ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXIX (2003)

Izabela Bondecka-Krzykowska (Poznań)

Strukturalizm w filozofii matematyki*

Poniższy artykuł jest próbą prezentacji koncepcji strukturalistycznych w filozofii matematyki, poczynając od prekursorów tych koncepcji, aż po koncepcje współczesne. Omówione zostaną podstawowe założenia strukturalizmu matematycznego, powody dla których kierunek ten jest obecnie intensywnie rozwijany oraz niektóre trudności związane z przyjęciem poglądów strukturalistycznych w filozofii matematyki. Przedstawiona zostanie również próba klasyfikacji koncepcji strukturalistycznych we współczesnej filozofii matematyki.

Wstęp. Strukturalizm jest stosunkowo nowym prądem w filozofii nauki. Powstał on na początku XX wieku w lingwistyce i do dnia dzisiejszego uważany jest za kierunek o szczególnym znaczeniu dla nauk humanistycznych i przyrodniczych. Zapewne dlatego wszelkie definicje strukturalizmu pojawiające się w słownikach i encyklopediach dotyczą właśnie strukturalizmu w naukach humanistycznych i całkowicie pomijają strukturalizm w filozofii matematyki. Stoi to w pewnej sprzeczności z faktem, że kierunek ten jest obecnie intensywnie rozwijany w filozofii matematyki, szczególnie przez autorów anglosaskich.[1] Publikowane są nie tylko artykuły, ale nawet całe monografie poświęcone strukturalizmowi matematycznemu. Jest on ponadto rozwijany nie tylko przez filozofów, ale podejmowane są również próby budowania logicznych podstaw matematyki w oparciu o koncepcje strukturalistyczne.[2]

---

* Artykuł oparty jest na mojej rozprawie doktorskiej „*Koncepcje strukturalistyczne we współczesnej filozofii matematyki. Analiza krytyczno – porównawcza*" napisanej pod kierunkiem prof. Romana Murawskiego, a obronionej w Instytucie Filozofii UAM w Poznaniu. Pragnę w tym miejscu złożyć serdeczne podziękowania Promotorowi oraz recenzentom: prof. Romanowi Dudzie oraz prof. Janowi Suchowi za cenne uwagi, które pozwoliły mi wyjaśnić wiele kwestii i ulepszyć rozprawę.

[1] W polskiej literaturze dotyczącej filozofii matematyki spotkać można tylko nieliczne wzmianki dotyczące strukturalizmu (zob. np. Murawski (2001)).

[2] Strukturalistyczne ujęcie podstaw arytmetyki (w duchu Dedekinda) przedstawiają np. Th. Bedürftig i R. Murawski w (2001).

Strukturalizm w matematyce można scharakteryzować krótko jako doktrynę głoszącą, że matematyka bada struktury, a nie wyizolowane obiekty i że przedmioty matematyki są jedynie pozycjami w strukturach pozbawionymi indywidualnych cech. Strukturaliści głoszą zatem, że do obiektów matematycznych odwołujemy się zawsze w kontekście pewnej struktury i że wszystko, co można o nich powiedzieć, musi dać się wyrazić w terminach podstawowych relacji tej struktury.

Jedną z motywacji do rozwijania strukturalistycznego ujęcia wiedzy matematycznej była potrzeba stworzenia alternatywy dla platonizmu, bez konieczności odrzucania realizmu jako takiego. Przyjęcie bowiem poglądów platońskich w odniesieniu do obiektów matematyki niesie ze sobą pewne problemy i trudności, a strukturalizm daje pewne możliwości ich uniknięcia.

Przykładem takiego problemu może być kwestia tego, czym są „prawdziwe" liczby naturalne. Paul Benaceraff w pracy *What numbers could not be* (por. Benacerraf (1965)) jako pierwszy zwrócił uwagę na fakt, że strukturalizm daje możliwość pominięcia wielu trudnych i dotąd nierozwiązanych problemów związanych z określeniem, czym są liczby. Benaceraff twierdził, że liczby nie mogą być rozumiane jako zbiory, ponieważ nie istnieje metoda wyznaczenia, która spośród wszystkich możliwych klas zbiorów reprezentuje „prawdziwe" liczby naturalne. Również istnienie redukcji arytmetyki do teorii mnogości nie może być traktowane jako argument na rzecz traktowania liczb jako zbiorów, gdyż istnieje przecież redukcja odwrotna (redukcja teorii mnogości do teorii liczb), która może posłużyć jako argument na rzecz traktowania zbiorów jako liczb.[3] Liczby naturalne nie powinny być również rozumiane jako predykaty, istnieje bowiem wiele argumentów natury gramatycznej na niepredykatywny charakter liczebników.

Rozwiązaniem problemu liczb naturalnych jest przyjęcie poglądów strukturalistycznych. Mianowicie jeśli przyjmiemy, że najistotniejsza jest struktura, jaką tworzą badane obiekty i relacje, w jakie wchodzą między sobą, a nie ich cechy indywidualne, oraz że w szczególności arytmetyka nie bada konkretnych obiektów nazywanych liczbami, lecz własności wszystkich struktur typu porządkowego, to dojdziemy do wniosku, że dowolny system obiektów tworzących ciąg rekurencyjny może być odpowiedni do reprezentowania ciągu liczb. W tym kontekście pytanie, czym są konkretne liczby, traci sens.

Tak sformułowany strukturalizm nie jest odmianą platonizmu. Co więcej, między tymi dwoma kierunkami istnieją różnice, które są szczególnie widoczne w kwestiach ontologicznych. Zwolennicy platonizmu twierdzą, że obiekty badane przez daną gałąź matematyki, np. liczby w teorii liczb, istnieją niezależnie od badającego podmiotu, a nawet niezależnie od czasu

[3] Gaisi Takeuti pokazał w roku 1954, że teoria mnogości Gödla-von Neumanna-Bernaysa jest redukowalna do teorii liczb porządkowych (por. Takeuti (1954)).

i przestrzeni. Zakładają oni również, że poszczególne obiekty, a zatem również liczby, są niezależne od siebie nawzajem, a natura poszczególnych liczb nie zależy od innych liczb. Strukturaliści natomiast odrzucają ten rodzaj ontologicznej niezależności pomiędzy liczbami naturalnymi. Istotą liczby naturalnej są, według nich, jej relacje z innymi liczbami naturalnymi. Strukturaliści uważają, że teoria liczb zajmuje się pojedynczą abstrakcyjną strukturą, z jednym wyróżnionym obiektem początkowym i kilkoma działaniami spełniającymi aksjomat indukcji (drugiego rzędu). W konsekwencji zatem, na przykład, liczba 2 nie jest niczym więcej niż drugą pozycją w strukturze liczb naturalnych.

