ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVIII (2002)

A. Schinzel (Warszawa)

Przegląd osiągnięć teorii liczb w XX wieku (*)

Niżej podaję 53 spektakularne osiągnięcia teorii liczb w XX wieku, wskazując tam, gdzie to możliwe, twierdzenia lub zagadnienia z ubiegłych stuleci, do których te wyniki nawiązują. Jeśli takiej wskazówki brak, temat danego osiągnięcia jest, według rozeznania autora artykułu, nowy w stosunku do wieków ubiegłych. Poprzednicy autora wyniku w wieku XX nie są wymienieni. Porządek wyników jest w ogólnych zarysach taki, jak w *Mathematical Reviews.* Spis literatury dotyczy tylko wieku XX, a podany po nazwisku autora rok jest rokiem publikacji, a nie otrzymania wyniku, dlatego wyniki opublikowane w 2001 r. zaliczam również do wieku XX. Przy nazwiskach autorów, którzy za przytoczony wynik lub jego część (chociaż niekoniecznie tylko za ten wynik) otrzymali medal Fieldsa, fakt ten jest odnotowany. W przypadku braku medalu Fieldsa, jeśli autor przedstawił wynik, jego część lub uogólnienie w odczycie na zaproszenie na Międzynarodowym Kongresie Matematyków, po skrócie MKM podany jest rok kongresu.

I. Ciągi i zbiory liczb całkowitych

1. Twierdzenie (van der Waerden 1927). *Dla dowolnych liczb naturalnych k i l istnieje liczba $N(k,l)$ taka, że przy dowolnym podziale kolejnych $N(k,l)$ liczb naturalnych na k klas jedna z klas zawiera postęp arytmetyczny l-wyrazowy.*

2. Twierdzenie (Szemerédi 1975, MKM 1974). *Maksymalna długość $r_l(n)$ ciągu liczb naturalnych $\leqslant n$ niezawierającego żadnego postępu arytmetycznego l-wyrazowego spełnia równość*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_l(n)}{n} = 0.$$

(*) Rozszerzony tekst odczytu wygłoszonego na Zjeździe PTM w Nowym Sączu we wrześniu 2001 r.

3. Twierdzenie (Gowers 2001, medal Fieldsa 1998). *W oznaczeniach Twierdzenia* 2

$$r_l(n) = O\left(\frac{n}{(\log\log n)^{c_l}}\right), \qquad gdzie\ c_l = 2^{-2^{l+9}}.$$

4. Twierdzenie (Sznirelman 1930). *Każdy podzbiór* $A \ni 0$ *zbioru* $\mathbb{N}_0$ *liczb całkowitych nieujemnych o dodatniej gęstości Sznirelmana*

$$d(A) = \inf \frac{A(n) - 1}{n}$$

jest bazą dla $\mathbb{N}_0$, *tzn. przy pewnym* h: $\mathbb{N}_0 = \{a_1 + \ldots + a_h : a_i \in A\}$.

Tutaj

$$A(n) = \sum_{\substack{a \in A \\ a \leqslant n}} 1.$$

5. Twierdzenie (Mann 1942). *W oznaczeniach Twierdzenia* 4

$$d(A + B) \geqslant \min\{d(A) + d(B), 1\}.$$

Tutaj $A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$.

II. Równania diofantyczne i geometria diofantyczna. Użyte pojęcia: krzywe rodzaju 0, rodzaju 1, rodzaju > 1 są objaśnione w artykule Schinzel 1971.

1. Twierdzenie (Poincaré 1901 + Mordell 1922). *Punkty wymierne na krzywych gładkich rodzaju* 1 *w* $P^n(\mathbb{R})$, *jeśli istnieją, tworzą skończenie generowaną grupę abelową.*

2. Twierdzenie (Faltings 1983, medal Fieldsa 1986). *Każda krzywa rodzaju* > 1 *ma tylko skończoną liczbę punktów wymiernych.*

3. Twierdzenie (Wiles 1995, specjalne wyróżnienie MKM 1998). *Na krzywej* $x^l + y^l = 1$ (l *nieparzyste* > 1) *nie ma punktów wymiernych oprócz* $(1, 0), (0, 1)$ (Wielkie Twierdzenie Fermata).

