Literatura

[1] S. R. Bell, E. Ligocka, *A simplification and extension of Fefferman's Theorem on biholomorphic mappings*, Invent. Math. 57 (1980), 283–289.

[2] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*, Astérisque 34–35 (1976), 123–164.

[3] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York–London 1970.

[4] P. Duren, A. Schuster, *Bergman spaces*, AMS, Providence 2004.

[5] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. 26 (1974), 1–65.

[6] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York–London 1981.

[7] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Springer, New York 2000.

[8] N. Kerzman, *The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary*, Math. Ann. 195 (1972), 149–158.

[9] P. Koosis, *Introduction to H_p spaces. With an appendix on Wolff's proof of the corona theorem.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 40. Cambridge University Press, Cambridge – New York, 1980.

[10] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of C^n*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 241, Springer, New York-Berlin 1980.

[11] W. Rudin, *Function theory in polydiscs.* W. A. Benjamin, Inc., New York – Amsterdam 1969.

P. Domański

Józef Myjak, *Funkcje rzeczywiste. Miara. Całka Lebesgue'a*, AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków 2006, str. 275, ISBN 83-7464-023-5.

Według Autora celem książki jest przekazanie „w sposób precyzyjny" (str. 7) podstawowych wiadomości z teorii funkcji rzeczywistych, teorii miary i teorii całki Lebesgue'a. Książka składa się z dziewięciu rozdziałów: *1. Funkcje ciągłe w przestrzeniach metrycznych, 2. Miara, 3. Funkcje mierzalne. Zbieżność, 4. Całka, 5. Produkty miar. Twierdzenie Fubiniego, 6. Zmiana zmiennych całkowania, 7. Miary znakozmienne, 8. Różniczkowalność, 9. Całka Riemanna–Stieltjesa* oraz dwóch dodatków: *A. Liczby rzeczywiste, B. Rozwiązania zadań* (po każdym rozdziale znajdujemy pewną ilość zadań o zróżnicowanej trudności). Dobór materiału jest ciekawy i trafny, chociaż tradycyjny. Jednak nie mogę polecić tej książki studentom (a właściwie nikomu), ponieważ znalazłem w niej kilkaset usterek. Są tu błędy językowe (np. zdanie „same twierdzenia używamy niemal codziennie", str. 8^{19}; literówki, wśród których szczególnie rażąca jest pisownia Lebesque (m.in. str. 70 i 178), chociaż trzeba przyznać, że nazwisko Lebesgue wiele razy napisane jest poprawnie; mylące odsyłacze; niekonsekwentne oznaczenia; dziwaczna terminologia (funkcje liczbo-liczbowe zamiast powszechnie używanych funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, czy miary znakozmienne zamiast miar ze znakiem lub miar o zmiennym znaku); korzystanie z pojęć niezdefiniowanych lub zdefiniowanych później, a także, niestety, błędy rzeczowe. Właściwie cały nakład należałoby wycofać. Na szczęście wierzę w to, że wszystkie usterki można usunąć, jeśli Autor oraz Wydawnictwo renomowanej Uczelni zadadzą sobie nieco trudu. Być może trud ten nie będzie nawet zbyt duży, ponieważ wyobrażam sobie, że w komputerze Autora tkwi poprawiona wersja, którą musieli otrzymać recenzenci Wydawnictwa, aby napisać pozytywne recenzje, a tylko jakiś diablik spowodował, że wydrukowano wersję wstępną, niedopracowaną.

Pragnąc utrzymać objętość tej recenzji w rozsądnych granicach, przedstawię uwagi dotyczące rozdziału 1 bardziej szczegółowo, a pozostałych rozdziałów tylko w wielkim skrócie.

