

Recenzje

Stanisław K r a j e w s k i, *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne (od mechanicyzmu do postmodernizmu)*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa 2003, str. 366, ISBN 83-7388-017-8.

Twierdzenia Gödla o niezupełności zostały odkryte przez ich autora sześćdziesiąt pięć lat temu. Gödel poinformował o nich (dokładniej: o pierwszym tj., że każda teoria formalna \mathbf{T} zawierająca arytmetykę liczb naturalnych jest niezupełna, pod warunkiem jej niesprzeczności) w trakcie słynnej konferencji o podstawach matematyki w Królewcu w 1930 r., gdzie Carnap prezentował logicyzm, Heyting – intuicjonizm i von Neumann – formalizm. Artykuł Gödla „Über formal unentscheidbare Stz der *Principia mathematica* und verwandte Systeme I” ukazał się w *Monashefte für Mathematik und Physik* 38 (1931). Znajdował się w nim dowód twierdzenia I i sformułowanie II (o ile teoria \mathbf{T} zawierająca arytmetykę liczb naturalnych jest niesprzeczna, to dowód tego faktu nie da się przeprowadzić w \mathbf{T}); pełny dowód drugiego twierdzenia Gödla został podany w 2 t. dzieła D. Hilberta i P. Bernaysa, *Die Grundlagen der Mathematik* (1939). Oba twierdzenia Gödla należą do tzw. twierdzeń limitacyjnych, wraz z twierdzeniem Tarskiego o arytmetycznej niedefiniowalności prawdy arytmetycznej i twierdzeniem Churcha, że węższy rachunek predykatów i arytmetyka liczb naturalnych są nierozstrzygalne (pomijam tutaj twierdzenia Löwenheima-Skolema). Określnik „limitacyjne” wskazuje, że wyniki te stwierdzają ograniczenia metod formalnych. I jako takie wzbudzają olbrzymie zainteresowanie nie tylko matematyków, ale także filozofów, niemal od momentu ich po-

wstania.

Wedle mojej wiedzy recenzowana książka jest drugą pod względem objętości monografią o twierdzeniach Gödla, po monografii J. Ladrière’a, *Les limitations internes des formalismes. Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparents dans la théorie des fondements des mathématiques* (Paris 1957, str. 715). Ta ostatnia jest poświęcona przede wszystkim zagadnieniom formalnym, a kwestie filozoficzne (ograniczone w zasadzie do podstaw matematyki) omawia na około 50 stronach (ss. 397–444). Tak więc praca Krajewskiego jest najobszerniejsza eksploracją filozoficznych interpretacji twierdzenia Gödla w dotychczasowej literaturze światowej. Zawiera też sporo materiału dotyczącego spraw technicznych. Jest to w pełni uzasadnione, bo jakakolwiek filozoficzna analiza wyników Gödla (zresztą jakichkolwiek rezultatów z zakresu nauk ścisłych) nie może abstrahować od ich rzeczywistej treści. Wiele nieporozumień wokół twierdzeń Gödla o niezupełności bierze się ze zbyt powierzchownego rozpoznania ich treści matematycznej.

Obok wprowadzenia, recenzowana praca składa się z czterech obszernych rozdziałów, podzielonych na mniejsze jednostki. Rozdział I poświęcony jest I twierdzeniu Gödla. Omawia sytuacje w podstawach matematyki w pierwszych trzydziestu latach XX w. (w szczególności, program Hilberta), metodę arytmetyzacji, sformułowa-

nia I twierdzenia o niezupełności i jego dowody (także II twierdzenia Gödla, wcześniej wspomnianego wyżej twierdzenia Tarskiego), a kończy się uwagami o recepcji obu twierdzeń. Rozdział II jest w całości poświęcony wykorzystywaniu twierdzenia Gödla w rozważaniu problemu psychologicznego (umysł-ciało). Autor omawia zarówno mechanycyzm (redukcja zasad działania umysłu do programu kierującego maszyną Turinga), jak i pogląd przeciwny, którego głównym przedstawicielem jest Lucas. Omówione są poglądy wielu autorów, m.in. Penrose'a, ale także samego Gödla. Rozdział III dotyczy Gödla, jego osiągnięć i poglądów. Punkt D jest szczególnie interesujący dla czytelnika polskiego, albowiem przedstawia kontakty Gödla i Tarskiego, a także poglądy obu logików na zagadnienie prawdy. Ostatni rozdział, tj. czwarty pod zgrabnym tytułem „(Nad)używanie twierdzenia Gödla” poświęcony jest przedstawieniu rozmaitych aplikacji i nadużyć twierdzeń o niezupełności w filozofii matematyki i w filozofii ogólnej, tj. w analizie sceptycyzmu, dyskusji wokół platonizmu, przez postmodernistów, w psychologii, medycynie, naukach przyrodniczych, społecznych, etyce, estetyce i prawie. Na koniec Krajewski omawia inspiracje dla religii oraz formułuje wielce pouczający katalog błędnych opinii w związku z filozoficznymi użytkami czynionymi z twierdzeń o niezupełności.

