ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVII (2001)

Jerzy Mioduszewski (Katowice)

Zenon Waraszkiewicz

Zenon Waraszkiewicz jest zagadką polskiej topologii międzywojennej. Wykształcony na Uniwersytecie Warszawskim, pierwszą swoją pracę (1929), będąc jeszcze studentem, poświęcił szeregom trygonometrycznym. Praca, przedstawiona przez Wacława Sierpińskiego w *Sprawozdaniach* Akademii w Krakowie, zawierała wzmocnienie ogólnie znanego obecnie twierdzenia Zygmunda (z tego samego 1929 roku), według którego, jeśli f jest funkcją okresową o wahaniu skończonym, spełniającą warunek Lipschitza ze współczynnikiem $\alpha > 0$, to jej szereg Fouriera jest absolutnie zbieżny ([1]).

Topologią zainteresował się Waraszkiewicz, jak można wywnioskować z tematyki i charakteru późniejszych jego prac, pod wpływem Wacława Sierpińskiego i Stefana Mazurkiewicza. Cztery prace napisane w latach 1932–1934 zapewniły mu niekwestionowane miejsce w seminarium topologicznym prowadzonym pod patronatem Mazurkiewicza przez ówczesnego docenta Bronisława Knastera. Było to seminarium, przez które przewinęli się niemal wszyscy znani matematycy warszawscy – niekoniecznie o orientacji mnogościowej. Notatki z tego seminarium przetrwały ([2])). Pierwszy wpis Waraszkiewicza ma datę 16. X. 29. W roku 1934 podpis Waraszkiewicza figuruje na czołowych miejscach, tuż obok podpisu Karola Borsuka, pod podpisami Stefana Mazurkiewicza i Bronisława Knastera.

Pierwszym wynikiem Waraszkiewicza (1932), który zwrócił na niego uwagę, była konstrukcja nieprzeliczalnie wielu kontinuów płaskich, nie będących obrazami ciągłymi jeden drugiego. Porównywanie zbiorów przez możliwość odwzorowań ciągłych jednych na drugie było w kręgu zainteresowań Sierpińskiego i prowadziło do wyodrębnienia pojęcia *typu ciągłości.* Również N. Aronszajn w tym samym roku (1932) był autorem tego rodzaju konstrukcji. Znalezienie nieprzeliczalnie wielu typów ciągłości (w istocie było ich continuum) wśród kontinuów okazało się trudne. Nie było pod ręką tylu przykładów kontinuów co teraz i konstrukcję trzeba było robić na ziemi niczyjej. W następnej pracy (1933) Waraszkiewicz znalazł inną konstrukcję, bardziej przejrzystą, w postaci słynnych później *spiral Waraszkiewicza.* To pozwoliło mu w następnym roku na rozstrzygnięcie znanego problemu Hahna przez wykazanie (1934), że nie istnieje kontinuum metryczne,

([1]) Komentarz do twierdzenia Waraszkiewicza, napisany przed wieloma laty przez Stanisława Hartmana na prośbę autora tego artykułu, zamieszczony jest poniżej.

([2]) Przechowuje je obecnie prof. J. J. Charatonik.

z którego można by dostać wszystkie wspomniane spirale jako obrazy ciągłe. Twierdzenie to pamięta się przeważnie w postaci wniosku o nieistnieniu *wspólnego modelu* dla kontinuów metrycznych. Kontrastuje to ze znanym twierdzeniem Hahna, według którego dla kontinuów lokalnie spójnych wspólny model istnieje i jest nim odcinek prostej rzeczywistej.

W roku 1936 Waraszkiewicz habilituje się, a treść rozprawy ogłasza w *Wiadomościach Matematycznych* w pracy pod tytułem „O pokrewieństwie kontynuów". Treść tej pracy jest mało znana nawet specjalistom z teorii kontinuów. Nie wspomina o niej J. J. Charatonik w swoim obszernym przeglądzie (1998). Jest trudno czytelna. Mogą być w niej rzeczy wątpliwe, ale jeśli nawet, są to rzeczy o dużym znaczeniu.

Przez kontinuum *pokrewne z odcinkiem* rozumie Waraszkiewicz kontinuum, które dla każdego $\varepsilon > 0$ odwzorowuje się w sposób ciągły na odcinek za pomocą tzw. ε-odwzorowania, tj. odwzorowania ciągłego nie utożsamiającego punktów będących w odległości większej niż ε. Waraszkiewicz dowodzi, że kontinua pokrewne z odcinkiem są płaskie i są nieprzywiedlne między dwoma punktami.

Jest w tej pracy podane kryterium na istnienie wspólnego modelu dla rodzin kontinuów. Waraszkiewicz w oparciu o to kryterium stwierdza, że kontinua pokrewne z odcinkiem mają wspólny model wśród kontinuów. Jak obecnie wiadomo, tym wspólnym modelem jest (znane Waraszkiewiczowi) kontinuum dziedzicznie nierozkładalne Knastera, które jest – co nietrudno widzieć z konstrukcji – pokrewne odcinkowi. Ale twierdzenie Waraszkiewicza ma charakter ściśle egzystencjalny i nie wskazuje konkretnego przykładu.