Rozdział 1. Funkcje ciągłe w przestrzeniach metrycznych

Rozdział zaczyna się od definicji przestrzeni metrycznej, po czym następuje kilka przykładów. Już na pierwszej stronie tego rozdziału (str. 11_{2-1}) mamy oczywistą pomyłkę. Powinno tu być $d_2 \leq d_1 \leq d_3$. Na stronie 13_7 jest literówka: domkięty zamiast domknięty. To są rzeczy drobniejsze, ale na str. 15_{11-10} mamy definicję, z której wynika, że podciąg ciągu nie jest ciągiem (chyba, że $N_0 = N$). Na str. 18^7 używa się terminu „punkt skupienia ciągu", chociaż nigdzie wcześniej nie było o tym mowy (był punkt skupienia zbioru), na tej samej stronie (18^{14}) występuje „ciąg scentrowany" zbiorów, ale wcześniejsza definicja mówi tylko o rodzinie scentrowanej, a wciąż na tej samej stronie (18_5) pojawia się tajemnicza „suma przeliczalnej ilości przestrzeni ośrodkowych". W dowodzie twierdzenia 1.5 na stronie 19 początek byłby bardziej zrozumiały, gdyby napisano: Ponieważ $\{x_n : n \geq k\} \subset F_k$, $\{x_n : n \in N\} = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \cup \{x_n : n \geq k\}$ oraz $\alpha(\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}) = 0$, więc na mocy (iii) i (iv) uwagi 1.10 mamy $\alpha(\{x_n : n \in N\}) \leq \alpha(F_k)$. Definicja modułu ciągłości (str. 22^3) nie jest jednoznaczna, a ponadto zwykle przez moduł rozumie się coś zupełnie innego (por. R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste I). W dowodzie twierdzenia 1.11 na str. 22 wystarczy zauważyć, że zbiór $f(D)$ jest zwarty, więc $\max f(D) = \sup f(D) \in f(D)$. Twierdzenie 1.12 może być sformułowane ogólniej, ponieważ w dowodzie ciągłości funkcji f w punkcie x_0 korzysta się tylko z ciągłości (niektórych) funkcji f_n w punkcie x_0. Nierówność na str. 25_{19} powinna być nieostra (po przejściu do granicy). Zbiór E_n na str. 25_8 istotnie jest domknięty. Wynika to z faktu, że różnica dwóch funkcji ciągłych jest ciągła oraz wartość bezwzględna funkcji ciągłej jest ciągła. O tym w książce wcześniej nie było mowy, chociaż własności granic i niektóre własności funkcji ciągłych były omówione na str. 20 i 21. W tym samym dowodzie (str. 25_3) występuje wyrażenie $n \geq n_0$, chociaż powinno tam być $n \in N$. Na następnej stronie (26^7) mamy termin „ciąg gęsty", który nie został nigdzie zdefiniowany. Definicja granicy dolnej ciągu funkcji (str. 27^8) jest niepoprawna. W przypadku ciągu stałego zbiór $\{f_n(x) : n \in N\}$ nie ma punktu skupienia. Na stronie 27 znajdujemy definicję kresu dolnego (i górnego) zbioru, ale używano tych pojęć znacznie wcześniej. Nazwa „zbiór graniczny" jest używana rzadziej (a może w ogóle nie), ogólnie przyjęta nazwa brzmi raczej „zbiór liczb granicznych" (str. 27_8). Oznaczenie R_+ (str. 29_2) nie było wcześniej wyjaśnione. Nierówność na str. 30^2 nie jest oczywista i powinna być udowodniona. Zwrot „Na mocy twierdzenia 1.15" (str. 30^{11}) powinien brzmieć „Na mocy twierdzenia 1.16". Drugą część dowodu 1.20 (str. 32) można skrócić: $\tilde{f}(x_0) > \alpha$, więc $\tilde{f}(x) > \alpha$ w pewnym otoczeniu punktu x_0, zatem $\psi(x) > \alpha$ w tym otoczeniu. W dowodzie wniosku 1.7 (str. 35^{12}) jest zwrot „oczywiście $\bar{U} \cap V = \emptyset$". Dla studenta może to nie być oczywiste, zadanie 8 na str. 47 dotyczy tej własności (ale nie ma o tym mowy w tekście). Na tej samej stronie (35^{15}) w dowodzie twierdzenia 1.22 ciągłość funkcji f wynika z ciągłości funkcji $\rho(x, A)$, ale to jest dopiero w zadaniu 13 na str. 47. Ostatni wiersz na str. 35 jest niezrozumiały (jak stosować twierdzenie 1.22 do funkcji $\tilde{f}$?). Kolejna strona (36^1) zaczyna się od literówki „przestrzni" zamiast przestrzeni, ale już w wierszu 5 od góry mówi się o normalnej przestrzeni topologicznej, chociaż definicja przestrzeni topologicznej jest na stronie 44. Na stronie 37^8 brak założenia, że $r < a < \tilde{r}$, więc nie można wywnioskować, że $x_0 \in U = V_{\tilde{r}} \setminus \bar{V}_r$. Kilka wierszy dalej ($37_{22}$) znów literówka : „przestrzenia" zamiast „przestrzenią", ale również występuje przestrzeń topologiczna Hausdorffa, chociaż nie było wcześniej definicji. W dowodzie tw. 1.25 (o rozkładzie jedynki) na str. 37_4 powinno być: „pokrycie $\{V_j : j \in J\}$ jest wpisane" (zamiast $\{W_j : j \in J\}$). Zaraz mamy też (37_2) „na mocy twierdzenia 1.21", a powinno być "na mocy twierdzenia 1.23". Informacja o tym, że tylko skończona liczba funkcji jest różna od zera pojawia się dopiero na końcu dowodu, str. 38^{7-8}, ale nie ma jej w treści twierdzenia 1.25. Na str. 38_{12} mamy kolejną literówkę: „ważniejszch" zamiast „ważniejszych". Drugi wiersz od góry na str. 40 zawiera wzmiankę o przestrzeni topologicznej zupełnej, ale nie wiadomo, co to jest. Na tej samej stronie (40_{13}) mamy wzór „$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f+g|)$" zamiast „$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$". Niby to tylko literówka, ale wprowadza w błąd niedoświadczonego czytelnika. Odwołanie do tw. 1.10 (str. 43_{18}) jest niewłaściwe. Powinno być „Zgodnie z twierdzeniem 1.11". Zamiast „najuboższą topologią przestrzeni X" (str. 44^{14}) lepiej byłoby napisać „najuboższą w zbiorze X". Pojęcie „topologia generowana przez rodzinę otoczeń" (str. 44_{12}) nie jest nigdzie wyjaśnione. Wśród własności operacji wnętrza (str. 45_{20}) występuje „$\text{int}(A \cap B) \supset \text{int}A \cap \text{int}B$" zamiast powszechnie znanej równości. Bardziej znanym terminem niż „topologia odziedziczona" (str. 45_{12}) jest „topologia podprzestrzeni".

