ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLI (2005)

Recenzje

Amir D. A c z é l , *Tajemnica alefów. Matematyka, kabała i poszukiwanie nieskończoności.* Przełożył Tomasz Hornowski, Dom Wydawniczy Rebis, Poznań 2002, ISBN 83-7301-201-9.

Zamiast recenzji, należałoby podnieść kwestię: kto odpowiada za wydanie tej książki w kraju o takiej tradycji mnogościowej jak Polska? Ktoś wydawnictwu tę książkę polecił, przetłumaczył i widocznie coś z niej rozumiał, bo jest w niej kilka przypisów od wydawcy. Ale w Polsce powinien być ktoś, kto dba, by nie ukazywało się w księgarniach, co nie odpowiada naszym kryteriom. Troszczyć się o to ma prawo i obowiązek Polskie Towarzystwo Matematyczne wystarczyłoby, przy dobrych obyczajach, oczekiwać, by wydawnictwa nie wydawały książek matematycznych bez zasięgnięcia miarodajnych opinii.

Recenzent zacznie jednak od zachwytu. Pierwsze zdania książki brzmią po sienkiewiczowsku: „6 stycznia 1918 roku w uniwersyteckiej klinice dla psychicznie chorych w Halle zmarł na atak serca pewien schorowany, wychudzony mężczyzna. Ciało niezwłocznie przewieziono na mały cmentarz w drugim końcu miasta. W skromnej ceremonii pogrzebowej prowadzonej przez luterańskiego pastora uczestniczyła garstka żałobników, w tym żona i pięcioro dzieci zmarłego. Cmentarz ten dziś już nie istnieje. Zlikwidowano go ... lecz ktoś przechował płytę nagrobną, która wiele lat później została umieszczona na innym cmentarzu w Halle ... Wyryto na niej taki oto napis: Dr. Georg Cantor. Professor d. Mathematik. 3.3. 1845 – 6.1. 1918”.

Książka jest o Cantorze, twórcy teorii mnogości, któremu poświęcony jest nie tylko piękny wstępny akord, ale jest w niej wiele ciekawych szczegółów z życia Cantora i opis jego zmagań z hipotezą continuum, której potwierdzenie, jak sądził, zwieńczy jego teorię. Książka kończy się podniosłym finałem, z którego nie wszystkimi akcentami recenzent się zgadza, ale żałuje, że nie cała książka ma ten charakter i te walory. Być może oryginał tej książki, *The mystery of the Aleph* (bez podtytułu o kabale), jest lepszy niż wydanie polskie.

Bo materia jest subtelna. Jej treść matematyczną trzeba przekazać językiem dostępnym niematematykowi. Pierwszorzędną staje się tu rola tłumacza. Nie wchodząc nawet w treści matematyczne, są w tekście *Tajemnicy alefów* zdania języka potocznego pozbawione logiki wewnętrznej. Czytamy: „Jeśli ... każdy krok jest równy połowie kroku poprzedniego, to nawet gdybyśmy postawili nieskończenie wiele kroków, całkowita przebyta droga będzie równa dwukrotności pierwszego kroku ...”. Zdanie rozumiemy, jeśli zamiast „będzie równa” napiszemy „nie przekroczy”. Jest to delikatne zdanie, tłumaczące aporię Zenona o dychotomii i nieodpowiednie rozłożenie akcentów niweczy sens komentarza.

Ale w tym przypadku ważniejsze jest to, że aporia Zenona o dychotomii jest tu nie na miejscu. Książka jest bowiem o Cantorze i o alefach. Nieskończoność w matematyce ma niejedno oblicze. Aporia o dychotomii dotyczy nieskończoności znanej z symbolu „$x \to \infty$”. Nieskończoność, z którą mamy do czynienia w teorii mnogości, jest inną nieskończonością, nie mającą wiele wspólnego z aporią o dychotomii. Ma ścisły związek z inną aporią Zenona, o lecącej strzale. Dlatego, czytając rozdział o tytule „Starożytne korzenie", nie wiemy o co w ogóle może autorowi chodzić.