Książka Krajewskiego jest świetnie napisana i bogato udokumentowana (niestety nie ma indeksów, co utrudnia powrót do jej lektury). Niespecjalista znajdując w niej bardzo dobre wprowadzenie do formalnych aspektów metamatematyki. Mam jednak kilka uwag krytycznych. Myślę, że mało uwagi poświęcone zostało różnicy w syntaktycznych i semantycznych aspektach twierdzeń Gödla (brak jest np. wzmianki o teorio-modelowych ich odpowiednikach), a także twierdzeniu Tarskiego. Nawet jeśli zgodzimy się, że wynik Gödla jest głębszy, to jednak warto pamiętać, że możliwy jest efektywny dowód twierdzeń o niezupełności, natomiast nie da się tego zrobić z twierdzeniem o niedefiniowalności

prawdy. Niezupełność można zlikwidować poprzez dodanie ω -reguły, ale nie zmieni to niczego w sprawie niedefiniowalności. Kwestia logik nieefektywnych jest wprawdzie rozważana w rozdz. IV, punkt A, ale w sposób zbyt ogólny.

Mam też kilka uwag natury historycznej. To prawda, że recepcja twierdzeń Gödla była wolna i oporna. Wszelako można powiedzieć na ten temat więcej, niż znajduje się na ss. 76-79 (dalej ograniczam się przede wszystkim do spraw polskich). Tarski dowiedział się o rezultatach Gödla prawdopodobnie w 1931 r. (zob. list Gödla do Tarskiego z 20 stycznia 1931 r., w: K. Gödel. *Collected Works*, t. V, Oxford University Press, Oxford 2003, s. 266). 14 kwietnia 1931 r. Tarski wygłosił odczyt w Sekcji Logiki Warszawskiego Towarzystwa Filozoficznego, w którym omówił twierdzenie o niezupełności, a było to jedno z pierwszych wystąpień na ten temat na świecie. To prawda, że Leśniewski miał wątpliwości co do poprawności dowodu Gödla. Jedynym źródłem w tej sprawie jest artykuł T. Kotarbińskiego, „Garstka wspomnień o St. Leśniewskim”, w: T. Kotarbiński, *Szkice z historii filozofii i logiki*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1979, s. 303. Istotnie Kotarbiński pisze, że Leśniewski „porwał się na krytykę słynnego dowodu Gödla”, ale potem dodaje „Wszystkie ataki na twierdzenie Gödla pozostawały daremne”, co może sugerować, że autor krytyki zdawał sobie z tego sprawę. Nie sądzę też, iż J. Kuczyński, inny polski krytyk Gödla, był inspirowany przez Leśniewskiego. Sam powołuje się na Wilkosza, a źródłem mogło być redukowanie prawdy do dowodliwości. Twierdzenie Gödla stosowali w filozofii Helmer i Zawirski już w 1934 r., dla krytyki neopozytywistycznej koncepcji zdań bezsensownych, informował o nim Chwistek w *Granicach nauki* (1935), Ajdukiewicz wykorzystał dla krytyki idealizmu Rickerta w 1936, Chwistek i Hetper opublikowali dowód I twierdzenia o niezupełności w *The Journal of Symbolic Logic* w 1939 r., a w tym samym roku Metallman wspo-

mniał o tym twierdzeniu w swym wprowadzeniu do filozofii przeznaczonym dla słuchaczy Instytutów Pedagogicznych (aczkolwiek wzmianka Metallmana nie jest ścisła, to jednak jest faktem skądinąd interesującym, że znalazła się w dość elementarnym podręczniku). I wreszcie, warto wspomnieć, że pierwsze popularne, ale całkowicie ścisłe przedstawienie wyników Gödla powstało w Polsce. Znajduje się ono w artykule A. Mostowskiego w *Kwartalniku Filozoficznym* z 1948 r. (także w tym samym roku w podręczniku *Logika matematyczna*), który stał się podstawą dla znanej monografii tego autora *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic* (Amsterdam, 1952). Prezentacja Mostowskiego jest o tyle ważna, iż wykazuje, jak związane są metody Gödla i Tarskiego, tj. syntaktyczne i semantyczne. Wszystko to pokazuje, że recepcja idei Gödla w Polsce była spora, zapewne szersza niż gdzie indziej.

