ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVIII (2002)

Grzegorz Karch (Wrocław)

# Szósty problem milenijny: istnienie i regularność rozwiązań układu Naviera–Stokesa

**1. Układ równań Naviera–Stokesa.** Klasyczne równania różniczkowe cząstkowe fizyki matematycznej, intensywnie badane na początku XIX wieku, dały podstawy naszej wiedzy o propagacji fal, przewodnictwie cieplnym, hydromechanice i innych problemach fizycznych. Ich badaniu poświęcało się wielu matematyków „czystych", co zaowocowało powstaniem nowych metod badawczych w matematyce „czystej". W rezultacie w wieku XX nastąpił ogromny rozwój teorii równań różniczkowych cząstkowych, a mimo to cały szereg fundamentalnych problemów dotyczących istnienia, jednoznaczności i asymptotycznego zachowania się rozwiązań pozostawał nierozwiązany.

Ruch turbulentny wody czy tworzenie się wirów są dwoma typowymi zjawiskami, których natura pozostaje daleka od zrozumienia. Matematycznie są one opisane układem równań Naviera–Stokesa ewolucji nieściśliwej cieczy, wypełniającej pewien obszar w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. Niewiadomymi w tym układzie $n+1$ równań różniczkowych cząstkowych są wektor prędkości cieczy $u(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))$ oraz skalarne ciśnienie cieczy $p(x,t)$ – obie wielkości zdefiniowane są w punkcie przestrzeni $x \in \mathbb{R}^n$ i w czasie $t \geqslant 0$. Układ Naviera–Stokesa dla cieczy nieściśliwej ma wówczas postać

$$u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = F \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{2}$$

który uzupełniony jest warunkiem początkowym

$$u(x,0) = u_0(x),$$

i odpowiednimi warunkami brzegowymi w przypadku, gdy badamy ten układ w obszarze różnym od całego $\mathbb{R}^n$. Dodatkowo, w równaniu (1), parametr $\nu > 0$ interpretuje się jako lepkość cieczy, a $F = (F_1(x,t), \dots, F_n(x,t))$ jest wektorem sił zewnętrznych oddziaływających na ciecz. Wyjaśnijmy jeszcze oznaczenia pojawiające się w równaniu (1):

$$u_t = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right), \qquad \Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$

$$u \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \qquad \nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right)$$

oraz dywergencja wektora $u$ w równaniu (2): $\nabla \cdot u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$.

Nie przytaczam fizycznych argumentów prowadzących do układu (1)–(2), zainteresowanego czytelnika odsyłam do książki Landaua i Lifschitza [18]. Przypomnę tylko, że równanie (1) wyraża II prawo ruchu Newtona dla elementu cieczy poruszającego się pod wpływem sił zewnętrznych oraz sił związanych z ciśnieniem i tarciem. Równanie (2) mówi, że ciecz jest nieściśliwa.

Jest wiele ważnych powodów, dla których układ Naviera–Stokesa, jak i inne tego typu problemy, były w centrum zainteresowań matematyków przez niemal dwa wieki. Równania te są bowiem dobrze zdefiniowanym obiektem matematycznym i stały się paradygmatem nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, natomiast ich rozwiązania opisują większość własności istotnie nieliniowych zjawisk.

W XIX wieku, aby wykazać istnienie rozwiązań zagadnień fizyki matematycznej, starano się znaleźć ich jawną postać, ale udawało się to tylko w szczególnych przypadkach. W szczególności znaleziono tylko bardzo specjalne rozwiązania układu (1)–(2); niestety, prawie żadne z nich nie odzwierciedla subtelnego nieliniowego charakteru tego układu.

Wiek XX przyniósł zupełnie inną strategię badań. Zamiast szukania jawnych wzorów dotyczących szczególnych przypadków, badano problem w całej jego ogólności. To nowoczesne podejście w równaniach różniczkowych wymaga, aby rozpocząć badanie danego zagadnienia (tzn. równania lub układu równań i dodatkowych warunków brzegowo-początkowych) od ustalenia, że jest to zagadnienie *dobrze postawione* w sensie Hadamarda w pewnej przestrzeni funkcyjnej $\mathcal{X}$, czyli że

- istnieje rozwiązanie tego zagadnienia należące do $\mathcal{X}$;
- jest to jedyne rozwiązanie należące do $\mathcal{X}$;
- rozwiązanie to zależy w sposób ciągły od warunków początkowych.