W tym sensie pomyłką jest rozdział o Galileuszu i Bolzanie. Czy za usprawiedliwienie dla kilkunastu stronic zapisanych każdemu znanymi faktami i anegdotami, ma wystarczać banalny zachwyt Galileusza nad równolicznością zbioru liczb naturalnych ze zbiorem ich kwadratów? Pomyłką jest przypisanie Bolzanie odkrycia równoliczności odcinka o długości 1 z odcinkiem o długości 2. Autor chyba nie zajrzał do *Paradoksów nieskończoności* Bolzany, który widząc to stwierdzenie u doktora Fischera, stanowczo sprzeciwiał się znanej nam interpretacji mnogościowej tego zjawiska. Bolzanę czcimy za inne odkrycia, a nie za prekursorstwo teorii Cantora.

Czasem ma się wrażenie, że tłumacz (a może autor?) nie rozumie zdań, które pisze. Co może znaczyć następujące zdanie przytoczone za św. Augustynem: „... cokolwiek wiedza obejmuje, ogranicza się pojmowaniem wiedzącego, dlatego i nieskończoność wszelka jest dla Boga jakby ograniczona, ponieważ nie jest objęta jego wiedzą". Św. Augustyn chciał, jak się zdaje, powiedzieć, że Bóg patrzy (ze swojej wysokości) na nieskończoność jak na rzecz, a więc na coś, co jest wobec Niego ograniczone, i nie musi zajmować się jej naturą, jest to problem dla nas.

Recenzent ryzykuje dając takie rozumienie zdania św. Augustyna. Dlaczego nie ryzykował tłumacz? Bo chyba nie powie, że rozumie przepisane przez siebie zdanie.

Jeśli wejdziemy w matematykę, błędy są poważniejsze.

Oto przykład wyjaśnień autora (a może tłumacza): „Żadne rozważania dotyczące continuum elementów osi liczbowej nie mogą abstrahować od tego, że liczby są uporządkowane od najmniejszych do największych. W konsekwencji nie ma sensu rozpatrywać ich własności bez uwzględniania takiej ważnej cechy, jaką jest ich uporządkowanie, czyli „pomieszać" je i traktować jako zbiór nieuporządkowany. A to oznacza, że jeśli analiza własności continuum ma być coś warta, nie może się obejść bez wykazania twierdzenia o dobrym uporządkowaniu". Recenzent nie rozumie konkluzji zawartej w trzecim zdaniu, skoro przesłanka, jaką stanowią dwa pierwsze zdania, jest banalną oczywistością.

Z zakłopotaniem czytamy aprobowany przez autora dowód równoliczności zbiorów punktów prostej i płaszczyzny, który jakoby polega na zwykłym przemieszaniu rozwinięć dziesiętnych współrzędnych punktu płaszczyzny. Jest to znana pomyłka Cantora, na którą mu delikatnie zwrócił uwagę Dedekind i sugerował poprawienie dowodu. Cantor podał inny, już poprawny, i do swojego pierwszego, niewystarczającego dowodu nie wracał. Rzecz jest historycznie ciekawa. Od roku 1874, kiedy Cantor podał swój nieudany dowód, minęło trzydzieści lat, zanim Julius Koenig pokazał, że pewien prosty trick wystarcza, by dowód naprawić. Autor (tłumacz) pisze (później, w innym miejscu): Jules Koenig. U Springera pisze się zawsze Julius, a po węgiersku Gyula.

Autor utrwala znaną wersję wydarzeń, według której za słoneczny okres w życiu Cantora uważa się okres jego współpracy z Dedekindem, zapoczątkowany w 1872 r. spotkaniem w szwajcarskim Interlaken. A było inaczej. Znajomość Cantora z Dedekindem, która nigdy chyba nie była przyjaźnią, była krótkotrwała. Dedekind był poirytowany prostymi w końcu błędami Cantora, a szczególnie niepoprawialnym dowodem Cantora (1879) o nieistnieniu odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej ciągłej między przestrzeniami euklidesowymi różniącymi się wymiarami i nie odpisał na kolejny list Cantora. Autor, podobnie jak wielu innych biografów Cantora, upatruje przyczyny jego depresji w konflikcie z Kroneckerem. Wczytanie się w korespondencję Cantor–Dedekind–Kronecker–Mittag-Leffler daje inny obraz sytuacji. Cantor niesłychanie mocno przeżył odsunięcie się Dedekinda (pisze o tym

