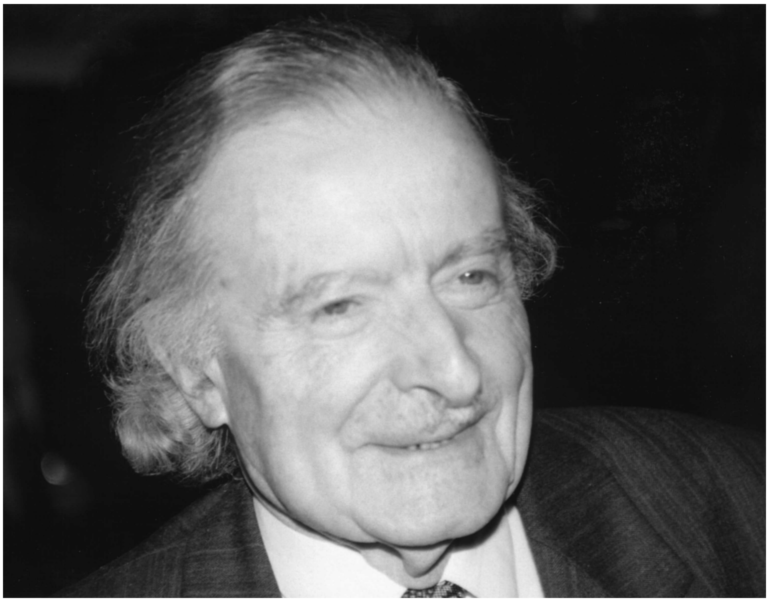
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXIX (2003)

Wiesław Pawłucki (Kraków)

# Stanisław Łojasiewicz (1926–2002)



W ubiegłym roku nauka odniosła niepowetowaną stratę. Zmarł profesor Stanisław Łojasiewicz, którego działalność związana była z Uniwersytetem Jagiellońskim, a także z Instytutem Matematycznym Polskiej Akademii Nauk. Doniosłość odkryć naukowych Stanisława Łojasiewicza stawia go w rzędzie najwybitniejszych matematyków XX wieku. Jego dorobek wydany drukiem liczy ponad 70 pozycji i dotyczy równań różniczkowych, mechaniki teoretycznej, analizy różniczkowej, teorii dystrybucji i geometrii analitycznej.

Stanisław Łojasiewicz urodził się 9 października 1926 roku w Warszawie. We wczesnej młodości interesował się szczególnie muzyką i matematyką, i chociaż zainteresowania muzyczne trwały u niego przez całe życie, ostatecznie wybrał zawód matematyka. Zaraz po zakończeniu wojny w 1945 roku rozpoczął studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim. Tam także, w 1947 roku – jeszcze w czasie własnych studiów – rozpoczął pracę jako asystent-wolontariusz. Początkowo, pod wpływem profesora

Tadeusza Ważewskiego zajmował się głównie równaniami różniczkowymi, przede wszystkim zwyczajnymi, badając zwłaszcza efekty asymptotyczne. Tej właśnie tematyki dotyczyła jego dysertacja doktorska zatytułowana *Sur l'allure asymptotique des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage de points singulier*, obroniona 3 lipca 1950 roku. Innym jego osiągnięciem z tamtego okresu jest opis *wahadła Kapicy*, tzn. wahadła, którego punkt zawieszenia wykonuje drgania odpowiadające pewnym warunkom.

Następnie zainteresowania naukowe Stanisława Łojasiewicza zwróciły się w kierunku teorii dystrybucji, której systematyczne opracowanie przedstawił w pierwszej połowie lat pięćdziesiątych wybitny matematyk francuski Laurent Schwartz. Pierwsze prace Stanisława Łojasiewicza z tej dziedziny dotyczyły ustalenia zmiennych w dystrybucji i granicy dystrybucji w punkcie, ale prawdziwie międzynarodowy rozgłos przyniosło mu rozwiązanie postawionego przez Schwartza, niezwykle trudnego *problemu dzielenia*. Dla krótkiego przedstawienia tego problemu załóżmy, że $P$ jest dowolnym niezerowym wielomianem na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $P(D)$ oznacza odpowiadający mu poprzez transformację Fouriera operator różniczkowy. Z punktu widzenia teorii operatorów różniczkowych o stałych współczynnikach bardzo ważnym pytaniem jest