Taką najbardziej naturalną przestrzenią dla wektora prędkości $u$ wydaje się być

$$\mathcal{X} = [C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))]^n \tag{3}$$

(funkcje o wartościach wektorowych, w sposób ciągły dwukrotnie różniczkowalne względem $x$ i raz względem $t$), ponieważ wtedy wszystkie składniki w równaniach (1) i (2) mają sens klasyczny. Dotychczas nie udało się udowodnić istnienia takiego rozwiązania dla równań (1)–(2) rozważanych w przestrzeni trójwymiarowej – nawet dla bardzo regularnych warunków początkowych $u_0$ i sił zewnętrznych $F$. Fizyka i postać równań podpowiadają jeden z możliwych sposobów konstrukcji rozwiązania, czemu poświęcony jest następny rozdział.

**2. Równanie energii.** W dalszym ciągu będę ograniczał się tylko do zagadnienia Cauchy'ego dla układu (1)–(2), tzn. będę rozważał ciecz wypełniającą całą przestrzeń $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. Dodatkowo, aby uprościć prezentację wyników, będę zakładał, że wektor sił zewnętrznych jest równy zeru: $F \equiv 0$.

Dla danych dwóch wektorów $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ definiujemy iloczyn skalarny

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} [u_1(x)v_1(x) + \ldots + u_n(x)v_n(x)]\, dx$$

oraz normę $\|u\|_2 = \sqrt{(u, u)}$.

Załóżmy tymczasowo, że mamy regularne rozwiązanie układu (1)–(2) dążące dostatecznie szybko do zera, gdy $|x| \to \infty$. Mnożymy równanie (1) skalarnie przez $u$ i całkujemy

$$(u_t, u) - \nu(\Delta u, u) + (u \cdot \nabla u, u) + (\nabla p, u) = 0,$$

a następnie, opierając się na prostych rachunkach i całkowaniu przez części, otrzymujemy:

$$(u_t, u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2, \qquad -\nu(\Delta u, u) = \nu\|\nabla u(t)\|_2^2.$$

Pamiętając, że $u$ jest wektorem bezdywergencyjnym (tzn. spełniającym równanie (2)), dostajemy

$$\begin{aligned}(u \cdot \nabla u, u) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^{n} u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} u_k\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_k^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^{n} u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} u_j\, dx = 0 - (u \cdot \nabla u, u)\end{aligned}$$

oraz $(\nabla p, u) = -(p, \nabla \cdot u) = 0$. Podsumowując powyższe rachunki widzimy, że dostatecznie regularne rozwiązania układu (1)–(2) spełniają równość

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 + \nu\|\nabla u(t)\|_2^2 = 0$$

lub równoważną tożsamość całkową

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\, ds = \|u_0\|_2^2. \tag{4}$$

Dla każdego $t \geqslant 0$, wielkość $\|u(t)\|_2^2$ jest energią kinetyczną poruszającej się cieczy, z *równania energii* (4) wynika natychmiast, że energia ta maleje w czasie.

Równanie (4) jest najważniejszym oszacowaniem *a priori* rozwiązań układu (1)–(2), dlatego szuka się rozwiązania w takiej przestrzeni $\mathcal{X}$, aby jego energia była skończona i spełnione było równanie (4). Jeżeli będziemy traktować $u(x,t)$ jako funkcję zdefiniowaną na odcinku $[0,T]$ dla pewnego ustalonego $T>0$ o wartościach w $L^2(\mathbb{R}^n)^n$, to każdy składnik równania (4) jest dobrze zdefiniowany przy założeniach

$$u \in L^\infty([0,T], L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)^n) \quad \text{oraz} \quad \nabla u \in L^2([0,T], L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)^n).$$

