durach parametry, zyskując przez to nowe doświadczenia.

Oprócz ćwiczeń z MAPLE, na końcu każdego z rozdziałów umieszczone są zadania do samodzielnego rozwiązania. Trochę szkoda, że zdecydowana większość z nich, to zadania teoretyczne, nie odwołujące się do MAPLE.

Jeszcze dwie uwagi językowe. Autor konsekwentnie używa nazwy „nadzieja matematyczna". Jest ona oczywiście poprawna, ale chyba najrzadziej używana – ta popularna nazwa, to wartość oczekiwana. Po wykładzie z rachunku prawdopodobieństwa, następnym będzie często wykład ze statystyki. Autor w spisie literatury podaje wiele przykładów popularnych podręczników z tej dziedziny. W żadnym z nich nazwa „nadzieja matematyczna" nie jest wykorzystywana, a w zdecydowanej większości nawet wspomniana. Z kolei w zadaniu 2.8 na stronie 61 autor używa nazwy „metoda największej wiarygodności", choć chyba we wszystkich podręcznikach statystyki matematycznej używana jest nazwa „metoda największej wiarogodności" – różnica niby niewielka, ale ...

Podsumowując, uważam książkę Ombacha za bardzo ciekawą i nowatorską propozycję wykładu z rachunku prawdopodobieństwa. Zintegrowanie ścisłego, opartego na teorii miary i całki wykładu z ilustrującymi go przykładami w MAPLE, dało bardzo interesującą (nie tylko dla młodego czytelnika) całość.

Waldemar Wołyński

Franciszek H. Szafraniec, *Przestrzenie Hilberta z jądrem reprodukującym*, Wydawnictwo UJ, Kraków 2004, 109 + ix str., ISBN 83-233-1958-8

Jądra reprodukujące przestrzeni Hilberta to fascynujące narzędzie pozwalające wiązać teorię przestrzeni Hilberta i operatorów na takich przestrzeniach z teorią funkcji analitycznych. Pojęcie to kojarzy mi się przede wszystkim z potężnymi wynikami o szacowaniu jądra Bergmana (chyba najsłynniejszego jądra reprodukującego) i ich zastosowaniami do analizy zespolonej. Wyniki Feffermana [5], Boutet de Monvel i Sjöstranda [2], czy Kerzmana [8] o własnościach jądra Bergmana na obszarach silnie pseudowypukłych, czy też piękny dowód Bella i Ligockiej [1] twierdzenia Feffermana o rozszerzeniu funkcji biholomorficznej na obszarze silnie pseudowypukłym na jego brzeg, to wielkie osiągnięcia analizy. Jądra to też oczywiście projekcje Bergmana i Szegö i cała teoria ich ograniczoności. Z takimi skojarzeniami wziąłem do ręki małą książkę Franciszka Szafrańca, profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego, „Przestrzenie Hilberta z jądrem reprodukującym". Była jeszcze jedna refleksja: czy warto monografię matematyczną publikować po polsku ograniczając z góry jej dostępność? Czy nie lepiej byłoby ją napisać po angielsku?

Gdy tylko otworzyłem książkę otrzymałem w przedmowie odpowiedź autora na to ostatnie pytanie - recenzowana książka nie jest typową monografią. Jak pisze prof. Szafraniec: stanowi ona "zbiór przemyśleń wynikłych z prowadzenia wykładów". Zatem jest to raczej ambitny skrypt niż prawdziwa monografia, tym bardziej, że jak zastrzega autor wybór tematów jest subiektywny. Książka liczy 109 stron (plus krótka przedmowa) i zawiera 4 rozdziały oraz krótkie uzupełnienie zawierające zestawienie niektórych pojęć teorii operatorów. Całość zamyka skorowidz pojęć, lista symboli i 3 strony literatury, bardzo pomocne czytelnikowi.