4. Twierdzenie (Segré 1943, MKM 1950). *Na niezdegenerowanej powierzchni stopnia trzeciego albo nie ma punktów wymiernych, albo jest ich nieskończenie wiele.*

5. Twierdzenie (Elkies 1988). *Punkty wymierne leżą gęsto na powierzchni* $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ (rozwiązanie problemu Eulera z 1769 r.).

6 (Thue 1909 + Maillet 1919). Pełna charakteryzacja krzywych rodzaju 0, na których leży nieskończenie wiele punktów wymiernych o ograniczonym mianowniku.

7. Twierdzenie (Siegel 1929). *Krzywe rodzaju dodatniego mają tylko skończenie wiele punktów całkowitych.*

8. Twierdzenie (Baker 1967/68, medal Fieldsa 1970). *Wszystkie punkty całkowite na tych krzywych rodzaju* 0, *które mają ich skończoną liczbę dają się efektywnie wyznaczyć.*

9. Twierdzenie (Baker & Coates 1970, MKM 1970). *Wszystkie punkty całkowite na krzywych rodzaju* 1 *dają się efektywnie wyznaczyć.*

10. Twierdzenie (Matijasiewicz 1970, MKM 1970). *Nie istnieje algorytm dla rozstrzygnięcia czy dane równanie diofantyczne ma rozwiązanie całkowite* (rozwiązanie X problemu Hilberta).

11. Twierdzenie (Tijdeman 1976, MKM 1978). *Istnieje tylko skończenie wiele par kolejnych liczb naturalnych będących potęgami i można je efektywnie wyznaczyć* (częściowe rozwiązanie problemu Catalana z 1844 r.).

12. Twierdzenie (Schmidt 1999). *Dla dowolnego ciągu rekurencyjnego niezdegenerowanego u_n rzędu t określonego nad ciałem liczb zespolonych, liczba rozwiązań równania $u_n = 0$ nie przekracza* $\exp\exp\exp(3t\log t)$.

13. Twierdzenie (Weil 1948). *Niech $f(x,y) = 0$ przedstawia krzywą bez punktów osobliwych absolutnie nierozkładalną rodzaju g nad ciałem skończonym $\mathbb{F}_q$. Wówczas liczba N rozwiązań równania $f(x,y) = 0$ w $\mathbb{F}_q$ z uwzględnieniem punktów w nieskończoności spełnia nierówność*

$$|N - (q+1)| \leqslant 2g\sqrt{q}.$$

14 (Deligne 1974, medal Fieldsa 1978). Uogólnienie twierdzenia Weila na rozmaitości wyższych wymiarów (patrz Schinzel 1979, str. 3).

III. Geometria liczb i aproksymacje diofantyczne

1 (Woronoj 1908). Algorytm dla wyznaczenia najgęstszego regularnego rozmieszczenia kul w przestrzeni n-wymiarowej (dla $n = 2$ problem rozwiązany był przez Lagrange'a, dla $n = 3$ przez Gaussa, dla $n = 4, 5$ przez Korkina i Zołotariowa w latach 1872–77).

2. Twierdzenie (Hlawka 1943). *Niech K będzie zbiorem gwiaździstym* ([1]) *w $\mathbb{R}^n$, ograniczonym i symetrycznym względem* $\mathbf{0}$, *objętości mniejszej niż $2\zeta(n)$. Wówczas istnieje macierz unmodularna $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taka, że AK nie zawiera żadnego punktu całkowitego prócz* $\mathbf{0}$ (nieudowodnione twierdzenie Minkowskiego z 1893 r.).

([1]) Zbiór K symetryczny względem $\mathbf{0}$ nazywa się gwiaździstym, jeżeli $\boldsymbol{p} \in K$ pociąga za sobą $\lambda\boldsymbol{p} \in \operatorname{Int} K$ dla każdego $\lambda \in (-1,1)$.

3. Twierdzenie (Schmidt 1980, MKM 1983). *Dla* $n \geqslant c(d)$ *każda forma* $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ *stopnia nieparzystego* d *przyjmuje w punktach całkowitych* $\neq \mathbf{0}$ *wartości dowolnie bliskie* 0.