Indeks $\sigma$ w oznaczeniu $L^2_\sigma$ mówi nam, że rozpatrujemy tylko te wektory z $L^2(\mathbb{R}^n)^n$, dla których równanie (2) jest spełnione (w sensie dystrybucyjnym). Prowadzi to natychmiast do definicji przestrzeni

$$\mathcal{X}_T = L^\infty([0,T], L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)^n) \cap L^2([0,T], W^{1,2}_\sigma(\mathbb{R}^n)^n), \tag{5}$$

gdzie $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń Sobolewa złożoną z tych funkcji z $L^2(\mathbb{R}^n)$ dla których pierwsze pochodne istnieją w sensie dystrybucyjnym oraz są całkowalne z kwadratem. Wybór takiej przestrzeni wydaje się właściwy, co potwierdza Twierdzenie Leraya.

Twierdzenie 1 (J. Leray [20]). *Niech $n=3$ oraz niech $\mathcal{X}_T$ oznacza przestrzeń zdefiniowaną w (5). Dla każdego $T>0$ i dla każdego $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)^3$ istnieje rozwiązanie układu (1)–(2), $u \in \mathcal{X}_T$, które dodatkowo spełnia nierówność energetyczną*

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\, ds \leqslant \|u_0\|_2^2, \tag{6}$$

*oraz warunek początkowy w tym sensie, że*

$$\lim_{t\to 0} \|u(t)-u_0\|_2 = 0.$$

Zauważmy, że twierdzenie to nic nie mówi o różniczkowalności (w sensie klasycznym) rozwiązania, dlatego że $u(x,t)$ spełnia układ (1)–(2) w sensie uogólnionym (dystrybucyjnym). Ponadto w Twierdzeniu 1 jest mowa tylko o wektorze prędkości i nie wspomina się o ciśnieniu. Mając jednak wektor $u(x,t)$, możemy wyliczyć $p(x,t)$ z równania

$$\Delta p = \nabla \cdot (u \cdot \nabla u),$$

które otrzymuje się przez zastosowanie operatora dywergencji $\nabla\cdot$ do układu równań (1) i skorzystaniu z równania (2). Warto podkreślić, że dotychczas nie wiadomo czy każde rozwiązanie skonstruowane przez Leraya spełnia nie tylko nierówność (6) ale i równanie energii (4). Chciałbym też zaznaczyć, że analogiczne twierdzenie dla cieczy opisanej układem równań Naviera–Stokesa w trójwymiarowym obszarze ograniczonym zostało udowodnione przez E. Hopfa w 1951 (zob. [13]) w oparciu o piękne zastosowanie metod analizy fourierowskiej.

Następcy Leraya i Hopfa usilnie starali się poprawić ten wynik i uzyskać przy dodatkowych założeniach regularności istnienie klasycznych (tzn. klasy $C^{2,1}$) rozwiązań układu (1)–(2), które dodatkowo byłyby jedyne i stabilne ze względu na warunki początkowe. Udało się to w przypadku dwuwymiarowym (tzn. $x \in \mathbb{R}^2$), który został całkowicie rozwiązany (zob. [22]); wiadomo wówczas, że dla każdego warunku początkowego $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)^2$ istnieje *dokładnie jedno* rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{X}_T$ zdefiniowanej wzorem (5) dla $n = 2$. Jest ono regularne, stabilne ze względu na zaburzenia warunków początkowych i spełnia równanie energii (4). Natomiast w przypadku trójwymiarowym, najbardziej interesującym z fizycznego punktu widzenia, większość fundamentalnych pytań pozostaje nadal bez odpowiedzi.

Pytanie o jednoznaczność. Czy rozwiązanie Leray'a skonstruowane w Twierdzeniu 1 jest jedyne w przestrzeni $\mathcal{X}_T$?

Mimo że Twierdzenie 1 zostało udowodnione prawie 70 lat temu, odpowiedź na to pytanie nie jest znana. Udało się natomiast udowodnić pewne warunkowe twierdzenia mówiące, że jeżeli zakładamy *a priori* pewną dodatkową regularność rozwiązań, to wówczas są one jedyne w przestrzeni $\mathcal{X}_T$. Pierwszym z takich wyników jest Twierdzenie Serrina.

