycznym intuicji przestrzeniowej i o związku matematyki czystej z naukami stosowanymi, Przystępność liczb e i π , Liczby idealne, Rozwiązywanie równań algebraicznych stopni wyższych, O niektórych najnowszych postępkach w teorii funkcyj hypereliptycznych i abelowych, Najnowsze badania w Geometrii nieeuklidesowej, O studiach matematycznych w Getyndze. Dodatek: O rozwoju matematyki w uniwersytetach niemieckich.

Komperda H. Patrz Arvay W. i Komperda H..

9. **Krygowski Z.** *Z teorii funkcyj analitycznych.* Wiad. mat., 3, str. 147—154.

W pracy tej zajmuje się autor szeregami kształtu:

$$(1) \quad \sum_v \frac{c_v}{(z-a_v)^{m_v}}, \quad z = re^{i\theta}.$$

W badaniach nad temi szeregami przyjmowano, że $\sum c_v$ ma wartość skończoną. Autor zajmuje się przypadkiem, kiedy $\sum c_v = \sum \Phi(r, \theta; a_v)$ jest szeregiem rozbieżnym. Okazuje się, że jeszcze i wtedy szeregi (1) mogą być zbieżne i przedstawiać funkcje analityczne, że te funkcje posiadają obszary osobliwe i t. d. W dowodzie tych twierdzeń posługuje się autor pewnym szeregiem Tannery'ego $\psi(z)$, który dla $|z| < 1$ ma wartość -1 dla $|z| > 1$ wartość $+1$. S. K.

10. **Lerch M.** *Uwagi o równaniu Gaussa w teorii funkcji gamma.* Prace mat.-fiz., 10, str. 1—7 i Dodatek do tego artykułu, tamże, str. 269—270.

Autor uważa funkcję:

$$R(w, s) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s},$$

argumentu zespolonego s . Jej rozwinięcia w okolicy $s=0$ i $s=1$ są:

$$(1) \quad R(w, s) = \left(\frac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} s + a_2 s^2 + \dots$$

$$(2) \quad R(w, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + A_1(s-1) + A_2(s-1)^2 + \dots$$

Z szeregu (1) autor wyprowadza wzór Gaussa:

$$\Gamma\left(\frac{w}{m}\right) \Gamma\left(\frac{w+1}{m}\right) \dots \Gamma\left(\frac{w+m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-w} \Gamma(w).$$

Następnie z tego wzoru Gaussa wyprowadza wzór:

$$\lim_{\varepsilon=0} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(w+n)^{1+\varepsilon}} \right) = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

będący z innej strony bezpośrednim wynikiem szeregu (2).

Wreszcie z szeregu (2) dochodzi do całki:

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(w) dw = a \log a - a + \log \sqrt{2\pi}.$$

W dodatku znajduje się pewne uproszczenie poprzednich wywodów oraz uwaga, że autor przekonał się, iż wzory (1) i (2) były dawniej już podane, pierwszy przez H. Kinkelina, drugi przez E. Schrödera.

K. Ż.

11. *Lewicki W.* Kilka uwag o wzorze interpolacyjnym Lagrange'a. Wiad. mat., 3, str. 264-274.

Jeżeli dla $n+1$ danych, różnych od siebie, wielkości, x_1, x_2, \dots, x_{n+1} zmiennej x wielomian całkowity y stopnia n przyjmuje wartości dane: y_1, y_2, \dots, y_{n+1} , to y można przedstawić albo znanym interpolacyjnym wzorem Lagrange'a, albo też wyznaczyć z równania:

$$\begin{vmatrix} y & 1, x & \dots, x^n \\ y_1 & 1, x_1 & \dots, x_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n+1} & 1, x_{n+1} & \dots, x_{n+1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Autor zajmuje się przypadkami, w których wielkości dane doprowadzają do wielomianu niższego stopnia, niż n -ty. Obszerne wywody autora można, zdaniem naszym, zastąpić widoczną uwagą, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wielomian y nie zawierał potęgi x^k , jest, żeby ilość dołączona do wyrazu x^k w podanym wyznaczniku była tożsamościowo

równa zero; stąd zaś bezpośrednio wynikają warunki, aby wielomian był nie stopnia n , ale np. stopnia $\lambda < n$. Zaznaczyć też winniśmy i niektóre błędy rozumowania. W ostatnim ustępie autor zamiast wielkości y_v wprowadza do wzoru Lagrange'a wielkości \bar{y}_v , związane z poprzednimi podstawieniem liniowym i jednorodnym; jeżeli wogóle był jakikolwiek interes wykonywania tego tak łatwego przekształcenia, to można było pisać o tem o wiele krócej.