4. Twierdzenie (Margulis 1987). *Dla* $n \geqslant 3$ *każda forma kwadratowa nieokreślona* $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ *taka, że dla* $n < 5$ *jest* $f \neq \lambda g$, $g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots \ldots, x_n]$, *przyjmuje w punktach całkowitych* $\neq \mathbf{0}$ *wartości dowolnie bliskie* 0.

5. Twierdzenie (Roth 1955, medal Fieldsa 1958). *Dla każdej liczby algebraicznej niewymiernej* ϑ *i dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* $c > 0$, *że dla każdej liczby naturalnej* q,

$$\|q\vartheta\| \geqslant cq^{-1-\varepsilon},$$

gdzie $\|x\|$ *jest odległością* x *od najbliższej liczby całkowitej* (nieefektywne wzmocnienie twierdzenia Liouville'a z 1851 r.).

5a. Twierdzenie (Schmidt 1970, MKM 1970). *W oznaczeniach Twierdzenia* 5, *jeżeli liczby algebraiczne* $1, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ *są liniowo niezależne nad* $\mathbb{Q}$, *to dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* $c > 0$, *że dla każdej liczby naturalnej* q

$$\prod_{i=1}^{n} \|q\vartheta_i\| \geqslant cq^{-1-\varepsilon}.$$

6. Twierdzenie (Gelfond 1934, Schneider 1934). *Jeżeli* α, β *są liczbami algebraicznymi*, $\alpha \neq 0, 1$ *i* β *niewymierne*, *to każda wartość potęgi* α^β *jest przestępna* (rozwiązanie VII problemu Hilberta).

6a. Twierdzenie (A. Baker 1967, medal Fieldsa 1970). *Jeżeli liczby* α_i, β_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *są algebraiczne*, $\alpha_i \neq 0, 1$ *oraz* $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *są liniowo niezależne nad* $\mathbb{Q}$, *to każda wartość iloczynu* $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\beta_i}$ *jest przestępna.*

7. Twierdzenie (Nesterenko 1996). *Liczby* $\pi, e^\pi, \Gamma(1/4)$ *są algebraicznie niezależne* (wzmocnienie twierdzenia Lindemanna z 1882 r. o przestępności liczby π).

8. Twierdzenie (Ball & Rivoal 2001). *Istnieje nieskończenie wiele liczb nieparzystych* n, *dla których liczba* $\zeta(n)$ *jest niewymierna* (dla n parzystych niewymierność $\zeta(n)$ wynika z wymienionego wyżej twierdzenia Lindemanna i z wzoru Eulera dla $\zeta(n)$).

9. Twierdzenie (Weyl 1914). *Ciąg liczb rzeczywistych* a_n *jest równomiernie rozmieszczony* mod 1 (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby całkowitej* $h \neq 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h a_n} = 0.$$

(2) To znaczy $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\{a_n\}<\alpha,\, n\leqslant N} 1 = \alpha$ dla każdego $\alpha \in (0, 1)$.

IV. Analityczna teoria liczb

1. Twierdzenie (Heath-Brown & Patterson 1979). *Argumenty sześciennych sum Gaussa* $\sum_{n=0}^{p-1}\exp(2\pi i n^3/p)$ *dla liczb pierwszych* $p\equiv 1 \pmod 3$ *są rozłożone równomiernie* (obalenie hipotezy Kummera z 1842 r.).

2. Twierdzenie (Burgess 1957 + Graham & Ringrose 1990). *Najmniejsza niereszta kwadratowa* $n(p)$ *według modułu pierwszego* p *spełnia związki*

$$n(p)=O\Big(p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}\Big) \qquad \textit{dla każdego } \varepsilon>0$$

(wzmocnienie wyniku Gaussa z 1801 r.),

$$n(p)=\Omega(\log p\log\log\log p).$$

3. Twierdzenie (Siegel 1935). *Dla każdego* $\varepsilon>0$ *istnieje takie* $c>0$, *że dla każdego wyróżnika* d *ciała kwadratowego mamy*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{n}\right)\frac{1}{n}>cd^{-\varepsilon}$$

(nieefektywne wzmocnienie wyniku Dirichleta z 1837 r.) ([3]).