*Czy dla każdej dystrybucji temperowanej $S$ na $\mathbb{R}^n$ istnieje dystrybucja temperowana $T$ spełniająca równanie*

$$P(D)S = T?$$

Pytanie to jest równoważne analogicznemu pytaniu dla równania

$$PS = T.$$

L. Schwartz zauważył, że jeśli zanurzy się przestrzeń $\mathbb{R}^n$ w sferę $n$-wymiarową $\mathbb{S}^n$ za pomocą projekcji stereograficznej, to dystrybucje temperowane na $\mathbb{R}^n$ interpretują się jako dystrybucje na $\mathbb{S}^n$, dzięki czemu problem lokalizuje się, sprowadza się do analogicznego pytania dla dystrybucji na dowolnym podzbiorze otwartym $G$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jest rzeczą naturalną rozszerzyć to pytanie zastępując wielomian $P$ przez dowolną funkcję analityczną $F \not\equiv 0$, określoną na zbiorze $G$ (gdy $F$ jest tylko klasy $\mathcal{C}^\infty$, odpowiedź jest ewidentnie negatywna.) W tej właśnie wersji pytanie to (znane jako problem dzielenia) pojawiło się w monografii Schwartza *Théorie des distributions*. Odpowiedź pozytywną otrzymali w 1958 roku – równocześnie i niezależnie od siebie – Stanisław Łojasiewicz (dla dowolnych funkcji analitycznych) oraz Lars Hörmander (dla wielomianów).

Dowód Łojasiewicza twierdzenia o dzieleniu oparty jest na konstrukcji pewnego rozkładu zbioru

$$Z = \{x \in Q : F(x) = 0\}$$

zer funkcji analitycznej $F$ w stosownie dobranym otoczeniu $Q \subset G$ dowolnie ustalonego punktu $a \in G$:

$$Z = \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{i} \Gamma_i^k$$

rozkłada się na skończoną ilość podrozmaitości analitycznych $\Gamma_i^k$ wymiarów $k = n-1, \ldots, 1, 0$. Rozkład ten ma spełniać szereg warunków, m.in. warunek *stratyfikacji*: dla każdego *płata* $\Gamma_i^k$ jego *skraj* $(\overline{\Gamma_i^k} \setminus \Gamma_i^k) \cap Q$ ma być sumą pewnych płatów wymiaru $< k$, czyli pewnych $\Gamma_i^l$, $l < k$. Ponadto z konstrukcji rozkładu wynika, że zbiory $\Gamma_i^k$, jak również ich domknięcia $\overline{\Gamma_i^k}$ sa *zbiorami semi-analitycznymi*, tzn są opisane przez skończone układy równań i nierówności analitycznych (zob. definicja niżej).

Podstawową rolę w dowodzie odgrywa również nierówność

$$|F(x)| \geqslant C dist(x, Z)^N$$

w otoczeniu punktu $a$, z pewnym wykładnikiem $N > 0$ i pewną stałą $C > 0$. Jest ona prawdziwa dla dowolnej funkcji analitycznej i szeroko obecnie znana jako *nierówność Łojasiewicza*. Wynika ona z następującej ogólniejszej nierówności Łojasiewicza

$$dist(x, B) \geqslant C dist(x, A \cap B)^N, \quad \text{gdy } x \in A,$$

spełnionej lokalnie dla dowolnych semi-analitycznych domkniętych podzbiorów $\mathbb{R}^n$. W dowodzie wykorzystuje się tę nierówność biorąc jako $A$ i $B$ domknięcia płatów $\Gamma_i^k$.

Rozwinięcie idei zawartych w dowodzie doprowadziło profesora Łojasiewicza do stworzenia teorii zbiorów semi-analitycznych, czyli *geometrii semi-analitycznej*. Podzbiór $A$ dowolnej rozmaitości analitycznej rzeczywistej $M$ nazywamy semi-analitycznym, jeżeli każdy punkt $a \in M$ posiada otoczenie $Q$ takie, że

$$A \cap Q = \bigcup_{i} \bigcap_{j} A_{ij} \quad (i \in I, j \in J),$$

z $I$ oraz $J$ skończonymi, gdzie każdy ze zbiorów $A_{ij}$ jest postaci $A_{ij} = \{x \in Q : f_{ij}(x) = 0\}$, bądź postaci $A_{ij} = \{x \in Q : f_{ij}(x) > 0\}$, z pewną funkcją analityczną $f_{ij}$ określoną na $Q$.