K. Ż.

12. **Meyer Fr.** *O stanie obecnym teorii niezmienników.* Przełożył za upoważnieniem autora S. Dickstein. (Dokończenie). *Prace mat.-fizycz.* 10, str. 193—268.

Zawiera ciąg dalszy części drugiej: „Pokrewieństwo form“, a mianowicie: C. Metodykę, symbolikę i procesy niezmiennicze; Przypisy oraz Dopełnienia, w których jest mowa o przekształceniach wyższych, o niezmiennikach rozszerzonej grupy rzutowej, o niezmiennikach różniczkowych rzutowych, występujących w teorii krzywizny, o parametrach różniczkowych, o specjalnych grupach podstawień i formach; o kombinatach i apolarności o wypadkowych, wyróżnikach, o zastosowaniu teorii form do teorii grup przekształceń skończonych ciągłych.

13. **Meyer Fr.** *O stanie obecnym teorii niezmienników.* Przełożył za upoważnieniem autora S. Dickstein. Warszawa, 1899, 8-a wiel., str. II—185.

Praca ta drukowana częściami w tomach VII—X „Prac mat.-fizycznych“, wydana została jako całość w osobnej broszurze i opatrzona skróconym nazwiskiem.

14. **Pierpont J.** *O arytmetyzacji matematyki.* Wykład miany na zgromadzeniu amerykańskiego Towarzystwa matematycznego. Przekład z Buletynu tegoż Towarzystwa (maj, 1899). *Wiad. mat.*, 3, 249—263.

Autor ma na celu wykazanie, że jedynie metody arytmetyczne stanowią zupełnie pewną podstawę Analizy w dzisiejszym stanie nauki. W tym celu wypowiada uwagi krytyczne o pojęciach: wielkości i liczby, linii krzywej, ruchu, ciągłości, o rektyfikacji linii krzywych, kwadraturze, i stara się stwierdzić, że rozważania, na samej intuicji geometrycznej oparte, nie wystarczają do uzasadnienia powyższych pojęć oraz odnośnych metod analizy.

15. **Puzyna J.** O twierdzeniu upraszczającym obliczanie czynników wykładniczych w Weierstrassowskiej teorii funkcji eliptycznych. *Prace mat.-fizyczne*, 10, 8—15.

Uproszczenie rzeczzone polega na następującym twierdzeniu. Funkcja całkowita $\gamma(u)$, posiadająca własność:

$$\gamma(u+2\omega) - \gamma(u) = c$$

redukuje się do funkcji wymiernej całkowitej stopnia 1-go: $\gamma(u) = \frac{c}{2\omega} u + c''$, gdzie c'' jest stałą dowolną. Okazawszy to twierdzenie, stosuje je autor w dowodach dwu następujących twierdzeń z teorii funkcji eliptycznych:

- 1) Funkcję Weierstrassa $\sigma(u)$ można przedstawić przez:

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega_1}}{\sin^2 \frac{v\pi w_3}{w_1}} \right)$$

2) Każda funkcja peryodyczna o peryodach $2\omega_1, 2\omega_3$ posiada tyle zer a_1, a_2, \dots, a_n , co biegunów b_1, b_2, \dots, b_n i pozwala się przedstawić w formie:

$$\varphi(u) = c \frac{\sigma(u-a_1) \dots \sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1) \dots \sigma(u-b_n)} e^{c''u};$$

stałą c'' można wyznaczyć z warunków peryodyczności.

SK.

61. **Rudzki T.** O kwadratach krzywych, utworzonych ruchem posuwistym figury niezmiennej. *Wiad. mat.*, 3, 1—39.