Rozdział 2. Dowody twierdzeń 2.13 i 2.14 (str. 73-74) przeprowadzone są tylko dla zbiorów miary skończonej.

Rozdział 3. Wzór $\phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot 1_{A_i}$ określa tę samą funkcję, co w definicji 3.2 wtedy, gdy zbiory A_i są parami rozłączne. Na stronie 88^{1-4} terminologia jest niekonsekwentna: raz mówi się funkcja μ-mierzalna, a za chwilę funkcje $B(\mathbb{R}^d)$-mierzalne (μ jest miarą, zaś $B(\mathbb{R}^d)$-σ-ciałem). Dodatkowo na stronie 90_6 pojawia się termin „przestrzeń miarowa". W twierdzeniu Łuzina (nie Łusina – str. 90_3) brak dowodu warunku dostatecznego. Zdanie o fraktalach i iteracji (str. 94^{14-16}) jest tajemnicze, raczej niczego nie wyjaśnia. Także na str. 94_{6-5} „wartość typu $\frac{k}{3^n}$" należy zastąpić przez „wartość typu $\frac{k}{2^n}$", a poza tym nie wystarczy żądać, aby f była funkcją niemalejącą, bo dopuszcza się wtedy sytuację, gdy wartości funkcji $\tilde{f}$ w kolejnych przedziałach są identyczne (dotyczy to konstrukcji funkcji Cantora).

Rozdział 4. Na stronach 103-104 znajdujemy dwie różne (nierównoważne) definicje funkcji całkowalnej. Wzór na str. 107^{11} określa pseudonormę w $\mathcal{L}^1$, ale normę w $\mathbb{L}^1$. Oznaczenie $\lambda(dx)$ pojawia się na stronie 114_5, a później wiele razy. W definicji całki użyto oznaczenia $d\mu$. Przestrzeń mierzalna $(X, \mathcal{A})$ na str. 123^{14-15} powinna być zastąpiona przez (X, Σ). Na tej samej stronie znajdujemy dwie wersje słowa „probabilistyczną": w wierszu 14 od dołu „probalistyczną", a w wierszu 11 od dołu „pobabilistyczną". Funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\xi : \Omega \to X$ jest trudno złożyć, czego żąda od nas Autor na str. 123_6.

Rozdział 5. Tutaj są głównie literówki.

Rozdział 6. Jest to rozdział szczególnie wyróżniony przez Autora we wstępie. Do zrozumienia jego treści nie wystarczy jednak tylko znajomość klasycznego rachunku różniczkowego i całkowego, co zapowiedziano na str. 8^{1-3}. Na przykład, skąd wiadomo, że istnieje $((F^{-1})'(\mathring{y}))^{-1}$ (str. 150^9)?

Rozdział 7. Uwaga 7.1 na str. 155 nie jest prawdziwa, na przykład: jeśli $\nu(A) \neq 0$, $|\nu(A)| \neq \infty$ oraz przyjmiemy $A_n = A$ dla $n \in N$, wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| = +\infty$. Można to naprawić, zakładając, że $|\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)| < \infty$ oraz $A_n \cap A_m = \emptyset$ dla $n \neq m$. Podobnie uwaga 7.3 na str. 160 jest prawdziwa dla miar nieujemnych (przynajmniej z dowodem, jaki znajdujemy w książce).