Twierdzenie 2 (J. Serrin [26]). *Załóżmy, że rozwiązanie $u(x,t)$ skonstruowane w Twierdzeniu* 1 *spełnia dodatkowy warunek $u \in L^s((0,T), L^r(\mathbb{R}^3)^3)$ dla pewnych $s$ i $r$ takich, że $\frac{2}{s} + \frac{3}{r} \leqslant 1$ i $3 < r \leqslant \infty$. Wówczas $u$ jest jedynym rozwiązaniem w przestrzeni $\mathcal{X}_T$ oraz $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$, a więc $u$ jest rozwiązaniem klasycznym.*

Twierdzenie to sugeruje kolejne pytania, na które odpowiedzi są także nieznane.

Pytania o regularność. Czy rozwiązania Leraya spełniają założenia z Twierdzenia Serrina? Czy rozwiązania z Twierdzenia 1 są klasyczne, tzn. czy należą do $C^{2,1}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$ dla każdego $T > 0$?

Już w swojej pracy [20] z 1934 roku, J. Leray udowodnił, że dla każdego warunku początkowego $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)^3$ można znaleźć $T_0 > 0$ takie, że rozwiązanie $u(x,t)$ otrzymane w Twiedzeniu 1 jest regularne na odcinku $[0, T_0)$ i jedyne w przestrzeni $\mathcal{X}_{T_0}$. Pytanie, czy można otrzymać $T_0 = +\infty$, pozostaje otwarte. Odpowiedź na nie wydaje się być kluczowa dla zrozumienia fizycznych własności modelu, gdyż regularne rozwiązanie na pewnym skończonym odcinku czasu można by interpretować jako tzw. ruch laminarny cieczy, a ewentualne osobliwości rozwiązań pojawiające się w chwili $T_0$ jako powstanie turbulencji.

Jedną z najważniejszych prac, w których próbuje się zrozumieć naturę osobliwości słabych rozwiązań z Twierdzenia 1, jest praca [1]. Caffarelli, Kohn i Nirenberg udowodnili w niej, że ewentualne osobliwości rozwiązań mogą pojawiać się tylko na małych zbiorach w tym sensie, że ich jednowymiarowa miara Hausdorffa jest równa zeru:

$$\mathcal{H}^1(\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) : \text{„}u \text{ jest osobliwe w punkcie } (x,t)\text{”}\}) = 0.$$

Rozumowanie prowadzące do tego wyniku wymaga zastosowania bardzo zaawansowanych metod z nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Mimo, że pewne uproszczenie dowodu pojawiło się ostatnio w pracy [21], ciągle nie wiadomo, czy zbiór, którego miarę szacuje się, nie jest pusty.

Leray zaproponował metodę konstrukcji rozwiązań z osobliwościami, gdyż podany przez niego dowód Twierdzenia 1 sugerował, że takie rozwiązania mogłyby wyglądać następująco:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{T_0 - t}}\right). \tag{7}$$

Podstawiając $u(x,t)$ zdefiniowane w (7) do układu (1)–(2), Leray otrzymał nieliniowy układ równań eliptycznych z niewiadomą funkcją $V(X) = (V_1(X), V_2(X), V_3(X))$, dla którego jednak nie potrafił udowodnić istnienia rozwiązań.

Pytanie Leraya o istnienie wektora $V(x)$ znalazło odpowiedź dopiero niedawno w pracy [25]. Nečas, Roužička i Šverák udowodnili, że jedynym rozwiązaniem układu (1)–(2) postaci (7) spełniającym nierówność energetyczną (6) jest $u(x,t) \equiv 0$. Wynik ten nie wyklucza oczywiście możliwości istnienia rozwiązań z innego typu osobliwościami.