Prekursorzy strukturalizmu matematycznego. Bardzo często za pierwszą próbę realizacji założeń strukturalizmu matematycznego uważa się prace prowadzone przez grupę matematyków francuskich znanych pod pseudonimem Nicolas Bourbaki. Bourbaki deklarował bowiem, że w jego dziele *Éléments de mathématique* (por. Bourbaki (1939–)) pojęcie struktury jest pojęciem unifikującym wszystkie dziedziny matematyki i że wszystkie pojęcia matematyki można zredukować do kilku rodzajów struktur, nazywanych przez niego strukturami macierzystymi.

Chociaż *Éléments de mathématique* są wybitnym dziełem matematycznym i z nich właśnie pochodzą pewne obowiązujące dzisiaj standardy (np. związane z topologią ogólną), to jednak (w naszej opinii) nie jest to praca strukturalistyczna. Poza nielicznymi wzmiankami, pojęcie struktury nie ma tam wpływu na sposób przedstawiania zagadnień, a pominięcie go w niczym nie umniejszyłoby wartości dzieła. Nie można zatem nazwać *Éléments de mathématique* dziełem strukturalistycznym, a w konsekwencji łączenie nazwiska Bourbaki ze strukturalizmem nie wydaje się uzasadnione.

Za prekursora strukturalizmu matematycznego można natomiast uznać Richarda Dedekinda (1831–1916). Jako pierwszy zdefiniował on bowiem liczby naturalne abstrahując od ich indywidualnych cech, a skupiając się na własnościach i relacjach, w jakie wchodzą one w obrębie danej struktury. Tę swoją koncepcję liczb naturalnych przedstawił w pracach : *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) oraz *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), które można interpretować w duchu strukturalizmu matematycznego.

Dedekind interpretował stwierdzenia na temat „prawdziwych" (jednoznacznie wyznaczonych) liczb naturalnych jako *implicite* ogólne, tzn. twierdził, że mówią one o wszelkich systemach prosto nieskończonych (por. niżej).Taka interpretacja jest całkowicie zgodna z duchem tzw. strukturalizmu eliminacyjnego[4], którego główną tezę można sformułować następująco:

[4] Pojęcie strukturalizmu eliminacyjnego wprowadził Charles Parsons, por. Parsons (1990).

stwierdzenia o pewnym rodzaju obiektów matematycznych należy traktować jako stwierdzenia ogólne o strukturach określonego rodzaju i w ten sposób eliminować odwoływanie się do obiektów matematycznych badanego rodzaju.

Aby przedstawić sposób takiej eliminacji, konieczne jest wprowadzenie pojęcia systemu prosto nieskończonego.

Definicja. System prosto nieskończony jest to system (zbiór) N taki, że istnieje wyróżniony element 0 systemu N oraz odwzorowanie S, które jest jedno-jednoznaczne i „na" oraz takie, że zachodzi indukcja, tzn.:

$$\forall M\{[0 \in M \wedge \forall x(x \in M \rightarrow S(x) \in M)] \rightarrow N \subseteq M\}.$$

Oznaczmy powyższe warunki definicyjne przez $\Omega(N, 0, S)$. Wtedy, zgodnie ze strukturalizmem eliminacyjnym dowolne stwierdzenie A o jednoznacznie wyznaczonych liczbach naturalnych, sformułowane w używanym zwykle języku arytmetyki, daje się przekształcić w formułę, w której arytmetycznymi pojęciami pierwotnymi są N, 0 i S, i znaczy ono właściwie tyle co:

(*) Dla dowolnych N, 0, i S, jeżeli $\Omega(N, 0, S)$, to $A(N, 0, S)$.

Takie ujęcie liczb naturalnych wymaga jednak przyjęcia dwóch istotnych założeń: twierdzenia o istnieniu systemów prosto nieskończonych oraz twierdzenia o kategoryczności.

Twierdzenie o istnieniu systemu prosto nieskończonego pozwala uniknąć problemu pustej prawdziwości zdania postaci (*). Gdyby bowiem nie istniał żaden system prosto nieskończony, to zdanie (*), mające postać implikacji, byłoby zawsze prawdziwe, ponieważ fałszywy byłby poprzednik tej implikacji. Wtedy wartość logiczna tego zdania nie zależałaby od wartości logicznej stwierdzenia A. Konieczne jest zatem przedstawienie dowodu istnienia systemu prosto nieskończonego (zbioru nieskończonego).

Dedekind przedstawia taki dowód w paragrafie 66 pracy (1888). Nie jest to jednak typowy dowód matematyczny, pojawia się w nim bowiem wiele terminów nie związanych z matematyką, których ścisłe zdefiniowanie nie jest możliwe. Jednym z takich pojęć jest pojęcie „świat myśli Dedekinda", innymi są terminy „moje Ja" czy „rzecz". Brak ścisłego ujęcia tych pojęć, lub choćby ich jasnego wytłumaczenia, uniemożliwiają uznanie dowodu Dedekinda za dowód matematyczny.[5] Z dowodem twierdzenia z paragrafu 66 związane są również zastrzeżenia z zakresu teorii mnogości. Dedekind bardzo często nie rozróżniał pojęć teorii mnogości takich jak zbiór i klasa (co może prowadzić do paradoksów), a nawet mylił je z pojęciami logicznymi. Wypada jednak przypomnieć, że brak odpowiedniego rozróżnienia pomiędzy zbiorem a klasą był wynikiem braku w czasach Dedekinda odpowiedniej

[5] Usprawiedliwienia dla użycia tych pojęć przez Dedekinda i wyjaśnienia ich można szukać np. w filozofii Kanta (por. Mc Carty, 1995).

dla tego celu „aparatury” formalnej, jaką posługuje się współczesna teoria mnogości.