Podzbiory semi-analityczne tworzą algebrę Boole'a zbiorów o interesujących własnościach topologicznych (zamkniętość ze względu na podstawowe operacje topologiczne, lokalna skończoność składowych spójnych, triangulowalność), metrycznych (nierówność Łojasiewicza) i różniczkowych (np. osiągalność każdego punktu z domknięcia zbioru za pomocą łuku klasy $\mathcal{C}^1$). Podstawy geometrii semi-analitycznej zawarł profesor Łojasiewicz w znanej i do dzisiaj często cytowanej monografii *Ensembles semi-analytiques* (wyd. Inst.

Hautes Études Scientifiques; 1965), gdzie rozwinął także podstawy *geometrii semi-algebraicznej* dotyczącej *podzbiorów semi-algebraicznych* $\mathbb{R}^n$, tzn. opisanych (globalnie) przez skończone układy równań i nierówności wielomianowych, która rozwinęła się w odrębną dyscyplinę i znalazła interesujące zastosowania, m.in. w teorii robotów. W monografii tej bierze również swój początek *geometria sub-analityczna* (rozwinięta w pracach A. M. Gabrielowa, H. Hironaki i innych), badająca *podzbiory sub-analityczne*, ogólniejsze od semi-analitycznych. Mówimy mianowicie, że podzbiór $E$ rozmaitości analitycznej $M$ jest sub-analityczny, jeśli dla każdego punktu $a \in M$ istnieje jego otoczenie $U$ takie, że

$$E \cap U = \pi(A),$$

gdzie $A$ jest podzbiorem semi-analitycznym względnie zwartym rozmaitości postaci $M \times N$, z $N$ rozmaitością analityczną, zaś $\pi : M \times N \longrightarrow M$ jest naturalnym rzutowaniem. Okazało się, że większość cennych własności zbiorów semi-analitycznych wymienionych wyżej przenosi się na zbiory sub-analityczne, dzięki czemu klasa ta stała się użytecznym narzędziem w różnych działach analizy matematycznej. Na znaczenie teorii Łojasiewicza zwracał uwagę Grothendieck w swoim *Esquisse d'un Programme*, który w środowisku matematycznym krążył w nie opublikowanej formie od 1984 r., gdzie przewidywany jest dalszy rozwój badań w tym kierunku. Jako daleko idące uogólnienie geometrii semi- i sub-analitycznej, jak również geometrii semi-algebraicznej, może być traktowana *teoria struktur o-minimalnych* rozwinięta w ostatnim dwudziestoleciu przez logików zajmujących się teorią modeli.

W latach 1958–60 Stanisław Łojasiewicz przebywał na uniwersytetach w Kingston (Ontario), w Chicago, w Berkeley oraz w Institute of Avanced Studies w Princeton. W roku 1962 otrzymał nominację profesorską. W tym też roku wyjechał po raz pierwszy, na zaproszenie Aldo Andreottiego, do Uniwersytetu w Pizie, gdzie opracował swoje znane twierdzenie o triangulacji zbiorów semi-analitycznych. W 1964 r. z inicjatywy UNESCO prowadził cykl wykładów na Uniwersytecie w Buenos Aires. W latach 1964–65 przedstawił na Uniwersytecie w Paryżu pierwsze systematyczne opracowanie teorii zbiorów semi-analitycznych. Podczas swojego następnego pobytu we Francji w latach 1967–68, w Institut des Hautes Études Scientifiques, profesor Łojasiewicz zajmował się problemami analizy różniczkowej, przede wszystkim w związku z *twierdzeniem przygotowawczym Malgrange'a-Mathera*, stanowiącym fundamentalne narzędzie w teorii osobliwości (a w szczególności w *teorii katastrof* Thoma). Owocem tych badań był m.in. piękny i zadziwiająco krótki dowód twierdzenia Malgrange'a-Mathera, przedstawiony na sympozjum z teorii osobliwości w Liverpool w 1970 r., wraz z innymi rezultatami dotyczącymi pól whitneyowskich i determinowalności dżetów. Szczególnym wyrazem uznania rangi osiągnięć profesora Łojasiewicza było zaproszenie go do wygłoszenia wykładu plenarnego o zbiorach semi-analitycznych na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Nicei w 1970 roku.