Opisane w tym rozdziale wyniki stanowią niewielką część ogromnej wiedzy, która rozwinęła się wokół układu Naviera–Stokesa, natomiast sformułowane pytania należałoby uzupełnić wieloma innymi dotyczącymi natury rozwiązań tego układu. Więcej informacji oraz dodatkową bibliografię na ten temat można znaleźć w monografiach Constantina i Foiaşa [8], Galdiego [11], Ladyzhenskiej [17], J.-L. Lionsa [22], P.-L. Lionsa [23], Temama [27], von Wahla [29]. Godne polecenia są też przeglądowe artykuły [7], [9], [12], [24], [28], [30].

**3. Inna przestrzeń $\mathcal{X}$.** Matematycy zajmujący się trójwymiarowym układem równań Naviera–Stokesa zastanawiają się już od kilkudziesięciu lat, gdzie tkwi trudność tego, że nie można udowodnić jednoznaczności i regularności rozwiązań skonstruowanych przez Leraya w przestrzeni $\mathcal{X}_T$. Jedna z hipotez sugeruje, że być może próbuje się udowodnić dobre postawienie (w sensie Hadamarda) tego problemu w zbyt dużej przestrzeni. Nowe badania w tym kierunku zapoczątkowali Kato i Fujita (zob. [10], [16]) proponując inną niż Leray metodę konstrukcji rozwiązań układu (1)–(2). Aby opisać te pomysły zdefiniujmy najpierw *projektor Leraya*, tj. rzut ortogonalny na podprzestrzeń wektorów bezdywergencyjnych $\mathbb{P} : L^2(\mathbb{R}^3)^3 \to L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)^3$, dany wzorem

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - R_1(\kappa) \\ u_2 - R_2(\kappa) \\ u_3 - R_3(\kappa) \end{pmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \kappa = R_1u_1 + R_2u_2 + R_3u_3.$$

W definicji $\mathbb{P}$ pojawiają się transformaty Riesza, czyli operatory pseudoróżniczkowe zadane przy pomocy transformaty Fouriera wzorami:

$$R_j = -i\partial_{x_j}(-\Delta)^{-1/2} \quad \text{czyli} \quad (\widehat{R_j f})(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi).$$

Dobrze znane techniki analizy harmonicznej zapewniają, że operatory Riesza są ograniczone na przestrzeniach $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, dlatego też projektor Leraya jest dobrze zdefiniowany jako rzut $\mathbb{P} : L^p(\mathbb{R}^3)^3 \to L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)^3$ dla wszystkich $1 < p < \infty$.

Zauważmy dalej, że dzięki bezdywergencyjności wektora $u(x,t)$, tzn. $\nabla \cdot u = 0$, możemy zapisać nieliniowy składnik w równaniu (1) jako

$$((u\cdot\nabla)u)_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_k) = (\nabla\cdot(u\otimes u))_k.$$

Ta uwaga jest kluczowa przy badaniu mało regularnych rozwiązań, ponieważ iloczyn dwóch dystrybucji nie zawsze jest dobrze zdefiniowany, ale z drugiej strony zawsze można obliczyć pochodną (w sensie dystrybucyjnym) funkcji lokalnie całkowalnej. Zatem założenie $u \in L^2_{\mathrm{loc}}$ wystarcza, aby kwadratowy składnik $\nabla\cdot(u\otimes u)$ w równaniu (1) miał sens.

Kolejny krok, to zrzutowanie przy pomocy operatora $\mathbb{P}$ układu (1)–(2) na przestrzeń bezdywergencyjnych pól wektorowych. Wiemy już, że dla każdego $u$ spełniającego $\nabla\cdot u = 0$ zachodzi $(\nabla p, u) = 0$, co jest równoważne temu, że $\mathbb{P}(\nabla p) = 0$, a więc po zastosowaniu $\mathbb{P}$ do układu (1)–(2) przeformułujemy go do nowego zagadnienia

$$u_t - \nu\Delta u + \nabla\mathbb{P}(u\otimes u) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{8}$$

Dalej, wzorując się na metodzie rozwiązywania liniowych niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych (czyli metodzie uzmienniania stałych), otrzymujemy (chwilowo nie dbając o uzasadnienie możliwości wykonania przekształceń) nieliniowe równanie całkowe

$$u(t) = S(\nu t)u_0 - \int_0^t \nabla\mathbb{P}S(\nu(t-\tau))\cdot(u(\tau)\otimes u(\tau))\,d\tau. \tag{9}$$

W równaniu tym $S(t)$ jest półgrupą ciepła zdefiniowaną następująco

$$S(t)f = p(\cdot,t) * f, \quad \text{gdzie} \quad p(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)$$

jest jądrem Gaussa–Weierstrassa.