Współcześnie nie dowodzi się istnienia nieskończoności, a jedynie przyjmuje aksjomat nieskończoności w tych teoriach matematycznych, które posługują się w istotny sposób tym pojęciem. Problemów związanych z dowodem istnienia systemu prosto nieskończonego można by zatem uniknąć, przyjmując aksjomat nieskończoności jako jeden z aksjomatów teorii strukturalizmu matematycznego.

Drugim twierdzeniem potrzebnym do interpretacji poglądów Dedekinda w świetle strukturalizmu eliminacyjnego jest twierdzenie o kategoryczności. Tylko dzięki temu twierdzeniu, mówiącemu, że wszystkie struktury danego rodzaju są izomorficzne, można interpretować stwierdzenie A jako stwierdzenie o *dowolnych* strukturach danego rodzaju. Jednakże już w przypadku arytmetyki elementarnej, twierdzenie o kategoryczności zachodzi tylko dla arytmetyki drugiego rzędu, to znaczy dla arytmetyki z dwoma rodzajami zmiennych: zmiennymi przebiegającymi liczby i zmiennymi przebiegającymi zbiory liczb. Arytmetyki elementarne pierwszego rzędu są niekategoryczne, mają bowiem różne, nieizomorficzne między sobą modele; co więcej, mogą to być nawet modele przeliczalne.[6] Z kolei przyjęcie arytmetyki drugiego rzędu niesie ze sobą nowe problemy, np. problem właściwego określenia dziedziny zmiennych drugiego rzędu i problemy związane z metamatematycznymi własnościami logik nieelementarnych (w szczególności logiki drugiego rzędu).

Podsumowując możemy stwierdzić, że koncepcja Dedekinda i związany z nią strukturalizm eliminacyjny stają przed wieloma trudnościami, takimi jak: niepustość, kategoryczność czy trudności dotyczące logiki drugiego rzędu. Pomimo tego, że nie wszystkie z tych problemów znalazły zadowalające rozwiązanie, nie powinniśmy zapominać o tym, że to właśnie prace Dedekinda dały początek strukturalnemu podejściu do matematyki. To on bowiem jako pierwszy podjął próbę zdefiniowania liczb naturalnych pomijając ich indywidualne własności a skupiając się na własnościach i relacjach, w jakie wchodzą one w obrębie danej struktury.

Strukturalizm we współczesnej filozofii matematyki. Idea traktowania matematyki jako nauki o strukturach jest rozwijana we współczesnej filozofii matematyki głównie przez Michaela Resnika, Stewarta Shapiro i Geoffreya Hellmana. Koncepcje tych autorów, pomimo iż wszystkie zakwalifikować można jako strukturalistyczne, to jednak różnią się w wielu kwestiach. Różnice te mogą służyć jako kryterium klasyfikacji koncepcji strukturalistycznych w filozofii matematyki. Zanim jednak przedstawimy taką

---

[6] Zagadnienia związane z kategorycznością arytmetyki przedstawia Grzegorczyk w (1971).

klasyfikację, omówimy pokrótce podstawowe założenia wszystkich tych koncepcji.

Michael Resnik jest twórcą koncepcji matematyki jako nauki o wzorcach[7]. Twierdzi on, że obiekty matematyczne możemy rozważać jedynie jako pozycje we wzorcach i że nie mają one żadnych cech indywidualnych poza tymi, które odróżniają je od innych pozycji w danym wzorcu. Samo pojęcie wzorca nie jest jednak precyzyjne i w żadnej ze swoich prac Resnik nie podejmuje próby uściślenia tego pojęcia.

Podstawowym założeniem, jakie czyni Resnik rozwijając swoją teorię wzorców, jest stwierdzenie, że *cała* matematyka jest nauką o wzorcach. Jeśli tak, to powstaje pytanie o możliwość interpretacji różnych teorii matematycznych w terminach strukturalizmu oraz o to czy wszystkie teorie matematyczne możemy ująć w ten sposób?

Używając logiki drugiego rzędu możemy podjąć próbę „przeformułowania" danej teorii na język strukturalizmu. Mając dane zdanie $S(C_1, \ldots, C_n)$ rozważanej teorii wyrażone w języku drugiego rzędu, zastępujemy jej stałe pozalogiczne $C_1, \ldots, C_n$ przez zmienne drugiego rzędu, by otrzymać w ten sposób schemat drugiego rzędu $S(V_1, \ldots, V_n)$. Wtedy tłumaczymy oryginalne zdanie S jako następującą implikację:

$$(\forall V_1) \ldots (\forall V_n)(Ax(V_1 \ldots V_n) \rightarrow S(V_1, \ldots, V_n)), \tag{1}$$

i przyjmujemy następujące wyrażenie jako aksjomat:

$$(\exists V_1) \ldots (\exists V_n) Ax(V_1, \ldots, V_n); \tag{2}$$

gdzie $Ax(V_1, \ldots, V_n)$ otrzymujemy z koniunkcji aksjomatów danej teorii. (Aksjomat (2) stwierdza, że istnieją struktury odpowiedniego typu, co pozwala uniknąć problemu pustej prawdziwości zdania (1), o czym była już mowa powyżej.)

„Tłumaczenie" (1) powoduje teraz zastąpienie zdania S przez stwierdzenie, że S zachodzi we wszystkich strukturach odpowiedniego typu. Powyższa metoda „tłumaczenia" teorii matematycznej na jej wersję strukturalistyczną jest odpowiednia dla takich teorii, które są skończenie aksjomatyzowalne i kategoryczne. Skończona aksjomatyzowalność zapewnia, że możemy wszystkie aksjomaty teorii umieścić jako koniunkcję w poprzedniku implikacji (1) natomiast kategoryczność powoduje, że cała implikacja przyjmuje jedną z dwóch wartości logicznych.

Niestety, nie wszystkie teorie matematyczne są skończenie aksjomatyzowalne i kategoryczne. Przykładów teorii skończenie nieaksjomatyzowalnych i/lub niekategorycznych jest bardzo wiele, a jednym z nich jest teoria zbiorów, uważana przez wielu matematyków za jedną z najważniejszych teorii

---

[7] Resnik przedstawił swoją koncepcję w szeregu artykułów publikowanych w latach 1975-1997 (por. np. Resnik (1981), Resnik (1982) oraz Resnik (1997)).

matematycznych. Jak zatem można interpretować strukturalistycznie takie teorie? Na to pytanie Resnik nie odpowiada. Zatem jego teza, że matematyka jest nauką o wzorcach pozostaje nie do końca i nie w pełni uzasadniona.