W 1971 r. został wybrany do Polskiej Akademii Nauk, zaś w 1980 r. został jej członkiem rzeczywistym. W latach siedemdziesiątych kontynuował ożywioną współpracę z matematykami we Włoszech (Uniwersytet w Pizie) i we Francji. W roku akademickim 1976/77 przebywał również w Instituto de Matematica Pura e Aplicada w Rio de Janeiro. W tym też okresie rozpoczął regularne seminaria z teorii osobliwości i analizy różniczkowej na Uniwersytecie Jagiellońskim, które obok licznych wykładów prowadził z ogromnym zaangażowaniem aż do ostatnich swoich dni. Styl wykładów profesora Łojasiewicza cechowała wyjątkowa precyzja i zwięzłość. Dotyczy to również jego podręczników z teorii funkcji rzeczywistych i geometrii analitycznej zespolonej. Śmierć przerwała jego pracę nad obszerną monografią o geometrii semi- i sub-analitycznej, przygotowywaną wspólnie z M.-A. Zurro-Moro.

Ogromny autorytet profesora Łojasiewicza znalazł wyraz w powołaniu go do Papieskiej Akademii Nauk (1983 r.), Akademii Europejskiej (1989 r.) i Polskiej Akademii Umiejętności (członek czynny od 1989 r.), a także w przyznaniu mu prestiżowych nagród i wyróżnień; m.in. Medalu Merentibus, Krzyża Komandorskiego z Gwiazdą Orderu Odrodzenia Polski, Nagrody im. Alfreda Jurzykowskiego, Nagrody Prezesa Rady Ministrów za Wybitny Dorobek Naukowy, Medalu Komisji Edukacji Narodowej, Medalu im. Wacława Sierpińskiego.

Intensywna działalność naukowa i dydaktyczna profesora Stanisława Łojasiewicza przyciągnęła grupę uczniów, z której z czasem wyrosła szkoła naukowa. Wśród jej przedstawicieli, do których piszący te słowa ma zaszczyt się zaliczać, są nie tylko matematycy z Krakowa, ale także z Warszawy, Gdańska, Łodzi, Kielc, oraz licznych ośrodków za granicą (we Francji, Włoszech, Holandii, Niemczech, USA, Kanadzie, Japonii).

## Spis publikacji Stanisława Łojasiewicza

### Artykuły naukowe


1. *Sur les circles contenus á l'intérieur des courbes planes fermées*, Bull. Internat. Acad. Polon. Sci. Lett. (1949), 1–2.
2. *Une démonstration du théorème de Fatou*, Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1950), 241–244.
3. *Sur la relation entre la largeur d'un contour plan et de la déviation de ses arcs partiels*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), 21–42.
4. *Solution générale de l'équation fonctionnelle* $f(f(..f(x)..)) = g(x)$, Ann. Soc. Polon. Math. 24(1951), 88–91.
5. *Sur une propriété caractéristique de la spirale logarithmique*, Ann. Soc. Polon. Math. 24 (1951),no. 2 , 88–91.
6. *Sur un théorème de Kneser*, Ann. Soc. Polon. Math. 24 (1951), 148–152.
7. *Sur l'allure asymptotique des intégrales du systéme d'équations différentielles au voisinage de point singulier*, Ann. Polon. Math. 1.1 (1955), 34–72.