Zadaniem tej rozprawy jest treściwe przedstawienie wyników dotychczasowych badań nad teorią kwadratury rulet, która powstała i rozwinęła się dzięki pracom Steinera, Gilberta, Williamsona, Holditscha, Amslera, Darboux'a i wielu innych, oraz podanie niektórych uogólnień i zastosowań. Nie możemy tu wymienić szczegółowo wszystkiego, o czym mowa w tej rozprawie; powiemy tylko krótko, że w § 1, po wyprowadzeniu wzoru na wielkość pola opisanego przez promień wodzący OM , gdzie O jest punkt dowolnie obrany na płaszczyźnie figury F , M zaś punkt dowolny z figurą związaną, podaje autor między innymi twierdzenie Steinera o polu opisanym przez t. zw. środek pól rulet, oraz pewien przykład ruchu posuwistego t. zw. dwukąta (wzięty z Reuleaux'a). W § 2 rozważa pole, opisanie

przez odcinek prostej, łączącej punkt M ze środkiem chwilowym P obrotu figury F i stosuje to rozważanie do wielokątów zamkniętych. W § 3, idąc za Darboux'em i Schumann'em, rozważa pola krzywych, obwiedzionych przez linie proste figury F , i wyprowadza odnoszące się tu twierdzenia Ribaconra i Darboux'a. W § 4 bierze pod uwagę układ krzywych algebraicznych o m parametrach i bada prawo zmienności pola lub łuku powłóczących tych linii krzywych w zależności od zmiany parametrów a_k lub od zmiany prawa ruchu figury F . W § 5, przechodząc do uogólnienia poprzednich wywodów na konfiguracje punktów, które podczas ruchu zmieniają się według pewnego prawa, np. według prawa przekształcenia rzutowego, wyprowadza wzory dla hodografów punktów figury F , poruszającej się z określoną w każdej chwili prędkością kątową. W § 6 rozważa figurę, biorącą równocześnie udział w dwóch ruchach posuwistych, gdy przy każdym z nich pole rulety punktu M ma wielkość inną; wyjaśnia to na przykładzie czworoboku stawowego $ABCD$, w którym boki AB , CD wykonywają jednocześnie około punktu A i D obroty całkowite. Kończy pracę twierdzenie Koenigsa, odnoszące się do przypadku, w którym krzywa (ρ) toczy się najprzód po jednej, potem zaś po drugiej stronie innej krzywej (π) .

S. D.

17. **Rudzki T.** *O objętościach brył, utworzonych ruchem przestrzennym figury niezmiennej.* Wiad. mat., 3, 215—248.

W artykule niniejszym podaje autor niektóre własności ruchów w przestrzeni, stanowiące niejako uogólnienie własności ruchów posuwistych na płaszczyźnie, rozważonych przezeń w pracy poprzedzającej.

Rozpoczyna (§ 1) od twierdzenia Koenigsa (Leçons de Cinématique, p. 437), stanowiącego uogólnienie znanego twierdzenia Pappusa-Guldina a wyrażającego objętość V , utworzoną obrotem powierzchni jakiegokolwiek S , ograniczonej krzywą zamkniętą C . Oblicza objętość bryły V_{AB} , opisanej przez trójkąt ABO , w którym AO i BO są wektorami, łączącymi dwa punkty figury danej A , B z punktem nieruchomym O (początkiem układu nieruchomego) i wyprowadza stąd związek pomiędzy objętościami brył opisanych przez pewną liczbę odcinków $\overline{A_k B_k}$ figury F , mianowicie związek liniowy $\sum \gamma_k V_{\overline{A_k B_k}} = 0$, w którym współczynniki γ_k są jedynie funkcjami wzajemnych odległości punktów A_k , B_k . Bada własności środka układu powierzchni stopnia 2-go, dających rozkład objętości, które odpowiadają rozmaitym poruszającym się punktom. Rozważa wartość pewnej całki, wyrażającej objętość V stożka, którego wierzchołek jest początkiem układu prostokątnego ruchomego, podstawę zaś stanowi część powierzchni, odniesionej do układu współrzędnych krzywoliniowych u , v . Przechodzi do ruchów przestrzennych, badanych przez Mannheim'a, gdzie położenia figury