Analizując prace Resnika odnosimy wrażenie, że używane przez niego słowo wzorzec, to albo tylko pojęcie (i to nie do końca jasne) albo też ukryte użycie teorii mnogości. Konteksty, w jakich używa on pojęcia wzorca, bardzo często łączą się z teorią mnogości. Czy zatem matematyka jest rzeczywiście nauką o wzorcach, czy też w ostatecznym rozrachunku nauką o zbiorach?

Prace Resnika zawierają niejasności, jest to jednak koncepcja godna uwagi chociażby ze względu na jej konsekwencje epistemologiczne. Traktuje on bowiem obiekty matematyczne, takie jak liczby, zbiory, funkcje czy punkty, jako byty nie posiadające wewnętrznej struktury, które pojawiają się w strukturach matematycznych, są pozycjami w ich obrębie, a ich identyczność wyznaczona jest przez relacje do innych pozycji w strukturze, do której należą. Twierdzi on przy tym, że nie możemy posiadać wiedzy matematycznej o izolowanych obiektach, lecz raczej poznajemy struktury lub ich części. Możemy zatem zapytać, w jaki sposób nabywamy ten rodzaj wiedzy[8]. Resnik twierdzi, że wzorce poznajemy w procesie abstrakcji. Przez obserwację kilku przykładów danego wzorca zauważamy, że są one do siebie podobne pod pewnymi względami. Po dokładniejszej analizie tych przykładów możemy opisać łączące je cechy w terminach relacyjnych, otrzymując w ten sposób opis wzorca. Nie jesteśmy jednakże w stanie rozpoznać w taki sposób wzorców bardziej złożonych lub nieskończonych. Taką wiedzę możemy osiągnąć przez badanie (np. dedukcyjnie) innych, znanych już, wzorców. Różnorodne redukcje arytmetyki, geometrii, analizy i teorii zbiorów pokazują, że wzorce opisywane przez te teorie występują w obrębie wzorców opisywanych przez inne teorie. Dlatego wiedza na temat tego samego wzorca może być osiągnięta różnymi drogami, co potwierdza pogląd, że to sam wzorzec jest najważniejszy w matematyce.

Kolejną koncepcję strukturalną w filozofii matematyki stworzył Stewart Shapiro.[9] Przedstawił on aksjomatyczną teorię struktur, twierdząc jednocześnie, że cała matematyka jest do niej redukowalna. Cechą charakterystyczną koncepcji Shapiro jest ścisłe powiązanie pomiędzy teorią struktur a językiem. Struktura nie jest wyznaczona przez swoje miejsca, rozważane w izolacji od siebie, ale raczej przez *relacje* między miejscami. Można w tym

[8] Poglądy Resnika dotyczące epistemologii matematyki interpretowanej przez pryzmat wzorców ulegały zmianom w czasie. Początkowo mówił on tylko o procesie abstrakcji wzorca z obserwacji jego instancji i o możliwości dedukcyjnego rozwoju teorii wzorca na bazie wzorców podstawowych uzyskanych w takim procesie. Później pojawiło się pojęcie szablonu i rozważania dotyczące przechodzenia od wiedzy o szablonach do wiedzy o wzorcach. Por. np. Resnik (1975) oraz Resnik (1997).

[9] Por. artykuł Shapiro (1989) oraz książki Shapiro (1997) i Shapiro (2000).

miejscu zauważyć, że jest to jedna z różnic między strukturalizmem a tradycyjnym platonizmem. Wielu platoników obawia się bowiem połączenia pomiędzy ontologią i językiem. Rzeczywistość ich zdaniem powinna być niezależna od nas i naszego życia lingwistycznego. Shapiro jednak zauważa, że sposób, w jaki dzielimy świat na przedmioty zależy od języka, bowiem przedstawienie i opis obiektów zależy od języka, w jakim je opisujemy. Jednakże samo istnienie tych obiektów jest od języka niezależne. Zatem koncepcja Shapiro nie koliduje z założeniem niezależnego istnienia obiektów matematycznych.

Shapiro przedstawia *teorię struktur* jako teorię aksjomatyczną. Zmienne języka tej teorii przebiegają zbiór struktur. Każda struktura ma zbiór „miejsc" i relacji zachodzących między nimi. Zatem musimy przyjąć w tej teorii drugi rodzaj zmiennych przebiegających przez miejsca w strukturach, a co za tym idzie konieczne jest przyjęcie języka drugiego rzędu jako języka bazowego.

Przedstawianie struktury jako zbioru miejsc i skończonego zbioru relacji i funkcji określonych na tych miejscach jest w istocie podejściem teoriomnogościowym. Przy takim podejściu relację izomorfizmu pomiędzy strukturami oraz relację spełniania pomiędzy strukturami i formułami definiujemy w sposób standardowy.

Aby strukturalizm mógł reprezentować te dziedziny matematyki, których przedmiotem badań są dziedziny nieskończone, w tym tak podstawowe dziedziny matematyki jak arytmetyka czy analiza, konieczne jest przyjęcie aksjomatu nieskończoności:

Istnieje co najmniej jedna struktura, która ma nieskończoną ilość miejsc.

Shapiro wprowadza też szereg aksjomatów określających relacje zachodzące między poszczególnymi strukturami (m.in. aksjomaty: odejmowania, podzbioru, dodawania, struktury potęgowej, zastępowania).