8. *Sur la formule de Green-Gauss-Ostrogradsky*, Ann. Polon. Math. 1.2 (1955), 306–325.
9. *Sur un effet asymptotique dans les équationes différentielles dont les seconds membres contiennent les termes périodiquede pulsation de d'amplitude tendant á l'infini*, Ann. Polon. Math. 1.2 (1955), 388–413.
10. *O zagadnieniu iteracji*, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat. (1955), 19–23.
11. *Funkcje wypukłe a twierdzenie o przyrostach skończonych*, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat. (1957), 15–18.
12. *Pewne twierdzenie o regularności funkcji wielu zmiennych*, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat. (1957), 21–24.
13. *Sur le problème de Cauchy pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dans le cas hyperbolique de deux variables independantes*, Ann. Polon. Math. 3.1 (1956), 87–117.
14. *Un théorème sur la valeur moyenne $\Theta$ dans la formule des accroissements finis*, Ann. Polon. Math. 3.1(1956), 118–125 (współautor: St. Gołąb).
15. *Über eine Definition des Wertes einer Distribution*, Bull. Polon. Acad. Sci. Cl. III, 3, no. 9 (1955), 479–481 (współautorzy: J. Wloka i Z. Zieleźny).
16. *Sur la valeur d'une distribution dans un point*, Bull. Polon. Acad. Sci. Cl. III, 4, no. 5 (1956), 239–242.
17. *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*, Studia Math. 16 (1957), 1–36.
18. *Sur la fixation des variables dans une distribution*, Studia Math. 17(1958), 1–36.
19. *Sur les équations du mouvement d'un système holonome*, Ann. Polon. Math. 5 (1958/1959), 247–256.
20. *Sur l'identification d'une classe de fonctions (non nècessairement sommables) avec des distribution*, C. R. Acad. Sci. Paris, 246 (1958), 872–874.
21. *Division d'une distribution par une fonction analytique des variables réelles*, C. R. Acad. Sci. Paris, 246 (1958), 683–686.
22. *Une remarque sur la multiplication des distributions de la classe $H_\infty$*, Colloq. Math. 7 (1959) no.1 , 57–60 (współautor: Z. Zieleźny)
23. *Sur le problème de la division*, Studia Math. 18 (1959), 87–136, oraz Rozprawy Matematyczne 22 (1961).
24. *Théorème de Fatou pour les équations elliptiques*, 1963 Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962), str.str. 91–94, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.
25. *Une propriètè topologique des sous-ensembles analytiques réels*, 1963 Les Équations aux Derivées Partielles (Paris, 1962), str.str. 87–89, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.
26. *Triangulation of semi-analytic sets*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. III, 18 (1964), 449–474.
27. *Sur les ensembles semi-algébriques*, Symposia Ist. Naz. Acta Matematica, III (1970), 233-239.
28. *Whitney fields and Malgrange-Mather Preparation Theorem*, Proc. Liverpool Singularities Symposium I, (1971), 106-115.
29. *A converse of a Kuiper-Kuo Theorem*, Proc. Liverpool Singularities Symposium I, (1971), 254–261 (współautor: J. Bochnak).
30. *Remark on Finitely Determined Analytic Germs*, Proc. Liverpool Singularities Symposium I, (1971), 262–270.
31. *Sur les ensembles semi-analytiques*, Proc. International Congress of Mathematicians, Nice, 2(1970), 237–241.
32. *Semi-analytic sets*, Global Analysis and Applications, Internat. Atomic Agency, III (1974), 25–29.

33. *Stratifications des ensembles analytiques avec les proprièt̀s (A) et (B) de Whitney*, Colloq. Interant. C.N.R.S. 208 (1974), 116–130.
34. *Mayer-Vietoris Sequences for Complexes of Differential Operators*, Bull. Amer. Math. Society, 82 (1976), 487–490 (współautorzy: A. Andreotti, C. D. Hill i B. MacKichan).
35. *Complexes of Differential Operators. The Mayer-Vietoris sequence*, Invent. Math., 35 (1976), 43–86 (współautorzy: A. Andreotti, C. D. Hill i B. MacKichan)
36. *On the Weierstrass Preparation Theorem*, Geometry and Topology, Rio de Janeiro 1976, Springer Lecture Notes 597, 360–398.
37. *Valeurs au bord des formes holomorphes*, Proc. Internat. Conferences, Cortona, (1976-77), 222-246 (współautor: G. Tomassini).
38. *On holomorphic extendibility of functions on generic real analytic submanifolds*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math., 27 (1979), no. 2, 217–220 (współautor: J. Siciak).
39. *Sur la semi-analycité des images inverses par l'application-tangente*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), no. 7–8, 525–527.
40. *Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), no. 7–8, 529–536 (współautorzy: Z. Denkowska i J. Stasica).
41. *Sur le théorème du complémentaire pour les ensembles sous-analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), no. 7–8, 537–539 (współautorzy: Z. Denkowska i J. Stasica).
42. *Remarque sur les biholomorphismes polynomiales*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), no. 9, 671.
43. *Sur l'algébricité des ensembles analytiques complexes*, J. Reine Angew. Math. 329 (1981), 215–220 (współautorka: E. Fortuna).
44. *Séparation régulière avec un paramètre pour les sous-analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), no. 7–8, 325–328 (współautorka: K. Wachta).
45. *Sur le nombre des composantes connexes de la section d'un sous-analytique*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), no. 7-8, 333–335 (współautorzy: Z. Denkowska i J. Stasica).
46. *Biholomorphismes des variétés grassmanniennes*, Seminari di Geometria, 1982-1983 (Bologna 1982/1983), 93–113, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1984.
47. *Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique*, Seminari di Geometria, 1982-1983 (Bologna 1982/1983), 115–117, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1984.
48. *Sur un théorème de la division*, Seminari di Geometria, 1982–1983 (Bologna 1982/1983), 119–123, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1984.
49. *Sur la séparation régulière*, Seminari di Geometria, 1985 (Bologna 1985), 119–121, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1986.
50. *Sur les cônes semi-analytiques*, Seminari di Geometria, 1985 (Bologna 1985), 123–125, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1986.
51. *Algébricité des germes analytiques*, J. Reine Angew. Math. 374 (1987) 208–213 (współautorzy: E. Fortuna i M. Raimondo).
52. *Stratifications sous-analytiques. Condition de Verdier*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 34 (1986), no. 9-10, 531–539 (współautorzy: J. Stasica i K. Wachta).
53. *Stratifications et triangulations sous-analytiques*, Seminari di Geometria, 1986 (Bologna, 1986), 83–97, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1988.
54. *Sur l'adhérence d'un ensemble partiellement semi-algébrique*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 68 (1988), 205–210.
55. *Desyngularyzacja geometryczna krzywej w rozmaitości*, Materiały X. Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych (Sielpia, styczeń 1988), Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1988, 31–64.