Jose Ferreiros, *On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind*, Historia Mathematica 20 (1993), 343–363), natomiast nigdy nie przeżywał wewnętrznie ataków Kroneckera na teorię mnogości i na niego, bo Kronecker atakował każdego i może bardziej niż Cantora atakował Weierstrassa. Są znane, pisane w serdecznym tonie, listy Cantora do Kroneckera i Kroneckera do Cantora. Do depresji Cantora przyczyniała się również niejednoznaczna postawa Mittag-Lefflera, który był uprzejmy dla Cantora dopóty, dopóki nie wymagało to jego zgody na opublikowanie pracy Cantora w redagowanym przez siebie czasopiśmie *Acta Mathematica*. Tymczasem nie zdarzyło się, by Kronecker odrzucił Cantorowi pracę. Napisał wprawdzie do Hermite'a, że prace Cantora to „humbug" (bzdura), ale chociaż Cantor skądś o tym wiedział, obrócił to w żart, jak wiele innych powiedzeń Kroneckera. Przy okazji uwaga do tłumacza, który odmieniając nazwisko Mittag-Lefflera używa formy „Mittaga-Lefflera". Może to według jakichś słowników poprawne, ale Saks i Zygmund piszą „twierdzenie Mittag-Lefflera" i to powinno obowiązywać.

Wydaje się, że autor nie wie kim był Dedekind. Pisze, że był matematykiem z Brunswicku, a największym jego osiągnięciem była konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych. Skoro jego książka była tłumaczoną na tyle języków (7), to może już do tej pory recenzenci wytknęli mu jego niewiedzę w tej materii. Może nie musiał wiedzieć o pracach Dedekinda na temat twierdzeń leżących u podstaw algebry abstrakcyjnej, ale powinien przynajmniej coś wiedzieć o *Was sind und was sollen die Zahlen*. Wtedy nie napisałby, że to „Giuseppe Peano zdefiniował pojęcie liczby, pomysłowo wykorzystując teorię mnogości".

Ciekawe są rozważania autora na temat charakteru Cantora, który i bez udziału Kroneckera wprowadziłby się sam w chorobę. Autor przejaskrawia, pisząc, że Cantor był do reszty obezwładniony swoją chorobą. Mimo okresowych pobytów w klinice, z jego inicjatywy powstało istniejące do tej pory Stowarzyszenie Matematyków Niemieckich, którego pierwszy Zjazd w roku 1890 w Halle właśnie on zorganizował. Zaprosił na ten Zjazd Kroneckera, ale ten nie był w stanie już przyjechać. Dostawał doktoraty honorowe w Szkocji (dokąd wyjeżdżał) i Charkowie (z którym utrzymywał kontakt listowny). Uczestniczył w Międzynarodowych Kongresach Matematyków, do których zorganizowania się przyczynił, chociaż sam tam nie referował.

W rozdziale o alefach autor przedstawia żydowski rodowód Cantora. Niepotrzebnie polemizuje z Grattanem-Guinnessem i podpiera się znanym z niesolidności E. T. Bellem. Sam Cantor w liście do Hermite'a pisze o swoim żydowskim pochodzeniu dość dokładnie. Temu aspektowi biografii Cantora autor przypisuje specjalną wagę, upatrując w teorii mnogości jakąś kontynuację idei kabalistów żydowskich, czego Cantor, wychowany w tradycji żydowskiej, musiał być świadom. Zbiór miał być, według kabalistów, ideą jednoczącą wielość w jedno. Przypisuje to żyjącemu w XIV wieku w Hiszpanii Mojżeszowi z Leonu. Rozdział o kabale czyta się nawet ciekawie, bo to egzotyka. Słowo „Elo" – po hebrajsku Bóg - zaczyna się na literę alef, ale także i słowo „Echad" - jeden.