Zabawnie wygląda zadanie 1 (str. 170). Nie tylko dlatego, że zaczyna się „Let λ będzie miarą Lebesgue'a", ale także, że jego rozwiązanie na str. 259 dotyczy innego zadania (chyba trzeciego).

Rozdział 8. Cała strona 173 wymaga wyjaśnień. Na przykład, co rozumiemy przez $f(x_0 - 0)$, gdy x_0 jest tylko punktem prawostronnego skupienia zbioru A. Jeśli x_0 jest izolowany z lewej strony, wtedy Uwaga 8.1 jest sprzeczna z informacją, że f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Definicja wahania (str. 181-182) podana jest najpierw dla przedziału domkniętego, a potem otwartego, ale oznaczenie jest to samo, co prowadzi do nieporozumień. Uwaga 8.3 na str. 182_5 jest prawdziwa dla przedziałów domkniętych, ale nie dla przedziałów otwartych. Funkcja ciągła, ściśle rosnąca, której pochodna jest prawie wszędzie równa zero, zbudowana jest w paragrafie 8.7, wbrew zapowiedzi w uwadze 8.2 na str. 181, że nastąpi to w 8.8.

Rozdział 9. Podział $\mathcal{P}$ pojawia się w książce wiele razy, czasem jest to skończony rosnący ciąg punktów, a na stronie 203 podział jest zadany punktami. Warto stosować jednolitą terminologię. Na stronie 206 pominięto dowód Uwagi 9.2, chociaż jest trudniejszy, niż dowód tw. 9.1 ze str. 204. Na str. 209^3 pojawia się kolejne oznaczenie podziału $\bar{\mathcal{P}}$ (może lepsze?). W dowodzie twierdzenia 9.4 (str. 210^4) może lepiej wziąć $1 + \bigvee_a^b g$, aby uniknąć dzielenia przez zero.

Dodatek A. W definicji grupy (str. 216^{18} i 216_4) zwykle zakłada się, że $G \neq \emptyset$. Zdanie na str. 217^{12}: „Problem liczb stanowi jeden z podstawowych i niełatwych działów matematyki" jest mało zrozumiałe. Na str. $221_{19 \text{ i } 15}$ wprowadza się termin „punkt akumulacji" w miejsce powszechnie używanego „punkt skupienia".

Pragnę na koniec podkreślić, że są fragmenty książki, które mogą się podobać i są dobrze opracowane. Taka jest, na przykład, konstrukcja ściśle rosnącej funkcji osobliwej (zwanej przez Autora singularną) w paragrafie 8.7, str. 194–196.

Władysław Wilczyński

Jacek G a n c a r z e w i c z, Barbara O p o z d a, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Wyd. 1, Kraków 2003, str. 198, ISBN 83-233-1768-2.

Recenzowana książka jest nowoczesnym podręcznikiem, opracowanym na podstawie 30 godzinnych wykładów dla studentów drugiego roku matematyki UJ. Jest bardziej rozbudowana niż wykłady i można z niej korzystać, przygotowując 60 godzinnych wykładów. W języku polskim podobnych podręczników jest niewiele. Starszych, tradycyjnie napisanych, używa się coraz rzadziej, bo nie ma w nich elementów wielowymiarowej geometrii różniczkowej i w związku z tym ograniczona jest ich przydatność nie tylko dla studentów matematyki, ale i fizyki.

Książka składa się z czterech rozdziałów i dodatków. Rozdziały 1 i 4 zawierają elementy klasycznej teorii krzywych i powierzchni. Rozdziały 2 i 3 poświęcone są rozmaitościom różniczkowalnym, koneksjom i wybranym zagadnieniom z geometrii Riemanna.

W rozdziale pierwszym rozważa się krzywe położone w $\mathbf{R}^3$. Omówiono w nim podstawowe własności parametryzacji łukowej, wyprowadzono wzory Freneta, udowodniono twierdzenia dotyczące izometrycznej niezmienniczości krzywizny i skręcenia i twierdzenie o istnieniu krzywej.

W liczącym ponad 50 stron rozdziale 2 szczegółowo omawia się wybrane własności rozmaitości różniczkowalnych. Używa się wyłącznie, wygodnej w wielu sytuacjach, a jednocześnie trudnej dla początkującego czytelnika, abstrakcyjnej definicji rozmaitości. Podane są dwa opisy przestrzeni stycznej: za pomocą klas równoważności krzywych i poprzez utożsamienie wektora stycznego z odpowiadającą mu pochodną