Najdłuższy, pierwszy rozdział poświęcony jest ogólnej teorii przestrzeni z jądrem reprodukującym. W ujęciu autora każda przestrzeń Hilberta ma jądro reprodukujące na odpowiednim zbiorze i choć autor pokazuje pewne zastosowania takiego „abstrakcyjnego” jądra, to jednak jasne jest, że najciekawszą sytuację mamy, gdy rozpatrujemy przestrzeń Hilberta funkcji nad pewnym zbiorem X i znajdujemy jądro reprodukujące zdefiniowane na tym zbiorze. Chodzi więc o taką funkcję $K : X \times X \to \mathbb{C}$, że każdy element f rozpatrywanej przestrzeni Hilberta da się odtworzyć („reprodukować”) wykorzystując wzór

$$f(x) = \langle f, K(\cdot, x)\rangle \qquad \text{dla } x \in X.$$

Kolejno, autor najpierw bada własności jąder dodatnio określonych, definiuje pojęcie przestrzeni unitarnej z jądrem reprodukującym, rozważa jej uzupełnienie do przestrzeni Hilberta z jądrem reprodukującym, bada ich własności, wyjaśnia metody konstrukcji jądra dla danej funkcyjnej przestrzeni Hilberta i konstrukcji przestrzeni z danego jądra, wreszcie podaje różne metody konstruowania jąder. Ostatnie trzy paragrafy pierwszego rozdziału poświęcone są operacjom na jądrach (porównanie jąder i generowanych przestrzeni, sumy i obcięcia jąder), skończenie wymiarowym przestrzeniom i operacji mnożenia przez funkcję na przestrzeni z jądrem reprodukującym. Całość jest dość abstrakcyjna, nie ma tu „wielkich” trudnych twierdzeń i wyraźnie brakuje konkretnych przykładów ilustrujących wprowadzoną teorię. Rozdział daje jednak dość szeroki pogląd na związki między jądrami a przestrzeniami Hilberta. Może najciekawsze dla początkującego czytelnika jest uświadomienie sobie jak niewiele trzeba, aby przestrzeń Hilberta funkcji na zbiorze X miała jądro reprodukujące na tym samym zbiorze.

W drugim rozdziale autor omawia dylatacje - zasadniczo pojawiają się tu jądra o wartościach w przestrzeni operatorów na przestrzeni Hilberta, ale autor sprowadza je do jąder w sensie definicji z rozdziału pierwszego (a więc o wartościach w $\mathbb{C}$). Rozpatruje się dylatacje na półgrupach i półgrupach z inwolucją (wprowadzając odpowiednie pojęcia, w tym operator dylatacji dla funkcji zdefiniowanych na tej półgrupie i badając jego ciągłość w odpowiedniej przestrzeni Hilberta z jądrem reprodukującym), a następnie dowodzi się kilka tzw. twierdzeń dylatacyjnych zahaczając o operatory subnormalne. Materiał tej części jest wyraźnie trudniejszy i ciekawszy.

Wreszcie trzeci rozdział: „Przestrzenie funkcji holomorficznych” - rozdział na który czekałem z dużą niecierpliwością. Tu wreszcie pojawiają się konkretne przykłady: przestrzenie Bergmana, Hardy'ego, Segala-Bargmana, Dirichleta i kilka innych. Rozdział zaczyna się jednak od ogólnej abstrakcyjnej konstrukcji i prostej obserwacji, że podprzestrzeń funkcji holomorficznych w przestrzeni $L_2(\mu)$, dla dowolnej miary μ, na obszarze Ω w $\mathbb{C}^d$ jest przestrzenią Hilberta z jądrem reprodukującym wtedy i tylko wtedy, gdy topologia przestrzeni $L_2(\mu)$ jest silniejsza na tej podprzestrzeni od topologii zbieżności niemal jednostajnej na Ω. Autor koncentruje się na miarach radialnych tj. niezmienniczych względem obrotów, rozpatrując dwa przypadki odpowiadające z grubszą przestrzeni Bergmana (np. miara Lebesgue'a na polidysku) i przestrzeni Hardy'ego (np. miara Lebesgue'a na torusie czyli brzegu wyróżnionym polidysku). Autor rozpatruje także sytuację w pewnym sensie odwrotną: startuje od jądra „holomorficznego” na obszarze Ω w $\mathbb{C}^d$, tworzy odpowiednią przestrzeń Hilberta funkcji holomorficznych i rozstrzyga pytanie kiedy istnieje taka miara μ, że nasza przestrzeń jest podprzestrzenią funkcji holomorficznych w $L_2(\mu)$. W porównaniu z poprzednimi rozdziałami mamy wiele przykładów, niestety wylicza się cokolwiek tylko na polidysku, a wzory dla kuli podaje się jedynie do wierzenia. Co więcej poszczególne przykłady zawierają tylko postać jądra oraz bazy ortonormalnej jednomianów i niewiele więcej. Jako jedyne zastosowanie teorii podaje się rozwiązanie problemu interpolacyjnego Picka-Nevanlinny. Ten rozdział nie powie wiele nowego specjalistom (choć zebranie w jednym miejscu wszystkich tych jąder jest na pewno użyteczne). Początkującemu czytelnikowi może dać przegląd typowych przestrzeni Hilberta funkcji holomorficznych. Żeby jednak dowiedzieć się czegoś więcej o każdej z nich trzeba sięgnąć do innej literatury.