Główną zasadą strukturalizmu w ujęciu Shapiro jest stwierdzenie, że każda spójna teoria charakteryzuje strukturę lub klasę struktur. Wyraża on to w następujący sposób:

Jeśli Φ jest spójną[10] *formułą języka drugiego rzędu, to istnieje struktura, która spełnia Φ.*

Teoria struktur przedstawiona przez Shapiro pozwala w jasny sposób zdefiniować relację równości struktur. Jeśli bowiem przyjmiemy założenie, że każde miejsce jest częścią jednej i tylko jednej struktury, to wówczas dwie struktury są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same miejsca. To oczywiście nie rozwiązuje problemu, kiedy dwa systemy (np. dwie

[10] Powstaje jednak problem rozumienia i interpretacji terminu „spójność", który nie ma jednoznacznego rozstrzygnięcia. Por. np. Shapiro (1997).

podstruktury) są przykładami tej samej struktury. Chcielibyśmy np. móc wyrazić, że liczby naturalne z dodawaniem, mnożeniem i mniejszością są przykładem tej samej struktury, co liczby naturalne tylko z dodawaniem i mnożeniem. Te dwa systemy mają różne miejsca, ponieważ ich relacje są różne, a zatem w świetle powyższej definicji są różne. Powinniśmy zatem przyjąć inną relację równości. Łatwo zauważyć, że mniejszość jest definiowalna w terminach dodawania. Shapiro korzystając z tego spostrzeżenia sformułował relację równoważności systemów. Przedstawienie tej relacji poprzedzimy definicją pojęcia *pełnej podstruktury.*

Definicja. Niech R będzie strukturą, a P jej podstrukturą. P nazywamy *pełną podstrukturą* (*full substructure*) struktury R, jeśli każde miejsce R jest miejscem P i jeśli każda relacja struktury R może być zdefiniowana w terminach relacji struktury P.

Rozważmy teraz definicję relacji strukturalnej równoważności systemów, która zdaniem Shapiro najlepiej oddaje, że systemy są „takie same":

Definicja. Niech M i N będą systemami. Mówimy, że M i N są *strukturalnie równoważne*, lub po prostu *równoważne*, jeśli istnieje struktura R taka, że M i N są izomorficzne z pewną pełną podstrukturą struktury R.

Łatwo widzieć, że w myśl powyższej definicji system liczb naturalnych z dodawaniem, mnożeniem i mniejszością jest równoważny systemowi liczb naturalnych tylko z dodawaniem i mnożeniem.

Przy użyciu aparatury drugiego rzędu, arytmetyka z następnikiem jest równoważna arytmetyce z dodawaniem i mnożeniem, ale nie są one równoważne, gdy korzystamy z wyrażeń pierwszego rzędu. Taka zależność od używanego języka nie powinna być zaskakująca, bowiem, zdaniem Shapiro, wszystko, co związane jest z ontologią, zależy od języka.

Ontologiczne połączenie pomiędzy strukturą i językiem sugeruje też połączenie epistemologiczne. Autor sugeruje, że wiedza o prostych strukturach może wyrastać z procesu abstrakcji i rozpoznawania wzorców, jednak do operowania strukturami nieskończonymi niezbędne jest bliskie połączenie struktury z językiem. Przynajmniej na polu czystej matematyki pojmowanie danej struktury i rozumienie języka teorii tej struktury sprowadza się do tego samego. Nie potrzeba nic więcej, by zrozumieć strukturę i posiadać zdolność odnoszenia się do jej miejsc, niż zdolność poprawnego używania języka. W kontekście teorii Shapiro rozumienie matematyki nie jest zatem żadną filozoficzną tajemnicą, nie jest ono bowiem w istocie niczym więcej niż zdolnością do posługiwania się jej językiem.

Analizując prace Shapiro można dojść do wniosku, że podstawowym celem, jaki stawiał on sobie budując teorię struktur, było stworzenie takiej teorii, w której możemy wyrazić wszystkie inne teorie matematyczne. Istnieje jednak już jedna taka teoria – teoria mnogości. Shapiro twierdzi, że jego teoria jest lepsza i bardziej odpowiednia do tego celu niż teoria mnogości. Można jednak wątpić, czy tak jest rzeczywiście, autor bowiem w żaden sposób nie uzasadnia swego stwierdzenia. Co więcej, sam zauważa, że teoria struktur nie jest wolna od problemów, z którymi boryka się również teoria mnogości (np. problem paradoksów), a „elastyczność” czy „wygoda”, o których mówi Shapiro, nie są wystarczającymi argumentami na rzecz odrzucenia teorii mnogości jako teorii bazowej w matematyce i zastąpienia jej teorią struktur. Ponadto autor w żadnej ze swoich publikacji nie przedstawił ścisłego dowodu, że język teorii struktur jest odpowiedni do mówienia o *wszystkich* dziedzinach matematyki, podczas gdy znane są odpowiednie twierdzenia mówiące o możliwości redukcji poszczególnych gałęzi matematyki do teorii mnogości.

Podsumowując możemy stwierdzić, że strukturalizm Stewarta Shapiro jest koncepcją pod wieloma względami nowatorską, jest to bowiem jedyna teoria strukturalistyczna przedstawiona jako teoria aksjomatyczna. Shapiro, jako jedyny spośród piszących na temat strukturalizmu, wiele uwagi poświęca również związkom epistemologicznym i ontologicznym z językiem. Nie ma jednak wystarczających podstaw by stwierdzić, że teoria struktur Stewarta Shapiro może odegrać taką rolę w podstawach matematyki, jaką odgrywa dziś teoria mnogości.

Geoffrey Hellman jest twórcą koncepcji nazywanej strukturalizmem modalnym. Jest to wersja strukturalizmu wykorzystująca logikę modalną drugiego rzędu do rozwiązywania pewnych problemów, typowych dla strukturalizmu matematycznego. Autor twierdzi, że podstawowym problemem uniemożliwiającym rozwój strukturalizmu matematycznego jest brak wyraźnej, dostatecznie precyzyjnej interpretacji strukturalistycznej poszczególnych teorii matematycznych. Należy zatem przedstawić wyraźnie teorię strukturalistyczną, tj. zdefiniować jej język i podstawowe założenia, by móc dokonać „przekładu” konkretnych teorii matematycznych na język strukturalizmu.

Strukturalizm modalny Hellmana w sposób ograniczony stosuje logicznomatematyczną modalność i pojęcie logicznej możliwości jako część języka strukturalizmu. Pokazuje on, że możliwe jest przetłumaczenie (zwykłych) zdań teorii liczb (lub analizy) tak, że mówią one o tym, co mogłoby zachodzić w konkretnej strukturze określonego typu bez literalnej kwantyfikacji po jakichkolwiek obiektach. Metoda tłumaczenia zdań wyrażonych w używanym zwykle języku arytmetyki na język strukturalizmu modalnego musi spełniać dwa podstawowe założenia. Pierwsze z nich dotyczy pełnego zdeterminowania wartości logicznej zdań otrzymanych w wyniku tłumaczenia. Drugie natomiast wynika z chęci stworzenia koncepcji, która byłaby prawdziwą alternatywą dla platonizmu i dotyczy unikania literalnej kwantyfikacji po strukturach abstrakcyjnych, możliwych światach itp.