ruchovej F są funkcjami dwóch parametrów niezależnych (u, v) , tak że każdy punkt podczas swego ruchu pozostaje wogóle na pewnej powierzchni, zwanej powierzchnią torową tego punktu. Podaje i roztrząsa wzór, podany przez Darboux'a na objętość stożka, którego podstawę tworzy część tej powierzchni torowej, wierzchołek zaś jest początkiem układu nieruchomego. Oblicza dla ruchów dwuparametrowych objętość W , zawartą pomiędzy pewną częścią torową danego punktu, ograniczającami ją normalnemi, oraz centrodyą (π) . Podaje niektóre zastosowania otrzymanych rezultatów do teorii krzywych płaskich. Wyprowadza związek, zachodzący pomiędzy objętościami, odpowiadającymi punktom prostej, poruszającej się jakimkolwiek sposobem względem układu nieruchomego. Przedstawia w krótkości rezultaty, otrzymane przy rozważaniu powierzchni powłóczonych przez płaszczyny figury F przy ruchu przestrzennym. *S. D.*

18. *Sochocki J.* O równaniach stopnia trzeciego. *Wiad. mat.*, 3, 119 — 137.

10. „ O równaniach stopnia trzeciego i czwartego. *Prace mat.-fiz.*, 10, 136—177.

Artykuł pierwszy stanowi wyjątek z rozprawy drugiej.

Dla równania stopnia trzeciego postaci $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$, po wprowadzeniu t. zw. modułu równania, określonego wzorem:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2,$$

oraz mnożnika:

$$\frac{1}{e_1 - e_3} = \lambda,$$

gdzie e_1, e_2, e_3 są pierwiastkami równania, ustanawia autor t. zw. równanie rozwiązujące modułowe stopnia 6-go, i wyraża pierwiastki równania danego za pomocą pierwiastków równania modułowego. W podobny sposób ustanawia równanie stopnia 6-go, którego pierwiastkami są wartości mnożnika λ , t. j. równanie rozwiązujące mnożnikowe i wyraża pierwiastki e_1, e_2, e_3 przez pierwiastki równania mnożnikowego. Następnie podaje szczegółowszemu badaniu zależność parametrów g_2, g_3 , wyróżnika $\Delta = g_3^3 - 27g_2^3$ i pierwiastków e_1, e_2, e_3 od modułu i mnożnika, uważanych za zmienne niezależne (jak to dzieje się w teorii funkcji eliptycznych), a mianowicie: określa znaki niezmienników pierwszego g_2 i drugiego g_3 w zależności od modułu i bada przebieg tych dwóch niezmienników, oraz t. zw. niezmiennika „bezwzględnego“ $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$, uważanych za funkcje ilości k^2 .

Równanie modułowe 6-go stopnia, przez wprowadzenie nowej rozwiązującej pomocniczej, przekształca na równanie stopnia 3-go postaci:

$$4z''' - 27Jz'' + 27J = 0$$

i wyprowadza związek pomiędzy odpowiednimi pierwiastkami równania danego i tego ostatniego.

Dla równania stopnia czwartego postaci:

$$T = p_0 t^4 + 4p_1 t^3 + 6p_2 t^2 + 4p_3 t + p_4 = 0$$

o pierwiastkach t_0, t_1, t_2, t_3 , autor, wzięwszy za punkt wyjścia rozwiązującą Lagrange'a:

$$z = t_0 t_3 + t_1 t_2,$$

idzie drogą, wskazaną przez Lagrange'a, przez wprowadzenie atoli niektórych zmian upraszcza skomplikowane w tej metodzie rachunki i doprowadza je do końca. W tym celu rozwiązującą z zastępuje rozwiązującą x , określoną wzorem $\frac{4}{p_0} x = \frac{2p_2}{p_0} - z$ i ze znanego równania stopnia trzeciego na z otrzymuje na wyznaczenie ilości x równanie stopnia 3-go postaci:

$$X = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0,$$

gdzie g_2 i g_3 są pewnymi wielomianami: pierwszy stopnia 2-go, drugi stopnia 3-go współczynników p równania danego. Moduł i mnożnik tego równania stopnia 3-go, uważane za funkcje pierwiastków t_0, t_1, \dots danego równania stopnia 4-go, nazywa modułem i mnożnikiem tego ostatniego. Łatwo okazać, że stosunek anharmoniczny czterech pierwiastków funkcji T równa się stosunkowi anharmonicznemu czterech pierwiastków funkcji $X = 0x^4 + 4x^3 - g_2x - g_3$, t. j. że funkcje $T(t)$ i $X(x)$ otrzymują się jedna z drugiej przez podstawienie liniowe postaci:

$$t = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Opierając się na pewnych, łatwych do sprawdzenia, związkach pomiędzy pochodnymi funkcji T , autor znajduje takie podstawienie:

$$t = t_0 + \frac{6T'(t_0)}{24x - T''(t_0)},$$

gdzie t_0 oznacza którykolwiek z pierwiastków pojedynczych równania $T=0$.

Przekształcenie to daje się zarazem zastosować do redukcji całki:

$$\int f(t, \sqrt{T(t)}) \frac{dt}{\sqrt{T}},$$

gdzie f oznacza funkcję wymierną. W dalszym ciągu badania, zakładając $p_0=1$ i wprowadzając nowe dwa parametry:

$$x_0 = p_1^2 - p_2, \quad y_0 = 2p_1^3 - 3p_1 p_2 + p_2$$

wyraża wszystkie cztery parametry x_0, y_0, g_2, g_3 przez pierwiastki równania danego, bada przebieg i własności krzywej stopnia 3-go:

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

którą nazywa rozwiązującą geometryczną danego równania $T(t) = 0$, i podaje nową prostą metodę przekształcenia całki eliptycznej:

$$\int f(\sqrt{T}) \frac{dt}{\sqrt{T}},$$

na całkę ze zmienną x :

$$\int F(x, \sqrt{X}) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

gdzie F jest również funkcją wymierną. Przechodząc na koniec do ogólnego rozwiązania równania stopnia czwartego, i oznaczając, jak zwykle, pierwiastki odpowiedniej rozwiązującej stopnia 3-go:

$$4x^3 - g_2 x - g_1 = 0$$

przez e_1, e_2, e_3 wyprowadza wzór ogólny postaci:

$$t = \sqrt{x_0 - e_1} + \sqrt{x_0 - e_2} + \sqrt{x_0 - e_3},$$

w którym dwa pierwiastniki mogą przyjmować znaki dowolne, a znak trzeciego określa się z warunku:

$$\sqrt{x_0 - e_1} \cdot \sqrt{x_0 - e_2} \cdot \sqrt{x_0 - e_3} = -\frac{1}{2} y_0.$$

Wreszcie roztrząsa zachodzące tu przypadki szczególne.

S. D.

20. **Vivanti G.** *O pojęciu pochodnej w teorii elementarnej funkcji analitycznych.* Przekład z „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo“ (1899). *Wiad. mat.*, **3**, str. 138—147.

Pochodną szeregu potęgowego, przedstawiającego funkcję analityczną $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, wprowadza autor na podstawie określenia jej przez szereg $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} z^i$ i wyprowadza stąd twierdzenia zasadnicze teorii pochodnych.

21. **Wierzbicki E.** *Odwzorowania nie zmieniające pól powierzchni, jako przykład do teorii niezmienników różniczkowych.* *Prace matem.-fizyczne*, **10**, str. 129—134.

W artykule tym za pomocą metody właściwej teorii niezmienników różniczkowych ciągłych grup przekształceń udowodnione są znane twierdzenia o takich odwzorowaniach dwóch powierzchni, że odpowiadające sobie nieskończenie małe pola są sobie równe. K. Ż.

22. **Żorawski H.** *Przyczynek do geometrii nieskończenie małych przekształceń.* *Rozpr. Ak. Um. w Krakowie*, **37**, str. 154—175.