4. Twierdzenie (Selberg 1942, medal Fieldsa 1950). *Istnieje stała* $c>0$ *taka, że co najmniej* c *procent wszystkich zer funkcji* $\zeta(s)$ *Riemanna leży na prostej krytycznej* $\Re s=\frac{1}{2}$ (najlepsza znana wartość $c=40,88$ – Conrey 1988; krok w kierunku hipotezy Riemanna z 1859 r.).

5. Twierdzenie (Korobow 1958, Winogradow 1958 + Littlewood 1914). *Istnieje taka stała* $c>0$, *że liczba* $\pi(x)$ *liczb pierwszych* $\leqslant x$ *spełnia związki*

$$\pi(x)-\operatorname{li}x=O(x\exp(-c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}))$$

(wzmocnienie twierdzenia de la Vallée Poussina z 1899 r.),

$$\pi(x)-\operatorname{li}x=\Omega_{\pm}\left(\frac{x^{1/2}}{\log x}\log\log\log x\right)$$

(obalenie przypuszczenia Riemanna z 1859 r.).

6. Twierdzenie (Hoheisel 1930 + Rankin 1938). *Istnieje taka stała* $c>0$, *że* n*-ta liczba pierwsza* p_n *spełnia związki*

$$p_{n+1}-p_n=O(p_n^{1-c})$$

(wzmocnienie twierdzenia Czebyszewa z 1852 r.),

$$p_{n+1}-p_n=\Omega\left(\log p_n\frac{\log\log p_n\cdot\log\log\log\log p_n}{(\log\log\log p_n)^2}\right).$$

([3]) $\left(\frac{d}{n}\right)$ jest to tzw. symbol Kroneckera, patrz Narkiewicz 1986, str. 294.

(Najlepsza opublikowana wartość $c = 0{,}475$ – R. Baker, Harman & Pintz 2001.).

7. Twierdzenie (Linnik 1944). *Istnieje taka stała L, że w każdym postępie arytmetycznym $ak+b$, gdzie $(a,b)=1$ i $0<b<a$, jest liczba pierwsza $p = O(a^L)$* (wzmocnienie wyniku Mertensa z 1897 r.; najlepsza znana wartość $L = 5{,}5$ – Heath-Brown 1992).

8. Twierdzenie (Bombieri 1965, medal Fieldsa 1974). *Niech $\pi(x;a,b)$ będzie liczbą liczb pierwszych $\leqslant x$ w postępie $ak+b$. Dla każdego A istnieje takie B, że*

$$\sum_{a\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{(a,b)=1} \max_{y\leqslant x} \left|\pi(y;a,b) - \frac{\operatorname{li} y}{\varphi(a)}\right| \leqslant \frac{x}{(\log x)^A}$$

(krok w kierunku uogólnionej hipotezy Riemanna z 1884 r.) ([4]).

9 (Selberg 1949 – medal Fieldsa 1950, Erdős 1949). Elementarne dowody twierdzenia o liczbach pierwszych (pierwsze dowody nieelementarne podali Hadamard i de la Vallée Poussin w 1896 r., patrz Schinzel 1997).

10. Twierdzenie (Bredihin 1963 + Friedlander & Iwaniec 1998 + Heath-Brown 2001). *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych każdej z postaci x^2+y^2+a, x^2+y^4, x^3+2y^3 $(x,y\in\mathbb{N}_0)$.*

11. Twierdzenie (Alford, Granville & Pomerance 1994, MKM 1994). *Istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych n takich, że $n \mid a^n - a$ dla każdego a* (wzmocnienie twierdzenia Jeansa z 1897 r. o istnieniu nieskończenie wielu liczb złożonych n takich, że $n \mid 2^n - 2$) ([5]).

12. Twierdzenie (Odlyzko & te Riele 1985). *Dla funkcji Möbiusa $\mu(n)$ zachodzi wzór*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{x}\mu(n)}{\sqrt{x}} > 1{,}006$$

(obalenie hipotezy Mertensa z 1897 r.) ([6]).