Pojęcie pokrewieństwa zawdzięczał Waraszkiewicz, jak o tym sam pisał, P. S. Aleksandrowowi z jego znanej pracy z *Mathematische Annalen* (1929).

Pokrewieństwo z odcinkiem pojawiło się w latach powojennych w innej formie u R. H. Binga (1951), który rozważał kontinua nazywane *łańcuchowymi.* W ich opisie Bing posłużył się ciągami pokryć w postaci łańcuchów, tj. odcinków w znaczeniu kombinatorycznym.

Dobrze wiadomo, poprzez znane twierdzenia ogólne, że opis ten jest równoważny z opisem Waraszkiewicza poprzez ε-odwzorowania. Nie cytuje się Waraszkewicza jako prekursora kontinuów łańcuchowych, a powinno się, chociażby z powodu już wspomnianych twierdzeń o spłaszczalności i nieprzewidywalności, i to niezależnie od wartości ich dowodów. Twierdzenia te były dowiedzione w późniejszych latach przez Binga i Sorgenfreya, którzy nie czytali zapewne napisanej po polsku rozprawy. Upoważnia do upomnienia się o Waraszkiewicza jeszcze twierdzenie o kontinuach łańcuchowych, które chociaż okazało się fałszywe, było trudno sprawdzalną hipotezą. Waraszkiewicz twierdził (1937), że kontinua metryczne atriodyczne nie rozcinające płaszczyzny są łańcuchowe. Błąd zauważony był dość późno, bo w roku 1974, przez W. T. Ingrama.

W ujęciu Waraszkiewicza niemal natychmiastowy jest dowód własności punktu stałego dla kontinuów łańcuchowych, co było przedmiotem kilku prac robionych po wojnie. W pewnym miejscu rozprawy Waraszkiewicz dowodzi istotnej części twierdzenia, znanego jako twierdzenie o uniformizacji, w pełni sformułowanego i dowiedzionego przez T. Hommę (1952). Interesujący jest fragment, w którym Waraszkiewicz pisze o kontinuach, które nazywa *torami*, a których przypadkami szczególnymi są solenoidy.

W roku 1937 Waraszkiewicz ogłosił w paryskich *Comptes Rendus* twierdzenie, według którego okrąg miałby być jedynym kontinuum płaskim jednorodnym. Odpowiadał w ten sposób na dawny problem Mazurkiewicza, który dowiódł (1924) tego twierdzenia w zakresie kontinuów (płaskich) lokalnie spójnych. Błąd w pracy paryskiej (szczegółowe dowody nie są w *CR* przewidziane) był od razu na wstępie, kiedy Waraszkiewicz wyeliminował, jako alternatywne rozwiązanie, kontinua nie zawierające łuków. Jedynym spośród znanych wtedy kontinuów bez łuków było kontinuum nieprzywiedlne Janiszewskiego (1912), które jako rozwarstwione nie mogło być rzeczywiście brane pod uwagę. Drugim było kontinuum dziedzicznie nierozkładalne Knastera (1922). Przy założeniu, że kontinuum płaskie ma łuki, jedynym jednorodnym wśród nich jest rzeczywiście – jak pokazał później Bing (1960) – już tylko okrąg. Czy szkic dowodu, który przedstawił Waraszkiewicz w *CR* paryskich, ma wartość i jaką, trudno z tego szkicu rozstrzygnąć.

Jak pokazał Bing (1948), właśnie to odrzucone przez Waraszkiewicza kontinuum dziedzicznie nierozkładalne Knastera okazało się jednorodne. Trudno się oprzeć wrażeniu, że błąd Waraszkiewicza był jednym z tych błędów, które nazywa się twórczymi.

Niezaprzeczalnie trwałą wartość zachowały prace Waraszkiewicza poświęcone rodzinom kontinuów nieporównywalnych przez obrazy ciągłe i problemowi istnienia wspólnego modelu. Inspirowały one badania w zakresie kontinuów przez długie lata, pozostając w świadomości matematyków do dzisiaj. Powołuje się na nie J. T. Rogers (1970), D. P. Bellamy (1971), W. T. Ingram (1974), R. L. Russo (1979), M. M. Awartani (1993), J. Krasinkiewicz i P. Minc (1976), P. D. Roberson (1988). Omówienie tego kręgu zagadnień można znaleźć na str. 739–741 wspomnianego już artykułu J. J. Charatonika. Tak duża ilość cytowań i nawiązań do tych kilku prac Waraszkiewicza z lat 1932–1934 i ilość wartościowych publikacji, wzbogacających również polskie czasopisma, jest zjawiskiem rzadko spotykanym w matematyce.