Kluczowe tutaj jest twierdzenie mówiące, że rozwiązanie równania całkowego (9) istnieje na pewnym odcinku czasu.

Twierdzenie 3 (Kato–Fujita [16]). *Niech* $p$, $3 < p < \infty$, *będzie ustalone. Dla każdego warunku początkowego* $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)^3$ *istnieje* $T = T(u_0) > 0$ *oraz dokładnie jedna funkcja*

$$u \in \mathcal{X}^p_T = C([0,T); L^p_\sigma(\mathbb{R}^3)^3)$$

*będąca rozwiązaniem równania całkowego* (9). *Ponadto dowodzi się, że* $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$ *oraz spełnione jest równanie* (1).

Jednoznaczność rozwiązań uzyskanych przez Kato i Fujitę wynika z samej konstrukcji opartej na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym, ponieważ operator zdefiniowany przez prawą stronę równania (9) jest zwężający na pewnym podzbiorze przestrzeni $\mathcal{X}^p_T$ dla dostatecznie małych $T > 0$. Pojawia się zatem kolejne otwarte pytanie.

Pytanie o istnienie. Czy rozwiązanie Kato-Fujity istnieje dla wszystkich $T > 0$?

Istnieje pewna modyfikacja wyników Twierdzenia 3 zaproponowana przez Kato [15] i mówiąca, że dla dostatecznie małych warunków początkowych w sensie normy $L^3(\mathbb{R}^3)^3$ rozwiązania równania całkowego (9) istnieją dla wszystkich $t \geqslant 0$. W dalszym ciągu jednak nie wiadomo, czy dowolny regularny, ale niekoniecznie mały warunek początkowy prowadzi do globalnego w czasie rozwiązania. Czytelnika zainteresowanego uogólnieniami tych wyników odsyłamy do książki i prac Cannone [2]–[6], przeglądowej pracy Meyera [24], obszernej i trudnej książki Lemarié-Rieusseta [19], jak również do pracy [14], gdzie stosuje się opisane powyżej pomysły do bardzo ogólnych nieliniowych równań parabolicznych.

**4. Konkluzja.** W 1994 roku, Jean Leray podsumował swoje poglądy na temat układu równań Naviera–Stokesa w następujący sposób:

> [...] Ruch cieczy, początkowo regularny, pozostaje regularny na pewnym odcinku czasu i dalej trwa nieprzerwanie; czy jednak nadal będzie regularny i dobrze określony? Nie wiem, jaka jest odpowiedź na oba te pytania. A zostały one postawione już 60 lat temu w odniesieniu do bardzo szczególnego przypadku [20]. Poproszony o radę H. Lebesgue stanowczo oświadczył: „Nie poświęcaj za wiele czasu tak niewdzięcznemu pytaniu. Zajmij się czym innym!"

Na szczęście punktu widzenia Lebesgue'a nie podzielali inni matematycy i badania własności rozwiązań układu (1)–(2) (mimo braku odpowiedzi na fundamentalne pytania) przyczyniły się do ogromnego rozwoju wiedzy na temat równań różniczkowych cząstkowych w ogóle.

Chciałbym podsumować niniejszy artykuł wracając do sformułowania szóstego problemu milenijnego. W materiałach opublikowanych przez CMI znajduje się stwierdzenie, że jako rozwiązanie tego problemu oczekuje się istotnego rozwoju metod matematycznych, pozwalających zrozumieć rolę układu Naviera–Stokesa w opisie ruchu wirowego, turbulencji itd. Nie jest przy tym jasne, czy dowód jednoznaczności rozwiązań Leraya, jak również czy dowód globalnego istnienia rozwiązań Kato–Fujity, wyjaśniałby w jakikolwiek sposób ruch cieczy nieściśliwej. Niemniej jednak układ Naviera–Stokesa pozostaje kamieniem probierczym wielu nowych metod w teorii nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych.