O rodowodzie żydowskim teorii mnogości nieraz się słyszało, ale liczni znani autorzy stanowczo i emocjonalnie temu zaprzeczali. Teraz nie słyszymy, by ktoś coś autorowi *Alefów* zarzucał, mimo że nie tylko Cantora, ale i teorię mnogości wyprowadza z tradycji żydowskiej. Albo więc przeszliśmy na inne pozycje, albo – i do tego skłania się recenzent – że poglądów w naszych czasach już się nie miewa.

Są jeszcze inne ciekawe rzeczy w tej książce, bo zmuszające czytelnika do pytań, a nawet sprzeciwu. W jednej z fraz skrzydlatych, w jakie obfituje ta książka, autor chyba przesadza, że to dopiero „Goedel i Cohen uświadomili nam smutną prawdę, że ... pewne obszary na zawsze pozostaną niedostępne dla naszego umysłu". W innej przypomina frazę Cantora, który w krytycznym dla siebie roku 1883 napisał:

„liczby cechuje intrasubiektywny i immanentny byt". Cokolwiek miałoby to zdanie znaczyć, jest ładne.

Ale dlaczego musieliśmy się męczyć przez całą książkę, a jest to co najmniej połowa jej tekstu, czytaniem niezbyt ciekawych i niezbyt oryginalnie przedstawionych dziejów Galileusza, Kartezjusza (z nieodłączną królową Krystyną), Weierstrassa (bez omijania epizodu z Zofią Kowalewską), Goedla (z jego eskapadą przez Rosję do San Francisco) i Einsteina. Można je znaleźć w każdym ilustrowanym czasopiśmie, a poza tym, co ma Kartezjusz do alefów (nie mówiąc już o Zofii Kowalewskiej)? Czy musieliśmy to wszystko czytać? Te wszystkie rzeczy są powtarzane po wielekroć i przez to coraz mniej prawdziwie.

Jak wynikałoby z przedstawionej recenzji, *Alefy* to książka interesująca i prowokująca do dyskusji. Ale jak można podjąć dyskusję z książką, w której tyle pospolitych błędów, koślawych zdań, w której wiedza o teorii mnogości ogranicza się do błyskotek z najnowszych żurnali oraz publicystyki naukowej Halmosa i E. T. Bella, a także zbyt wysokich, jak na ten rodzaj książki, odniesień do Shelacha. Nie ma za to odniesień do właściwych dla tematu książek H. Meschkowskiego i G. H. Moore'a, których autor, jak się wydaje, nie miał w ręku. Zastanawia postawa wydawców, którzy nie reagują na oczywiste lapsusy matematyczne, ale kiedy mowa jest o tym, że Weierstrass uczył na niemieckiej prowincji, to nie omieszkują dodać, że w Braniewie i Wałczu. Nie możnaby tego zostawić? Niekonieczny i dość naiwny jest komentarz wydawców, wyjaśniający metodę niepodzielnych. Możnaby się nie upominać o Tarskiego, że to akurat on pierwszy użył (w roku 1925) nazwy „uogólniona hipoteza continuum" i o Kuratowskiego przy Zornie. Za to należałoby upomnieć się o coś więcej, a mianowicie o istotne dla całości teorii mnogości twierdzenie Lindenbauma i Tarskiego (1926; dowód Sierpińskiego 1947), według którego uogólniona hipoteza continuum pociąga pewnik wyboru. Byłoby jednak śmieszne upominać się o to przy okazji sensacyjno-popularnej książki Aczela. Kuriozalny jest przypis na str. 184, w którym się sugeruje, że Peano zdefiniował (?) całą mnogość liczb z niczego, mając na myśli zbiór pusty. Dla wyjaśnienia zbiór pusty nie występuje tu jako reprezentujący pustkę, lecz jako coś, co reprezentuje istnienie, bo istnienie siebie! Recenzent miał pretensje do wydawcy, że komentarzy do niedoskonałego tekstu autora tak mało, ale może to dobrze, że nie ma ich więcej.

Jerzy Mioduszewski