Intuicja związana z modalno-strukturalną interpretacją teorii liczb jest następująca. Zdanie zwykłego języka teorii liczb (lub takie, które może być wypowiedziane w tym języku) mówi o tym, co *może* zachodzić w dowolnej strukturze odpowiedniego typu, która *może* istnieć (bez zakładania, że taka struktura istnieje!). Takie podejście eliminuje całkowicie problem dowodu istnienia struktur, a co za tym idzie problem pustej prawdziwości.

Hellman proponuje następujący schemat tłumaczenia zdań języka arytmetyki Peano drugiego rzędu na język strukturalizmu modalnego:

$$\Box\forall X\forall f[\wedge PA^2 \to A]^X \begin{pmatrix} S \\ f \end{pmatrix},$$

gdzie:

- $\Box$ oznacza operator konieczności,
- poprzednik implikacji, to koniunkcja skończenie wielu aksjomatów arytmetyki Peano[11], wyrażonych w języku drugiego rzędu,
- A jest dowolnym zdaniem w języku arytmetyki Peano drugiego rzędu,
- symbol $\begin{pmatrix} S \\ f \end{pmatrix}$ oznacza, że stałą S (następnik) zastępujemy dwuargumentową relacją f taką, że relacja f interpretuje funkcję następnika,
- wszystkie kwantyfikatory występujące w tej formule są zrelatywizowane do dziedziny X.

Zdanie to wyraża stwierdzenie, że A może zachodzić w *dowolnej dziedzinie* X, w której relacja f zachowuje własności relacji następnika, co jest całkowicie zgodne z przedstawioną wcześniej (w części dotyczącej strukturalizmu Dedekinda) intuicją związaną ze schematem tłumaczenia.

Hellman pokazuje, że przedstawiony przez niego schemat tłumaczenia spełnia stawiane wymagania, a mianowicie, że zaproponowana interpretacja strukturalno-modalna danej teorii matematycznej przestrzega pełnego, klasycznego zdeterminowania prawdziwości tej teorii. Pokazuje w szczególności, że każde twierdzenie arytmetyki Peano, po przetłumaczeniu na język strukturalizmu modalnego, będzie twierdzeniem tej teorii. Uzasadnienie, jakie przedstawia, wymaga przyjęcia kilku dodatkowych założeń i aksjomatów w teorii strukturalizmu modalnego, między innymi :

- aksjomatu komprehencji w wersji modalnej[12],
- założenia o niesprzeczności aksjomatów Peano drugiego rzędu,
- aksjomatu nieskończoności potencjalnej.

Założenia te muszą zostać przyjęte w strukturalizmie modalnym, by można było traktować tę koncepcję jako spójną teorię matematyczną. Niestety, w żadnej pracy Hellmana nie znajdujemy pełnego opisu systemu logiki modalnej, na którym to systemie bazuje cała jego koncepcja. Nie jest

[11] Pełne omówienie arytmetyki Peano można znaleźć np. w Batóg (1999).

[12] Powyższy aksjomat stwierdza, że każda formuła spełniająca pewne warunki wyznacza zbiór lub relację.

to luka, którą można by w sposób łatwy i w pełni jednoznaczny uzupełnić, co z kolei pozostawia otwartą kwestię matematycznych podstaw strukturalizmu modalnego. Podsumowując można zatem stwierdzić, że koncepcja strukturalizmu modalnego jest taką samą alternatywą dla platonizmu jak strukturalizm eliminacyjny Resnika, pozwala bowiem uniknąć odwołania do obiektów matematycznych, nie jest to jednak (jeszcze) w pełni spójna teoria matematyczna.

Klasyfikacja koncepcji strukturalistycznych w filozofii matematyki. Ponieważ przedstawione powyżej koncepcje strukturalne w filozofii matematyki różnią się pod wieloma względami, dokonamy próby ich klasyfikacji, wykorzystując jako kryterium rozróżniające sposób, w jaki podchodzą one do problemu definiowania struktur i ich istnienia. Ze względu na to kryterium możemy wyróżnić dwa podstawowe stanowiska w strukturalizmie matematycznym: strukturalizm *in re* oraz strukturalizm *ante rem.* Scharakteryzujmy je pokrótce.

a) *Strukturalizm in re (strukturalizm eliminacyjny)*

Z punktu widzenia strukturalizmu eliminacyjnego, wyrażenia arytmetyki, takie jak np. „$2 + 3 = 5$”, nie odnoszą się do konkretnych obiektów oznaczanych przez 2, 3 i 5. Każde wyrażenie tego typu jest swego rodzaju generalizacją, wyraża własność, która odnosi się do wszystkich systemów liczb naturalnych. W przypadku zdania „$2 + 3 = 5$” sprowadza się ono do stwierdzenia: *„w każdym systemie liczb naturalnych, obiekt na drugim miejscu dodany do obiektu na trzecim miejscu w tym systemie, daje obiekt, który w danym systemie zajmuje piątą pozycję”*. W podobny sposób można rozumować w odniesieniu do stwierdzeń ontologicznych np. *„0 istnieje”*, co można rozumieć jako *„każdy system liczb naturalnych ma obiekt na pierwszym miejscu*”. Zatem, z punktu widzenia strukturalizmu *in re*, wszystkie zdania dotyczące liczb są generalizacjami. Strukturalizm *in re* stwierdza, że struktura liczb naturalnych to nic więcej niż systemy, które są jej przykładami. Jeżeli zniszczymy wszystkie takie systemy, to wyeliminujemy też samą strukturę.

Program przedstawienia wyrażeń matematycznych jako generalizacji jest całkowicie zgodny z duchem strukturalizmu, ale takie podejście nie traktuje struktur jako obiektów matematycznych. Mówienie zatem o liczbach naturalnych jest tylko wygodną formą mówienia o wszystkich systemach, które są przykładami struktury liczb naturalnych. Dlatego też wielu autorów określa ten nurt jako „strukturalizm bez struktur”.