## Literatura


[1] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–837.

[2] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier–Stokes*, Diderot Editeur, Paris, 1995.

[3] M. Cannone, *A generalisation of a theorem by Kato on Navier–Stokes equations*, Rev. Mat. Iberoamericana 13 (1997), 515–541.

[4] M. Cannone, *Nombres de Reynolds, stabilité et Navier–Stokes*, w: Evolution Equations: Existence and Singularities, Banach Center Publ. 52, Inst. Math. Polish Acad. Sci., Warszawa, 2000, 29–59.

[5] M. Cannone, Y. Meyer, *Littlewood–Paley decomposition and the Navier–Stokes equations*, Meth. Appl. Anal. 2 (1995), 307–319.

[6] M. Cannone, F. Planchon, *Self-similar solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^n$*, Comm. Partial Differential Equations 21 (1996), 179–193.

[7] P. Constantin, *A few results and open problems regarding incompressible fluids*, Notices Amer. Math. Soc. 42, no. 6, 658–663.

[8] P. Constantin, C. Foiaş, *Navier–Stokes Equations*, Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago, 1988.

[9] C. Foiaş, *What do the Navier–Stokes equations tell us about turbulence?*, w: Contemp. Math. 208, Amer. Math. Soc., 1997, 151–180.

[10] H. Fujita, T. Kato, *On the Navier–Stokes initial value problem I*, Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964), 269–315.

[11] G. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations*, 2 tomy, Springer, New York, 1994.

[12] J. G. Heywood, *Remarks on the possible global regularity of solutions of the three-dimensional Navier–Stokes equations*, w: Progress in Theoretical and Computational Fluid Mechanics (Paseky, 1993), Pitman Res. Notes Math. Ser. 308, 1994, 1–32.

[13] E. Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr. 4 (1951), 213–231.

[14] G. Karch, *Scaling in nonlinear parabolic equations*, J. Math. Anal. Appl. 234 (1999), 534–558.

[15] T. Kato, *Strong $L^p$ solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions*, Math. Z. 187 (1984), 471–480.

[16] T. Kato, H. Fujita, *On the non-stationary Navier–Stokes system*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 32 (1962), 243–260.

[17] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, II wydanie, Gordon and Breach, New York, 1969.
[18] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Hydrodynamika*, PWN, Warszawa, 1994.
[19] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Recent Developments in the Navier–Stokes Problem*, Chapman & Hall, CRC Press, 2002.
[20] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. 63 (1934), 193–248.
[21] F.-H. Lin, *A new proof of the Caffarelli–Kohn–Nirenberg theorem*, Comm. Pure Appl. Math. 51 (1998), 240–257.
[22] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
[23] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, tom I, 1996, tom II, 1998.
[24] Y. Meyer, *Wavelets, paraproducts and Navier–Stokes equations*, w: Current Developments in Mathematics 1996, International Press, Cambridge, MA, 1999, 105–212.
[25] J. Nečas, M. Roužička, V. Šverák, *On Leray self-similar solutions of the Navier–Stokes equations*, Acta Math. 176 (1996), no. 2, 283–294.
[26] J. Serrin, *The initial value problem for the Navier–Stokes equations*, w: Nonlinear Problems, R. E. Langer (red.), Univ. of Wisconsin Press, Madison, WI, 1963, 69–98.
[27] R. Temam, *Navier–Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
[28] R. Temam, *Some developments on Navier–Stokes equations in the second half of the 20th century*, w: Development of Mathematics 1950–2000, J.-P. Pier (red.), 2000.
[29] W. von Wahl, *The Equations of Navier–Stokes and Abstract Parabolic Equations*, Aspekte der Mathematik, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1985.
[30] M. Wiegner, *The Navier–Stokes equations—a neverending challenge?*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein 101 (1999), 1–25.