W pracy tej autor zajmuje się pewnymi przypadkami zmienności funkcji przy punktowych przekształceniach płaszczyzny. Chodzi tu mianowicie o zmiany, którym podlegają funkcje zależne od x, y i $\frac{dy}{dx}$ przy przekształceniach grup jednoczesnych zmiennych x i y . Jeżeli $\frac{dy}{dx}$ należy do pewnej określonej rodziny linii krzywych, to każdą zmianę wartości uważanej funkcji można wyrazić w zależności tylko od współrzędnych x, y i parametru grupy t . Uważając różne przypadki takiej zmienności, autor zwraca przede wszystkim uwagę na zmienność, którą nazywa równomierną.

Niech uważana funkcja będzie $H\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, to:

$$(1) \quad \frac{\delta}{\delta t} H\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = v(x, y),$$

będzie pewnym równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu 1-go. Jeżeli temu równaniu (1) można uczynić zadość, biorąc:

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

i jeżeli (2) jest niezmiennem równaniem grupy, to H zmienia się wzdłuż rodziny (2) równomiernie z szybkością w . Jeżeli zaś równanie (1) jest niezmiennem, to równomierność taką autor nazywa doskonałą. Gdy H jest styczną kąta krzywych rodziny z torami grupy, autor przeprowadza rachunki, prowadzące do odróżnienia wszystkich przypadków równomierności doskonałej i ilustruje je przykładem z zakresu trwałego ruchu cieczy po prostych równoległych do osi x .
S. K.

23. **Żorawski K.** *O zbieżności szeregów odwracających.* Rozpr. Ak. Um, **37**, str. 139—153.

Szereg tak zwany odwrotny równania

$$(1) \quad f(z) = \zeta,$$

gdzie $f(z)$ jest funkcją analityczną, t. j. szereg:

$$(2) \quad z = z_{\zeta=\gamma} + \sum_1^{\infty} \frac{(\zeta-\gamma)^n}{n!} \left(\frac{d^n z}{d\zeta^n} \right)_{\zeta=\gamma}$$

można rozważać z dwojakiego punktu widzenia. Albo szereg taki określa element funkcji z jako funkcji zmiennej ζ w obszarze punktu γ , albo, gdy się w nim uważa $\zeta = \zeta_0$ za stałe a $\gamma = f(c)$ za zmienne, szereg:

$$(3) \quad z(c) = c + \sum_1^{\infty} \frac{[\zeta_0 - f(c)]^n}{n!} \left(\frac{d^n z}{d\zeta^n} \right)_{\zeta=c},$$

o ile jest zbieżny, określa pierwiastki równania $f(z) = \zeta_0$. Ta druga interpretacja stanowi główny przedmiot tej pracy. Idzie tu mianowicie o wyznaczenie obszarów zbieżności szeregu (3). Dla wszystkich wartości c takiego obszaru szereg przedstawia jeden i ten sam pierwiastek. Obszary te zbieżności oznacza autor naprzód na powierzchni Riemanna, należącej do funkcji $z(\zeta)$, a następnie odwzorowuje je na płaszczyznę z . (Gdy $f(z)$ jest wielomianem, obszary te są ograniczone stelloidami). Teoria powyższa jest objaśniona kilku przykładami.
S. K.

24. *Żorawski K.* *O pewnych prądach matematyki społecznej.* Wiadomości matem., t. 3, str. 48—53.

W artykule tym autor, zastanawiając się nad metodami matematyki, rozróżnia metody formalne i rzeczowe. Pierwsze odnoszą się do ogólnego podania działań i wzorów. rozwiązujących zagadnienie, drugie do badania możliwości rozwiązania i jego natury. W różnych działach matematyki, które autor przebiega w niewielu wyrazach, znajdujemy przewagę bądź jednej, bądź drugiej kategorii metod. S. K.

25. *Żorawski H.* *O działalności naukowej Sophusa Liego.* Wiadom. matem., 3. str. 85—119.

W treściwym wykładzie przedstawia autor życie i prace zmarłego niedawno matematyka Sophusa Liego. Z pośród różnorodnych dziedzin działalności tego wielkiego uczonego, autor omawia przedewszystkiem podstawowe pojęcia teorii przekształceń oraz metodę zastosowania tych pojęć do różnych zagadnień z innych działów matematyki. S. K.

(Dok. nast.).