Z perspektywy strukturalizmu eliminacyjnego konieczne jest określenie ontologii bazowej, czyli dziedziny rozważań, której obiekty będą zajmować miejsca w strukturach *in re*. Taka ontologia bazowa musi być oczywiście odpowiednio bogata, interesuje nas przy tym nie tyle natura samych tych obiektów, lecz ich ilość, bowiem w szczególności każdy system, który jest przykładem struktury liczb naturalnych, musi mieć nieskończenie wiele obiektów. Zatem jeśli ontologia bazowa jest skończona, to nie istnieje żaden system, który byłby przykładem struktury liczb naturalnych. (Ten problem jest ściśle związany z problemem pustej prawdziwości, o którym pisaliśmy powyżej.) Istnieją *a priori* co najmniej dwa sposoby rozwiązania tego problemu:

– *Ontologiczny strukturalizm eliminacyjny* (którego przykładem jest koncepcja Charlesa Parsonsa) postuluje istnienie wystarczającej ilości obiektów abstrakcyjnych dla wszystkich struktur, które badamy. Zatem dla każdej dziedziny matematyki zakładamy istnienie dostatecznie dużej liczby obiektów, by uniknąć problemu pustej prawdziwości. Ważną cechą tej odmiany strukturalizmu jest fakt, że ontologia bazowa nie jest rozumiana w terminach strukturalistycznych. Istotnie, jeśli bowiem jako ontologię bazową przyjąć teorię mnogości, to gdyby rozumieć jej obiekty w terminach strukturalistycznych, to tworzą one pewien system S, będący przykładem struktury U. Ale struktura U znowu wymaga ontologii bazowej, by zapełnić miejsca U. Nowa ontologia bazowa nie może być rozumiana w terminach strukturalizmu, bo jeśli tak, to potrzebujemy nowej ontologii bazowej dla jej miejsc. Następuje regres, który trzeba zatrzymać. Dlatego też ontologia bazowa nie jest interpretowana strukturalistycznie, podczas gdy wszystko inne w matematyce jest traktowane w terminach strukturalistycznych.

– *Modalny strukturalizm eliminacyjny* (Geofreya Hellmana) proponuje mówienie o *możliwych* strukturach, a nie o strukturach. Zamiast powiedzieć, że arytmetyka jest nauką o wszystkich systemach określonego typu, mówimy, że arytmetyka zajmuje się wszystkimi *możliwymi* systemami odpowiedniego rodzaju. Eliminujemy wtedy problem pustej prawdziwości bez zakładania, że istnieje system, który jest przykładem odpowiedniej struktury. Zakłada się tylko, że taki system jest możliwy.

Zarówno ontologiczny jak i modalny strukturalizm eliminacyjny nie wymagają aktualnego istnienia obiektów, które mają tworzyć ontologię bazową. Jednak w przypadku modalnym potrzebujemy dostatecznie bogatej ontologii dla bycia możliwym. Warto przy tym zauważyć, że występująca tutaj możliwość, to możliwość logiczna, a nie fizyczna czy metafizyczna. Jednak mówienie w taki sposób o możliwości wymaga powrotu do mówienia o zbiorach, bowiem stwierdzenie, że zdanie jest logicznie możliwe jest równoważne powiedzeniu, że istnieje odpowiedni zbiór, który je spełnia. Aby uniknąć takiej redukcji Hellman przyjmuje modalności jako pojęcia pierwotne, nie redukowalne do teorii zbiorów.

W świetle powyższych opisów strukturalizmu eliminacyjnego warto zastanowić się, co ten rodzaj strukturalizmu mówi o problemach związanych z definiowaniem i równością struktur. Wersja ontologiczna strukturalizmu eliminacyjnego zakłada istnienie ostatecznej ontologii bazowej dla całej matematyki. Jeśli za taką ontologię przyjąć teorię mnogości, to problem ten został rozwiązany przez teorię modeli w sposób następujący. Można wybrać dowolnie język bazowy, np. zdefiniować strukturę jako zbiór lub klasę. Relacja n-arna jest zbiorem n-tek, a system jest wtedy parą uporządkowaną składającą się z dziedziny i ze zbioru relacji na niej określonych. Zatem używając standardowych technik z zakresu teorii modeli, możemy mówić o systemach posiadających tę samą strukturę. Jednak to, co nazywamy „strukturą", nie znajduje się w ontologii. Jedyne, co rozważamy, to izomorfizm i równoważność strukturalna pomiędzy systemami. Jest to zgodne ze sloganem strukturalizmu eliminacyjnego: „strukturalizm bez struktur". Ponieważ izomorfizm i równoważność strukturalna są relacjami równoważności, można nieformalnie przyjąć strukturę jak klasę abstrakcji w hierarchii teorii mnogości.

W przypadku strukturalizmu modalnego Hellmana do języka formalnego danej struktury (teorii) dodane są operatory modalne. Zdania arytmetyki są wtedy rozważane jako wyrażenia dotyczące wszystkich możliwych systemów, które spełniają aksjomaty Peano drugiego rzędu. Pomimo że program ten jest poprawną charakterystyką strukturalizmu, nie ma w nim pojęcia struktury, a zatem i pojęć związanych z równością struktur.

b) *Strukturalizm ante rem*

Zwolennicy tego podejścia twierdzą, że struktury istnieją niezależnie od tego, czy istnieją ich przykłady. W odniesieniu do struktur *ante rem* mówi się często, że mają one „pierwszeństwo" ontologiczne przed swoimi przykładami. Zgodnie z tym stwierdzeniem, nie możemy powiedzieć na przykład, że dany system jest modelem liczb naturalnych, ponieważ jest przykładem struktury liczb naturalnych. Jest zupełnie odwrotnie. To, co sprawia, że system jest przykładem struktury liczb naturalnych, to fakt, że ma on w szczególności funkcję następnika z obiektem początkowym, i że system ten spełnia zasadę indukcji.

Przykładem tej wersji strukturalizmu jest opisana powyżej teoria struktur Stewarta Shapiro. Eliminuje on problemy natury ontologicznej związane ze strukturalizmem przez stworzenie aksjomatycznej teorii struktur. Takie podejście pozwala w jasny sposób określić warunki równości struktur i innych ich wzajemnych relacji. Shapiro twierdzi ponadto, że takie podejście prowadzi do przyjęcia teorii struktur jako ontologii bazowej dla całej matematyki. Zatem omawiany wcześniej regres można zakończyć na uniwersum struktur.