Waraszkiewicz po habilitacji wykłada na Politechnice Warszawskiej. Jego zainteresowania topologią nie słabną, ale pracuje sam. Od roku 1936 jego nazwisko nie pojawia się na seminarium Knastera. Jest ceniony przez Sierpińskiego, co ma potwierdzenie w nocie do jednej z prac. Często przedstawia swoje prace na posiedzeniach Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Anonsuje twierdzenie o punkcie stałym dla dendrytów, ale widać już nową problematykę – teorię Bohra funkcji prawie okresowych, która łączy się Waraszkiewiczowi z przebiegiem taśm określających kontinua pokrewne z odcinkiem.

Seminarium Knastera, któremu patronuje Mazurkiewicz, prowadzone jest bez przerwy aż do wybuchu wojny nadal z dużym powodzeniem. W roku 1934 dołącza przybyły ze Lwowa po kilkuletniej przerwie Kazimierz Kuratowski. Nie wiemy dokładnie, jakie jest miejsce Zenona Waraszkiewicza w tej konstelacji matematycznej ostatnich warszawskich lat.

Po wojnie Zenon Waraszkiewicz zamieszkuje w Łodzi, angażując się w organizację życia matematycznego. Pamiętał go z tego okresu późniejszy profesor Politechniki Łódzkiej, a wtedy asystent, Lech Włodarski. Widział w nim człowieka czynu, wielce życzliwego młodszym kolegom i wielkiego entuzjastę przyszłego nowego środowiska matematycznego. Jeszcze raz nazwisko Zenona Waraszkiewicza pojawia się w sprawozdaniach z posiedzeń naukowych Towarzystwa. Ukazuje się jeszcze jedna jego praca.

Prace Zenona Waraszkiewicza

[1] *Uwaga o pewnym twierdzeniu p. Zygmunda* (Remarque sur un théorème de M. Zygmund), C. R. Cracovie (1929), 275–279.

[2] *Une famille indénombrable des continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre*, Fund. Math. 18 (1932), 118–137.

[3] *Sur une famille des types de continuité qui remplit un intervalle*, Fund. Math. 18 (1932), 309–311.

[4] *Sur un problème de M. H. Hahn*, Fund. Math. 22 (1934), 180–205.

[5] *Sur quelques invariants des transformations continues*, Fund. Math. 23 (1934), 172–178.

[6] *O pokrewieństwie kontynuów*, Wiadom. Mat. 43 (1936), 1–57.

[7] *Sur les courbes planes topologiquement homogènes*, C. R. Paris 204 (1937), 1388–1390.

[8] *Sur les courbes ε-deformables en arcs simples*, Fund. Math. 32 (1939), 103–114.

[9] *Sur les fonctions définies par équations fonctionnelles* $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2f(x)f(y)}{(f(x)+f(y))}$ *et* $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ *où* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, C. R. Soc. Polon. Math., Cracovie, 41 (1947), 237.

Prace wymienione w tekście

P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen*, Math. Ann. 30 (1928–1929), 101–187.

N. Aronszajn, *Sur les invariants des transformations continues d'ensembles*, Fund. Math. 19 (1932), 92–142.

M. M. Awartani, *An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 239–245.

D. Bellamy, *An uncountable collection of chainable continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 297–304.

D. Bellamy, *Mappings of indecomposable continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 179–180.

R. H. Bing, *A homogeneous indecomposable plane continuum*, Duke Math. J. 15 (1948), 729–742.

R. H. Bing, *Snake-like continua*, Duke Math. J. 18 (1951), 653–663.

R. H. Bing, *A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc*, Canad. J. Math. 12 (1960), 209–230.

J. J. Charatonik, *History of Continuum Theory*, w książce: C. E. Aull and R. Lowen (eds.), *Handbook of the History of General Topology*, Vol. 2, Kluwer Academic Publishers, 1998, 703–786.

T. Homma, *A theorem on contiuous functions*, Kodai Math. Sem. Rep. 1 (1952), 13–16.

W. T. Ingram, *An uncountable collection of mutually exclusive planar atriodic tree-like continua*, Fund. Math. 85 (1974), 73–78.

Z. Janiszewski, Cambridge 1912 (odczyt na Kongresie).

B. Knaster, *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, Fund. Math. 3 (1922), 247–286.

J. Krasinkiewicz, P. Minc, *Nonexistence of universal continua for certain classes of curves*, Bull. Acad. Polon. Sci. 24 (1976), 733–741.

S. Mazurkiewicz, *Sur les continus homogènes*, Fund. Math. 5 (1924), 137–146.

J. T. Rogers, *Pseudo-circles and universal circularly chainable continua*, Illinois J. Math. 14 (1970), 222–237.

P. D. Roberson, *An uncountable collection of Case–Chamberlin type continua with no model*, Glas. Mat. 23 (43) (1988), 169–192.

R. L. Russo, *Universal continua*, Fund. Math. 105 (1979), 41–60.

A. Zygmund, *Sur la convergence absolue des séries de Fourier*, Trans. Amer. Math. Soc. 3 (1928), 194–196.