13. Twierdzenie (Erdős & Kac 1940, MKM 1954). *Odchylenia liczby różnych czynników pierwszych liczby n od $\log\log n$ mierzone w stosunku do $\sqrt{\log\log n}$ mają rozkład normalny.*

14 (wielu autorów od 1909 do 1986, patrz Narkiewicz 1986, rozdz. IV, §3). *Wyznaczenie dla wszystkich $n>2$ najmniejszej liczby naturalnej $g(n)$ takiej, że każda liczba naturalna jest sumą nie więcej niż $g(n)$ n-tych potęg liczb naturalnych* (rozwiązanie problemu Waringa z 1770 r.).

([4]) $\varphi(a) = \sum_{b\leqslant a,\,(a,b)=1} 1$.

([5]) Wynik ten ma znaczenie w kryptografii.

([6]) $\mu(n) = (-1)^k$, jeśli n jest iloczynem k różnych czynników pierwszych, $=0$ dla pozostałych $n>1$.

15. Twierdzenie (Winogradow 1937). *Każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych* (krok w kierunku hipotezy Goldbacha z 1742 r.).

16. Twierdzenie (Chen 1973). *Każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej i iloczynu co najwyżej dwóch czynników pierwszych* (krok w kierunku hipotezy Goldbacha z 1742 r.).

17. Twierdzenie (Hardy & Ramanujan 1918). *Dla liczby $p(n)$ rozkładów liczby n na sumę nierosnących składników naturalnych zachodzi wzór asymptotyczny*

$$p(n) = \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + o(1)\right)\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right)}{n}.$$

V. Algebraiczna teoria liczb. Użyte pojęcia ideału, normy ideału i klasy ideałów ciała algebraicznego są objaśnione w książce Narkiewicz 1977, rozdział IX, §2.

1. Twierdzenie (Gross & Zagier 1986, MKM 1986). *Wszystkie wyróżniki $d < 0$, dla których ciało $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ma daną liczbę klas, dają się efektywnie wyznaczyć* (rozwiązanie problemu Gaussa z 1801 r.).

2 (Fueter 1924–27, MKM 1932). Opis wszystkich abelowych rozszerzeń ciał kwadratowych urojonych (poprawiona wersja marzenia młodości Kroneckera, opublikowanego w 1880 r.).

3 (Takagi 1920–22). Stworzenie teorii ciał klas opisującej arytmetykę rozszerzeń abelowych dowolnego ciała liczbowego (uogólnienie wyników Hilberta z lat 1898–99).

4. Twierdzenie (Czebotariow 1926). *Niech k będzie skończonym rozszerzeniem $\mathbb{Q}$, a $K = k(\alpha)$ normalnym rozszerzeniem k. Gęstość Kroneckera* ([7]) *zbioru ideałów pierwszych $\mathfrak{p}$ ciała k takich, że $\alpha^p \equiv \alpha^\sigma \pmod{\mathfrak{P}}$, gdzie p jest liczbą pierwszą podzielną przez $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ ideałem pierwszym ciała K dzielącym $\mathfrak{p}$, a σ elementem grupy Galois G rozszerzenia K/k, równa jest gęstości klasy elementu σ w grupie G* (wzmocnienie twierdzenia Frobeniusa z 1896 r.).

5 (Artin 1927). Ogólne prawo wzajemności (częściowe rozwiązanie IX problemu Hilberta).

([7]) Gęstość Kroneckera zbioru S ideałów pierwszych $\mathfrak{p}$ z normą $N\mathfrak{p}$ jest to granica

$$\lim_{s\to 1_+} \frac{-1}{\log(s-1)} \sum_{\mathfrak{p}\in S} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}.$$

6. Twierdzenie (Gołod i Szafarewicz 1964). *Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ i każdej liczby pierwszej p dzielącej n istnieje nieskończenie wiele ciał stopnia n, które nie dają się zanurzyć w żadne ciało z liczbą klas niepodzielną przez p.*

Dodane w korekcie. P. Mihăilescu wykazał w 2002 r., że prócz 8 i 9 nie ma dwóch kolejnych liczb naturalnych będących potęgami (patrz wyżej II.11).