Ostatnie zdanie prowadzi do kwestii stosunków pomiędzy Gödlem i Tarskim, zarówno osobistych jak i naukowych. Krajewski poświęca temu problemowi sporo miejsca (ss. 231–242), zajmując się głównie kwestią milczenia pierwszego o drugim i autorstwem twierdzenia o niedefiniowalności prawdy. Po opublikowaniu IV i V t. dzieł Gödla (zawierają one korespondencję) można to i owo dodać. Tarski był jednym z niewielu ludzi, z którymi Gödel był po imieniu, aczkolwiek nie od początku ich znajomości, ale co najmniej od 1944 r. Niewątpliwie obaj jakoś rywalizowali ze sobą. Krajewski ma całkowitą rację, że w pracach Gödla nazwisko Tarskiego nie jest często wymieniane. Poza dokumentacją podaną w recenzowanej książce, jest trochę wzmianek w listach. Najważniejsze znajdują się w korespondencji z Bernaysem i Carnapem (K. Gödel, *Collected Works*, t. IV, Oxford University Press, Oxford 2003) i dotyczą pojęcia prawdy. Nie ma tutaj możliwości rozważania różnic i podobieństw w podejściu obu logików do tej kwestii. Mogę jedynie powtórzyć swoje stanowisko (Krajewski je zresztą lojalnie przytacza; por. też J. Woleński, „Gödel, Tarski and

Truth”, *Revue Internationale de Philosophie* 59 (2005), ss. 459–490). Otóż uważam, że Gödel nie był w ogóle zainteresowany matematyczną definicją pojęcia prawdy i w tym sensie uważał je za niedefiniowalne, bo przekraczające narzędzia formalne. Z drugiej strony, Tarski podał definicję matematyczną i pokazał dla jakich teorii klasa zdań prawdziwych nie jest definiowalna. Decydowała tutaj odmiennosc postawy filozoficznej wobec metamatematyki. Podczas gdy Gödel w latach trzydziestych był pod przemożnym wpływem Hilberta, Tarski akceptował metody infinitarne. W rezultacie dla Gödla prawda w ogóle nie była definiowalna matematycznie, a dla Tarskiego była niedefiniowalna w wyraźnie określonych okolicznościach.

Z filozoficznych zastosowań twierdzeń o zupełności najwięcej miejsca Krajewski poświęca problemowi psychofizycznemu. W istocie rzeczy rozdział II jest, by tak rzec, monografią w monografii. Znajduje się tam dokładna analiza i krytyka antymechanistycznego argumentu Lucasa. Nie znaczy to jednak, że Krajewski podziela mechanicyzm. Jego główna teza jest taka, że ścisłe twierdzenia matematyczne nie prowadzą do jednoznacznych wniosków pod względem filozoficznym, nie tylko w kwestii stosunku umysłu do ciała, ale także w innych sprawach (s. 171, s. 342). Intrygujące i godne przemyślenia jest wtargnięcie, że może właśnie ścisłość jest przeszkodą w tym względzie. Pozostałe zastosowania filozoficzne są omówione w rozdz. IV. Trochę brakuje mi tutaj szerszej analizy teorii z zakresu fizyki, bo jest sprawą dość intrygującą, czy empiryczne metody uznawania twierdzeń przyrodniczych neutralizują ewentualną zupełność matematycznego formalizmu, np. fizyki i czy w ogóle kształt zdań nierozstrzygalnych dopuszcza ich interpretację, inną niż ścisła matematyczna. Ustępy o nadużywaniu twierdzeń Gödla winny być dokładnie przestudiowane przez filozofów. Takich ostrzeżeń nigdy za dużo. Sam niedawno miałem okazję czytać prace doktorską, w której różnicę w sensie Derridy i przekreślenie w sensie Heideg-

gera wykładano jako fenomen biorący się z niezupełności, a także słyszeć prawnika, że II twierdzenie Gödla wyklucza dowód niesprzeczności prawa.

Z kronikarskiego obowiązku dodam, że ostatnio pojawiły się kolejne książki związane z Gödlem i jego wynikami (wymieniam tylko pozycje o charakterze filozoficznym): T. Franzén, *Inexhaustibility. A Non-Exhaustive Treatment*, A. K. Peters, Wellesley, Mass. 2004; T. Franzén, *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, A. K. Peters, Wellesley, Mass. 2005; R. Goldstein, *Incompleteness. The Proof and Paradox of Kurt Gödel*, W. W. Norton, New York 2005. Z dawniej-

szych można dodać do bibliografii w recenzowanej książce: A. Delessert, *Gödel: une révolution en mathématique. Essai sur les conséquences scientifiques et philosophiques des théorèmes gödéliens*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne 2000; specjalny numer 4/2005 *Revue Internationale de Philosophie*, poświęcony Gödlowi (artykułów ogłaszanych w różnych czasopismach jest mnóstwo). Książka Krajewskiego zdecydowanie wyróżnia się w tej kolekcji wszechstronnością i głębią ujęcia. Dobrze byłoby, gdyby ukazała się po angielsku.

Jan Woleński