punktem prawostronnego skupienia zbioru A. Jeśli x_0 jest izolowany z lewej strony, wtedy Uwaga 8.1 jest sprzeczna z informacją, że f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Definicja wahania (str. 181-182) podana jest najpierw dla przedziału domkniętego, a potem otwartego, ale oznaczenie jest to samo, co prowadzi do nieporozumień. Uwaga 8.3 na str. 182_5 jest prawdziwa dla przedziałów domkniętych, ale nie dla przedziałów otwartych. Funkcja ciągła, ściśle rosnąca, której pochodna jest prawie wszędzie równa zero, zbudowana jest w paragrafie 8.7, wbrew zapowiedzi w uwadze 8.2 na str. 181, że nastąpi to w 8.8.

Rozdział 9. Podział $\mathcal{P}$ pojawia się w książce wiele razy, czasem jest to skończony rosnący ciąg punktów, a na stronie 203 podział jest zadany punktami. Warto stosować jednolitą terminologię. Na stronie 206 pominięto dowód Uwagi 9.2, chociaż jest trudniejszy, niż dowód tw. 9.1 ze str. 204. Na str. 209^3 pojawia się kolejne oznaczenie podziału $\bar{\mathcal{P}}$ (może lepsze?). W dowodzie twierdzenia 9.4 (str. 210^4) może lepiej wziąć $1 + \bigvee_a^b g$, aby uniknąć dzielenia przez zero.

Dodatek A. W definicji grupy (str. 216^{18} i 216_4) zwykle zakłada się, że $G \neq \emptyset$. Zdanie na str. 217^{12}: „Problem liczb stanowi jeden z podstawowych i niełatwych działów matematyki" jest mało zrozumiałe. Na str. $221_{19 \text{ i } 15}$ wprowadza się termin „punkt akumulacji" w miejsce powszechnie używanego „punkt skupienia".

Pragnę na koniec podkreślić, że są fragmenty książki, które mogą się podobać i są dobrze opracowane. Taka jest, na przykład, konstrukcja ściśle rosnącej funkcji osobliwej (zwanej przez Autora singularną) w paragrafie 8.7, str. 194–196.

Władysław Wilczyński

Jacek G a n c a r z e w i c z, Barbara O p o z d a, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Wyd. 1, Kraków 2003, str. 198, ISBN 83-233-1768-2.

Recenzowana książka jest nowoczesnym podręcznikiem, opracowanym na podstawie 30 godzinnych wykładów dla studentów drugiego roku matematyki UJ. Jest bardziej rozbudowana niż wykłady i można z niej korzystać, przygotowując 60 godzinnych wykładów. W języku polskim podobnych podręczników jest niewiele. Starszych, tradycyjnie napisanych, używa się coraz rzadziej, bo nie ma w nich elementów wielowymiarowej geometrii różniczkowej i w związku z tym ograniczona jest ich przydatność nie tylko dla studentów matematyki, ale i fizyki.

Książka składa się z czterech rozdziałów i dodatków. Rozdziały 1 i 4 zawierają elementy klasycznej teorii krzywych i powierzchni. Rozdziały 2 i 3 poświęcone są rozmaitościom różniczkowalnym, koneksjom i wybranym zagadnieniom z geometrii Riemanna.

W rozdziale pierwszym rozważa się krzywe położone w $\mathbf{R}^3$. Omówiono w nim podstawowe własności parametryzacji łukowej, wyprowadzono wzory Freneta, udowodniono twierdzenia dotyczące izometrycznej niezmienniczości krzywizny i skręcenia i twierdzenie o istnieniu krzywej.

W liczącym ponad 50 stron rozdziale 2 szczegółowo omawia się wybrane własności rozmaitości różniczkowalnych. Używa się wyłącznie, wygodnej w wielu sytuacjach, a jednocześnie trudnej dla początkującego czytelnika, abstrakcyjnej definicji rozmaitości. Podane są dwa opisy przestrzeni stycznej: za pomocą klas równoważności krzywych i poprzez utożsamienie wektora stycznego z odpowiadającą mu pochodną kierunkową. Po wprowadzeniu przestrzeni stycznych, omawia się podstawowe własności pól wektorowych, jednoparametrowych grup dyfeomorfizmów, komutatorów i pól tensorowych. Począwszy od strony 65, konsekwentnie używa się konwencji sumacyjnej Einsteina.

W rozdziale trzecim opisane są wybrane własności koneksji liniowych, wyznaczonych przez nie przesunięć równoległych, pochodnych kowariantnych, geodezyjnych i normalnego układu współrzędnych. Po wprowadzeniu metryki Riemanna i koneksji zgodnej z metryką, omówiono podstawowe własności tensora krzywizny, krzywizny sekcyjnej i krzywizny Ricciego. Udowodniono kilka ciekawych i ważnych twierdzeń, w tym twierdzenie Schura o stałości krzywizn i wybrane własności rozmaitości Einsteina.

W rozdziale 4 niektóre podstawowe twierdzenia teorii powierzchni wyprowadza się z wyników rozdziału 3. Omawia się tam: koneksję indukowaną z $\mathbf{R}^3$ przez immersję powierzchni, własności drugiej formy podstawowej i krzywizn głównych, równania Gaussa i Codazziego oraz twierdzenie egregium, pokazujące, że krzywizna powierzchni jest niezmiennikiem izometrii. Udowodniono też kilku ciekawych twierdzeń, dotyczących powierzchni minimalnych i powierzchni totalnie umbilikalnych.

Informacje dotyczące interpretacji geometrycznej krzywizn sekcyjnych pojawiają się prawie na końcu podręcznika, dotyczą tylko przypadku dwuwymiarowego i nawet w tym przypadku są bardzo enigmatyczne. Wykazano tam, że krzywizna sekcyjna powierzchni położonej w $\mathbf{R}^3$ w punkcie x jest równa wyznacznikowi endomorfizmu sferycznego S_x, nie wspominając o tym, że wiąże się to z interpretacją geometryczną krzywizn sekcyjnych i nie podając interpretacji geometrycznej wyznacznika S_x. Rysunek 19.3 i poprzedzający go tekst dotyczą tylko interpretacji geometrycznej znaku krzywizny i w związku z tym podpis pod rysunkiem powinien być inny. Po udowodnieniu, że parazwartość rozmaitości, która jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa, jest warunkiem dostatecznym istnienia metryki Riemanna, warto było wspomnieć, że warunek ten jest jednocześnie warunkiem koniecznym. Dzięki temu początkujący czytelnik nie będzie musiał się zastanawiać, czy twierdzenia dotyczące rozmaitości Riemanna są prawdziwe dla innych rozmaitości niż parazwarte. W książce nie wspomina się o twierdzeniu Gaussa-Bonneta i nie używa się pojęcia izometrii rozmaitości Riemanna. Wydaje się, że bez większej szkody można by zrezygnować ze sporej części szczegółowych rozważań z rozdziału drugiego (odsyłając bardziej wnikliwego czytelnika do stosownej literatury lub przerzucając je do dodatku) i dzięki temu szybciej zająć się typowymi zagadnieniami z geometrii różniczkowej.

Zaletą książki jest to, że zawiera szczegółowe dowody prawie wszystkich omawianych w niej wyników. Innymi zaletami są jej nowoczesność, precyzja i ciekawy dobór zawartego w niej materiału.

Michał Sadowski