Ostatni rozdział to mnożenie jąder odpowiadające operacji iloczynu tensorowego przestrzeni Hilberta. Pozwala to skonstruować tzw. przestrzeń Focka będącą w istocie sumą prostą skończonych iloczynów tensorowych przestrzeni Hilberta. Rozdział zamyka przedstawienie kilku modeli przestrzeni Focka jako przestrzeni funkcyjnej. To dość ciekawa i zaawansowana matematyka. Każdy rozdział zakończony jest ciekawymi komentarzami dotyczącymi historii zagadnienia, informującymi o autorstwie poszczególnych twierdzeń.

Podziw budzi staranność przygotowania publikacji - naprawde trudno znaleźć literówki. Do mankamentów prezentacji zaliczyłbym sposób numerowania twierdzeń i wzorów: osobno w każdym rozdziale, a są jeszcze twierdzenia etykietowane literami greckimi. W rezultacie bywa, że trudno się w tym połapać (np. są dwa wzory (1.1) oba opisujące - różne! - pojęcia dodatniej określoności). Poważniejszymi mankamentemi są różnego rodzaju niejasności. Np. zaznaczałbym częściej, że chodzi o jądro reprodukujące na danym zbiorze X. Bez podkreślenia, że mówimy o jądrze na zbiorze X trudno zrozumieć o co chodzi autorowi, gdy bada on czy przestrzeń unitarna z jądrem reprodukującym można uzupełnić do przestrzeni Hilberta z jądrem reprodukującym (paragraf 1.2) - skoro każda przestrzeń Hilberta ma jądro reprodukujące na jakimś zbiorze. Inny przykład to brak jakiegokolwiek odnośnika do literatury na str. 25, gdy autor powołuje się na ogólną teorię wielomianów ortogonalnych i pewne pochodzące z niej wzory. Jeszcze inny przykład: na str. 26 dłuższy czas zajęło mi domyślenie się, że w Tw. 7.1 chodzi o ciąg (a_n), który się wcześniej pojawił na stronie 25 jako ciąg współczynników relacji rekurencji. Podobnie dowód Stwierdzenia 1.1 na stronie 55 był dla mnie niejasny: do jakiego ciągu mamy zastosować własność (δ)?

Szczególnie ważnym potencjalnym czytelnikiem książki jest doktorant czy student wyższych lat studiów matematycznych. Czytając taką książkę oczekuje on wskazówek do dalszej lektury. Zawierają je w sporej ilości komentarze na koniec każdego rozdziału. Szkoda, że w rozdziale 3 komentując teorię przestrzeni Bergmana autor poleca tylko książkę Bergmana z 1950 roku, nie wspominając nowej monografii Hedenmalma, Korenbluma i Zhu [7] (warto też wspomnieć opublikowaną już po ukazaniu się recenzowanej książki monografię Durena i Schustera [4]). Polecana literatura dotycząca przestrzeni Hardy'ego jest znacznie obszerniejsza, ale i tu brak klasycznych monografii Koosisa [9] i Durena [3]. Warto by też może polecić przepiękną książkę Garnetta [6]. Jest książka Rudina o teorii funkcji w kuli [10], ale dlaczego brak nieco bardziej elementarnej książki tego samego autora o teorii funkcji w polidysku [11]?