56. *Théorème de Pawłucki. La formule de Stokes sous-analytique*, Seminari di Geometria, 1988-1991 (Bologna, 1988-1991), 79–82, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1991.
57. *Stratifications sous-analytiques et la condition de Verdier*, Seminari di Geometria, 1988-1991 (Bologna, 1988-1991), 83–88, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1991 (współautorzy: J. Stasica i K. Wachta).
58. *Théorème de Tamm-Kurdyka des points lisses d'un sous-analytique*, Seminari di Geometria, 1991-1993 (Bologna, 1991-1993), 133–136, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1994.
59. *Sur la géométrie semi- et sous-analytique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), no. 5, 1575–1595.
60. *Stratifications distinguées comme outil en géométrie semi-analytique*, Manuscripta Math. 86 (1995), no. 1, 81–102 (współautorzy: K. Kurdyka i M.-A. Zurro).
61. *On semi-analytic and subanalytic geometry*, Panoramas of mathematics (Warsaw, 1992/1994), 89–104, Banach Center Publ., 34, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995.
62. *Éclatement des coefficients de séries entières et deux théorèmes de Gabrielov*, Manuscripta Math. 92 (1997), no. 3, 325–337, oraz Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tordesillas 2 (1998), no. 3, 3–6 (współautorzy: J.-Cl. Tougeron i M.-A. Zurro).
63. *On the gradient inequality*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 47 (1999), no. 2, 143–145 (współautorka: M.-A. Zurro).
64. *On the Weierstrass division*, Effective methods in algebraic and analytic geometry, 2000 (Kraków). Univ. Iagel. Acta Math. No. 39 (2001), 49–58 (współautorzy: T. Maszczyk i K. Rusek).


**Pozycje o charakterze książkowym i monograficznym**


1. *Ensembles semi-analytiques*, Inst. Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, 1965, str.str. 153.
2. *Sobre el problema de la división y la triangulatión conjuntos semianaliticos*, Dep. de Matemáticas Universidad de Buenos Aires, 1965, str.str. 49.
3. *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Biblioteka Matematyczna 46, PWN, Warszawa 1976, str.str. 229.
4. *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*, Biblioteka Matematyczna 68, PWN, Warszawa 1988, str.str. 391.
5. *An Introduction to the Theory of Real Functions*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&Sons, Ltd, Chichester, 1988, str.str. X+230.
6. *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, str.str. XIV+523.
7. *Una introducción a la geometria semi- y subanalitica*, Universidad de Valladolid, 1993, str.str. 95 (współautorka: M.-A. Zurro).
8. *Une introduction élémentaire aux faits de base sur les fonctions de plusieurs variables complexes*, IRMAR, Université de Rennes I, 1993, str.str. 53.
9. *Wstęp do geometrii semi- i subanalitycznej*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 1993, str.str. 76 (współautorka: M.-A. Zurro).