Prace cytowane

W. R. Alford, A. Granville, C. Pomerance 1994, *There are infinitely many Carmichael numbers*, Ann. of Math. (2) 139, 703–722.

E. Artin 1927, *Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5, 353–363.

A. Baker 1967, *Linear forms in logarithms of algebraic numbers II*, Mathematika 14, 102–107.

R. Baker 1967/68, *Contributions to the theory of Diophantine equations I. On the representation of integers by binary forms*, Philos Trans. Roy. Soc. London Ser. A 263, 173–191.

A. Baker, J. Coates 1970, *Integer points on curves of genus* 1, Proc. Cambridge Philos. Soc. 67, 595-602.

A. Baker, G. Harman, J. Pintz 2001, *The difference between consecutive primes, II*, Proc. London Math. Soc. (3) 83, 532–567.

K. Ball, T. Rivoal 2001, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zéta aux entiers impairs*, Invent. Math. 146, 193–207.

E. Bombieri 1965, *On the large sieve*, Mathematika 12, 201–225.

B. M. Bredihin 1963, *Binarnyje additivnyje problemy nieopriedielennogo tipa II, Analog problemy Hardi–Littlwuda*, Izw. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 27, 577–612.

D. Burgess 1957, *The distribution of quadratic residues and non-residues*, Mathematika 4, 106–112.

J. R. Chen 1973, *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica 16, 157–176.

B. Conrey 1989, *More than two fifth of the zeros of the Riemann zeta function are the critical line*, J. Reine Angew. Math. 399, 1–26.

N. G. Czebotariow (Tschebotaröw) 1926, *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören*, Math. Ann. 95, 191–228.

P. Deligne 1974, *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES 43, 273–307.

N. D. Elkies 1988, *On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$*, Math. Comp. 51, 824–835.

P. Erdős 1949, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35, 374–384.

P. Erdős, M. Kac 1940, *The gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions*, Amer. J. Math. 62, 738–742.

G. Faltings 1983, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. 73, 349–366; erratum, ibid. 75, 381.

J. Friedlander, H. Iwaniec 1998, *The polynomial X^2+Y^4 captures its primes*, Ann. of Math. (2) 148, 965–1040.

R. F u e t e r 1924–27, *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der Elliptischen Funktionen*, Berlin.

A. O. G e l f o n d 1934, *Sur le septième problème de Hilbert*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 7, 623–634.

E. S. G o ł o d, I. R. S z a f a r e w i c z 1964, *O basznie polej kłassow*, ibid. 28, 261–272.

W. T. G o w e r s 2001, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Funct. Anal. 11, 465–588.

S. G r a h a m, C. J. R i n g r o s e 1990, *Lower bounds for least quadratic non-residues*, w: Analytic Number Theory, Birkhäuser, 269–309.

B. G r o s s, D. Z a g i e r 1986, *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math. 84, 225–320.

G. H. H a r d y, S. R a m a n u j a n 1918, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. (2) 17, 75–115.

D. R. H e a t h - B r o w n 1992, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions and the least prime in an arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. (3) 64, 265–338.

D. R. H e a t h - B r o w n 2001, *Primes represented by* $x^3 + 2y^3$, Acta Math. 186, 1–84.

D. R. H e a t h - B r o w n, S. J. P a t t e r s o n 1979, *The distribution of Kummer sums at prime arguments*, J. Reine Angew. Math. 310, 111–130.

E. H l a w k a 1943, *Zur Geometrie der Zahlen*, Math. Z. 49, 285–312.

G. H o h e i s e l 1930, *Primzahlprobleme in der Analysis*, S. B. Preuß. AW Phys.-Math. Kl., 580–588.

N. M. K o r o b o w 1958, *Ocenki summ Wejla i raspriedielenije prostych czisieł*, Dokł. Akad. Nauk SSSR 123, 28–31 ([8]).

J. W. L i n n i k 1944, *On the least prime in an arithmetic progression, I. The basic theorem*, Mat. Sb. (2) 15, 139–178; *II. The Deuring-Heilbronn phenamenon*, ibid. 347–368.