Podsumowując, można stwierdzić, że każdy program strukturalistyczny wymaga jakiejś teorii bazowej. Może to być teoria mnogości, modalna teoria mnogości lub też teoria struktur *ante rem*. Przyjęcie każdej z nich wiąże się z koniecznością rozwiązania kolejnych problemów, wynikających z natury obiektów wchodzących w skład danej ontologii bazowej.

Podsumowanie. Powyżej przedstawiliśmy podstawowe założenia strukturalizmu matematycznego oraz omówiliśmy poszczególne koncepcje strukturalistyczne rozpoczynając od strukturalizmu eliminacyjnego Charlesa Parsonsa, poprzez teorię wzorców Michaela Resnika i aksjomatyczną teorię struktur Stewarta Shapiro, a kończąc na strukturalizmie modalnym Geoffreya Hellmana. Dokonaliśmy również klasyfikacji omawianych koncepcji, aby łatwiej było zauważyć pewne cechy łączące poszczególne koncepcje.

Jak wspominaliśmy, przedstawione powyżej koncepcje tworzone są jako alternatywa dla tradycyjnego platonizmu. Możemy zatem zadać pytanie: czy strukturalizm jest rzeczywistą alternatywą dla platonizmu oraz jakie trudności niesie ze sobą przyjęcie poglądów strukturalistycznych w przypadku filozofii matematyki? Tradycyjny platonizm boryka się z wieloma problemami natury ontologicznej i epistemologicznej takimi, jak problem wieloredukcji czy też problemy związane z określeniem relacji pomiędzy obiektami matematycznymi, a w szczególności relacji równości. Analiza omówionych powyżej koncepcji pokazuje, że strukturalistyczne ujęcie wiedzy matematycznej pozwala rozwiązywać te typowe dla platonizmu trudności bez konieczności odrzucenia realizmu jako takiego. Większość strukturalistów twierdzi bowiem, że każde zdanie arytmetyki czy analizy jest prawdziwe bądź fałszywe, niezależnie od języka, umysłu czy konwencji społecznych poszczególnych matematyków. Zatem strukturaliści są w tej kwestii realistami. Jednakże sam strukturalizm, niezależnie od tego, w jakiej wersji jest przyjmowany, boryka się z wieloma innymi problemami, które omawialiśmy przedstawiając poszczególne wersje strukturalizmu, np. kwestia pustej prawdziwości, kategoryczność czy też problemy epistemologiczne. Wszystkie, próby rozwiązania tych problemów niosą ze sobą nowe kwestie, związane np. z logiką drugiego rzędu czy logiką modalną.[13]

Podsumowując można stwierdzić, że strukturalizm, pomimo iż rozwiązuje pewne problemy, z którymi boryka się platonizm, to sam nie jest wolny od trudności, a ich rozwiązanie nadal pozostaje kwestią otwartą.

Bibliografia

Batóg T., 1999, *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Bedürftig Th., Murawski R., 2001, *Zählen. Grundlage der elementaren Arithmetik*, Verlag Franzbecker, Hildesheim/Berlin.

[13] Zagadnienia związane z korzyściami oraz trudnościami płynącymi z przyjęcia strukturalizmu w filozofii matematyki omawiamy w artykule *Strukturalizm jako alternatywa dla platonizmu w filozofii matematyki.*

Benacerraf P., 1965, *What numbers could not be*, Philosophical Review 74, s. 47–73; także [w:] Benacerraf, Putnam (Eds.) *Philosophy of Mathematics*, 2^{nd} edition, Cambridge Uniwersity Press, Cambridge 1983, s. 273–294.

Bondecka-Krzykowska I., 2002, *Koncepcje strukturalistyczne we współczesnej filozofii matematyki. Analiza krytyczno – porównawcza*, rozprawa doktorska, Instytut Filozofii UAM Poznań.

Bondecka-Krzykowska I., *Strukturalizm jako alternatywa dla platonizmu w filozofii matematyki*, Filozofia Nauki, (w druku).

Bourbaki N., (1939–), *Éléments de Mathématique*, 10 vols., Hermann, Paris.

Bourbaki N., 1949, *The foundations of mathematics*, Journal of Symbolic Logic 14, s. 1–8.

Dedekind R., 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig; przekład angielski: *The nature and meaning of numbers*, [w:] *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York, b.r., s. 31–115; przekład polski: *Ciągłość i liczby niewymierne*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, opr. R. Murawski, [1]1986, [2]1994 Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, s. 136–149.

Dedekind R., 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig; przekład angielski: *Continuity and irrational numbers*, [w:] *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, New York, b.r., s. 3–30.

Grzegorczyk A., 1971, *Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN, Warszawa.

Hellman G., 1989, *Mathematics without Numbers. Towards a Modal-Structural Interpretation*, Clarendon Press, Oxford.

Hellman G., 1996, *Structuralism without structures*, Philosophia Mathematica (3) Vol. 4, s. 100–123.

Hellman G., 2001, *Three varieties of mathematical structuralism*, Philosophia Mathematica (9) Vol. 2, s. 184–211.

Mc Carty D. C., 1995, *The mysteries of Richard Dedekind*, [w:] Hintikka J. (Ed.), *Essays on the Development of Foundations of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 53–96.

Murawski R., 2001, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (wydanie drugie).

Parsons Ch., 1983, *Mathematics in Philosophy. Selected Essays*, Cornell University Press, Ithaca, New York.

Parsons Ch., 1990, *The structuralist view of mathematical objects*, Synthese 84, s. 303–346.

Resnik M. D., 1975, *Mathematical knowledge and pattern cognition*, Canadian Journal of Philosophy 5, s. 25–39.

Resnik M. D.,1981, *Mathematics as a science of patterns: ontology and reference*, Noûs 15, s. 529–550.

Resnik M. D.,1982, *Mathematics as a science of patterns: epistemology*, Noûs 16, s. 95–105.

Resnik M. D.,1997, *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford.

Shapiro S., 1989, *Structure and ontology*, Philosophical Topics, vol. XVII, no. 2, s. 145–170.

Shapiro S., 1997, *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York.

Shapiro S., 2000, *Thinking About Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Takeuti G., 1954, *Construction of the set theory from the theory of ordinal number*, Journal of Mathematical Society of Japan, vol. 6.