Jakie więc jest wrażenie z lektury książki? Trochę niedosytu, któremu dałem już wyraz w opisie zawartości książki. Tak chciałoby się, aby powiedziano coś o głębokich wynikach dotyczących konkretnych jąder i przestrzeni. Z drugiej strony, trudno robić autorowi zarzut z faktu, że napisał książkę o jądrach i ich związkach z przestrzeniami Hilberta, a nie książkę o konkretnych funkcyjnych przestrzeniach Hilberta - byłaby to zupełnie inna monografia. Być może dla mnie ciekawsza, ale niekoniecznie dla wszystkich czytelników. Cieszmy się więc, że recenzowana książka powstała, że będzie mogła być wstępem i zachętą do dalszego bardziej wyspecjalizowanego studium lub też da wyobrażenie o możliwościach jąder reprodukujących niespecjalistom. Student matematyki wyższych lat pozna z tej książki sporą listę przestrzeni funkcyjnych Hilberta i odpowiadających im jąder i być może zaciekawi się co o nich więcej wiadomo.

W sumie książka pożyteczna, wartościowa, ale warta uzupełnienia z myślą o czytelniku, który chciałby zdobyć lepszą orientację umożliwiającą dalsze studium.

Literatura

[1] S. R. Bell, E. Ligocka, *A simplification and extension of Fefferman's Theorem on biholomorphic mappings*, Invent. Math. 57 (1980), 283–289.

[2] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*, Astérisque 34–35 (1976), 123–164.

[3] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York–London 1970.

[4] P. Duren, A. Schuster, *Bergman spaces*, AMS, Providence 2004.

[5] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. 26 (1974), 1–65.

[6] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York–London 1981.

[7] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Springer, New York 2000.

[8] N. Kerzman, *The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary*, Math. Ann. 195 (1972), 149–158.

[9] P. Koosis, *Introduction to H_p spaces. With an appendix on Wolff's proof of the corona theorem.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 40. Cambridge University Press, Cambridge – New York, 1980.

[10] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of C^n*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 241, Springer, New York-Berlin 1980.

[11] W. Rudin, *Function theory in polydiscs.* W. A. Benjamin, Inc., New York – Amsterdam 1969.

P. Domański

Józef Myjak, *Funkcje rzeczywiste. Miara. Całka Lebesgue'a*, AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków 2006, str. 275, ISBN 83-7464-023-5.

Według Autora celem książki jest przekazanie „w sposób precyzyjny" (str. 7) podstawowych wiadomości z teorii funkcji rzeczywistych, teorii miary i teorii całki Lebesgue'a. Książka składa się z dziewięciu rozdziałów: *1. Funkcje ciągłe w przestrzeniach metrycznych, 2. Miara, 3. Funkcje mierzalne. Zbieżność, 4. Całka, 5. Produkty miar. Twierdzenie Fubiniego, 6. Zmiana zmiennych całkowania, 7. Miary znakozmienne, 8. Różniczkowalność, 9. Całka Riemanna–Stieltjesa* oraz dwóch dodatków: *A. Liczby rzeczywiste, B. Rozwiązania zadań* (po każdym rozdziale znajdujemy pewną ilość zadań o zróżnicowanej trudności). Dobór materiału jest ciekawy i trafny, chociaż tradycyjny. Jednak nie mogę polecić tej książki studentom (a właściwie nikomu), ponieważ znalazłem w niej kilkaset usterek. Są tu błędy językowe (np. zdanie „same twierdzenia używamy niemal codziennie", str. 8[19]; literówki, wśród których szczególnie rażąca jest pisownia Lebesque (m.in. str. 70 i 178), chociaż trzeba przyznać, że nazwisko Lebesgue wiele razy napisane jest poprawnie; mylące odsyłacze; niekonsekwentne oznaczenia; dziwaczna terminologia (funkcje liczbo-liczbowe zamiast powszechnie używanych funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, czy miary znakozmienne zamiast miar ze znakiem lub miar o zmiennym znaku); korzystanie z pojęć niezdefiniowanych lub zdefiniowanych później, a także, niestety, błędy rzeczowe. Właściwie cały nakład należałoby wycofać. Na szczęście wierzę w to, że wszystkie usterki można usunąć, jeśli Autor oraz Wydawnictwo renomowanej Uczelni zadadzą sobie nieco trudu. Być może trud ten nie będzie nawet zbyt duży, ponieważ wyobra-