J. E. L i t t l e w o o d 1914, *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris 158, 1869–1872.

E. M a i l l e t 1919, *Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coeficients entiers*, ibid. 168, 217–220.

H. B. M a n n 1942, *A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers*, Ann. of Math. (2) 43, 523–527.

G. A. M a r g u l i s 1987, *Forms quadratiques indéfinies et flots unipotents sur les espaces homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 304, 249–253.

J. W. M a t i j a s i e w i c z 1970, *Diofantowost' pierieczislimych mnożestw*, Dokł. Akad. Nauk SSSR 191, 278–282.

L. J. M o r d e l l 1922, *On the rational solutions of the indeterminate equations of third and fourth degrees*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 21, 179–192.

W. N a r k i e w i c z 1977, *Teoria liczb*, PWN.

W. N a r k i e w i c z 1986, *Classical Problems in Number Theory*, PWN.

J. W. N e s t e r e n k o 1996, *Modularnyje funkcii i woprosy transcendientnosti*, Mat. Sb. 187, 65–96.

A. M. O d l y z k o, H. J. J. t e R i e l e 1985, *Disproof of the Mertens conjecture*, J. Reine Angew. Math. 357, 138–160.

H. P o i n c a r é 1901, *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*, J. Math. Pures Appl. 149, 97–116.

R. A. R a n k i n 1938, *The difference between consecutive prime numbers*, J. London Math. Soc. 13, 242–247.

([8]) W artykule Schinzel 1997 podałem omyłkowo odsyłacz do innej pracy Korobowa.

K. F. Roth 1955, *Rational approximation to algebraic numbers*, Mathematika 2, 1–20; corrigendum, 168.

A. Schinzel 1971, *Równania diofantyczne*, Wiadom. Mat. 12, 227–232.

A. Schinzel 1979, *Postęp w teorii liczb w latach 1966–1978*, ibid. 22, 1–11.

A. Schinzel 1997, *Sto lat twierdzenia o liczbach pierwszych*, ibid. 33, 91–98.

W. M. Schmidt 1970, *Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals*, Acta Math. 125, 189–201.

W. M. Schmidt 1980, *Diophantine inequalities for forms of odd degree*, Adv. Math. 38, 128–151.

W. M. Schmidt 1999, *The zero multiplicity of linear recurrence sequences*, Acta Math. 182, 243–282.

T. Schneider 1934, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. Transzendenz von Potenzen*, J. Reine Angew. Math. 172, 65–69.

B. Segre 1943, *On ternary non-homogeneous cubic equations with more than one rational solution*, J. London Math. Soc. 18, 88–100.

A. Selberg 1942, *On the zeros of Riemann's zeta-function on the critical line*, Arch. Math. Naturvid. 48, 101–114.

A. Selberg 1949, *An elementary proof of the prime number theorem*, Ann. of Math. (2) 50, 305–313.

C. L. Siegel 1929, *Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen*, Abh. Preuß. AW Phys. Math. Kl., No. 1.

C. L. Siegel 1935, *Über die Classenzahl quadratischer Zahkörper*, Acta Arith. 1, 83–86.

E. Szemerédi 1975, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, ibid. 27, 199–245.

L. Sznirelman 1930, *Über additive Eigenschaften von Zahlen*, Ann. Inst. Polytechn. Novočerkask. = Math. Ann. 107 (1933), 649–690.

T. Takagi 1920, *Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers*, J. Coll. Sci. Tokyo 41.

T. Takagi 1922, *Über das Reziprozitätsgesetz in einen beliebigen algebraischen Zahlkörper*, ibid. 44.

A. Thue 1909, *Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen*, J. Reine Angew. Math. 135, 284–305.

R. Tijdeman 1976, *On the equation of Catalan*, Acta Arith. 29, 197–209.

B. L. van der Waerden 1927, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Arch. Wiskunde 15, 212–216.

A. Weil 1948, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Herrman et Cie, Paris.

H. Weyl 1916, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Ann. 77, 313–352.

A. Wiles 1995, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. of Math. (2) 141, 443–551.

I. M. Winogradow 1958, *Nowaja ocenka funkcii* $\zeta(1+it)$, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 22, 161–164.

G. F. Woronoj (Voronoï) 1908, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites*, J. Reine Angew. Math. 133, 97–178.