ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLI (2005)

Recenzje

Stanley R. P l i s k a, *Wprowadzenie do matematyki finansowej, Modele z czasem dyskretnym.* Tłum. Paweł Kliber, WNT, Warszawa 2005, str. 310, ISBN 83-204-3032-1.

Jedną z podstawowych trudności, które stają przed adeptami dynamicznej matematyki finansowej (tj. dopuszczającej zmiany obiektów losowych w czasie) jest konieczność opanowania dość zaawansowanych metod teorii procesów stochastycznych i analizy stochastycznej. Ta trudność ma charakter raczej techniczny. Jak pokazuje w swej książce Stanley Pliska, podstawowe pojęcia matematyki finansowej i związane z nimi intuicje ekonomiczne można zrozumieć na poziomie niższym, dopuszczając jedynie dyskretne (tj. skończone) fluktuacje cen akcji zmieniających się w czasie dyskretnym. To spostrzeżenie widoczne było już u podstaw matematyki finansowej (należy tutaj wspomnieć między innymi o pracach S. Pliski z M. Harrisonem). Nie było jednak spójnego podejścia do całości tematyki. Takowe po raz pierwszy pojawiło się w recenzowanej książce S. Pliski. Została ona wydana przez Blackwell Publishing Ltd. w 1997 roku. O jej popularności świadczą coroczne wznowienia. Polski przekład jest dziełem dr Pawła Klibera z Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

Co zawiera książka S. Pliski? Przede wszystkim systematyczny wykład matematyki finansowej. Jak wiemy, w matematyce finansowej podstawowym pojęciem jest rynek papierów wartościowych i związany z nim rynek instrumentów wtórnych. Zakłada się w książce, że ceny akcji przyjmują tylko skończoną liczbę wartości. Umożliwia to prostą, w oparciu o programowanie liniowe, interpretację pojęć ekonomicznych: procesu zdyskontowanego zysku, braku arbitrażu, prawa jednej ceny i wreszcie miar martyngałowych (ostatnie pojęcie ma charakter bardziej matematyczny). W pierwszej kolejności bada się rynek jednookresowy. Równoważność istnienia miary martyngałowej i braku arbitrażu sprowadza się wtedy do klasycznego twierdzenia o oddzielaniu rozłącznych zbiorów wypukłych w przestrzeni skończenie wymiarowej. Podobnie prosto można pokazać równoważność istnienia jedynej miary martyngałowej i zupełności rynku, tzn. możliwości replikacji, czyli konstrukcji portfela przyjmującego wartość w chwili końcowej równą oczekiwanej losowej wypłacie. Przechodząc do analizy portfelowej rozpatruje się zagadnienie maksymalizacji funkcji użyteczności. W przypadku jednego okresu czasowego dostajemy łatwo nietrywialny związek między istnieniem miary martyngałowej a optymalną wartością portfela. Kolejne badane zagadnienie nawiązuje do klasycznego problemu Markowitza: minimalizuje się ryzyko portfela (w postaci wariancji stopy zwrotu portfela) przy ustalonej oczekiwanej stopie zwrotu portfela.

Przedstawione rezultaty uzyskane dla modeli jednookresowych są następnie wykorzystywane do analizy problemów wielookresowych. Pokazuje się, że istnienie braku arbitrażu w modelu wielookresowym jest równoważne brakom arbitrażu w każdym z podmodeli jednookresowych.

Jako przykład wielookresowego modelu opisany jest model dwumianowy (zwany często modelem Coxa-Rossa-Rubinsteina). Jest on szczególnym przypadkiem modeli Markowa, w których ewolucja cen akcji zależy od aktualnej ceny, nie zależąc od przeszłości. Opis wielookresowych rynków finansowych umożliwia wycenę instumentów pochodnych związaną z replikacją instrumentu w chwili realizacji kontraktu. W ten sposób można wyceniać opcje europejskie w modelu dwumianowym. Co więcej, można pokazać, że zagadnienie wyceny opcji amerykańskich prowadzi do problemu optymalnego stopowania. W dalszym ciągu wprowadza się pojęcie rynku zupełnego jako złożenie jednookresowych podrynków zupełnych, które charakteryzują się istnieniem jedynej miary martyngałowej. Na rynkach zupełnych jest osiągalna każda opcja amerykańska (tj. można znaleźć dla niej strategię replikującą).

Kolejnymi instrumentami pochodnymi omawianymi w książce są kontrakty *forward and futures*. Autor przedstawia podstawy wyceny tych instrumentów. Następnie przechodzi do optymalizacji funkcji użyteczności w portfelach wielookresowych. Najpierw bada się funkcję użyteczności od wartości portfela w chwili końcowej. Znajduje się optymalną postać portfela i funkcji wartości dla różnych funkcji użyteczności. Wprowadza się następnie możliwość konsumpcji, rozważając funkcję użyteczności mierzoną od konsumpcji lub też od konsumpcji i od końcowego portfela. Problem optymalizacyjny rozwiązuje się metodą programowania dynamicznego lub za pomocą optymalizacji wypukłej (zwłaszcza gdy mamy różne ograniczenia), bądź też metodą martyngałową przy założeniu zupełności rynku. Brak zupełności rynku jest eliminowany poprzez wprowadzenie fikcyjnych papierów wartościowych.

Przedostatni rozdział książki jest poświęcony obligacjom i kontraktom na obligacje. Wprowadza się podstawowe pojęcia opisujące strukturę terminową. Dynamikę stopy terminowej *spot* uzależnia się od pewnego łańcucha Markowa opisującego czynniki ekonomiczne. Do konstrukcji modeli struktury terminowej wykorzystuje się proces stopy terminowej *spot* lub też krzywą dochodowości. Ponieważ celem rozdziału jest wycena obligacji, opcji i różnych kontraktów na stopę procentową, wprowadza się miary martyngałowe *forward*, względem której proces ceny obligacji czy innego instrumentu pochodnego jest martyngałem.

Końcowy rozdział książki dotyczy modeli z nieskończonym zbiorem zdarzeń elementarnych. Taka sytuacja pojawia się w szczególności, gdy mamy skończony horyzont czasowy, ale ceny akcji mogą przyjmować nieskończenie wiele wartości lub też mamy stopę zwrotu akcji nawet o skończonych wartościach, ale rozpatruje się nieskończony czas. Rozdział ten raczej tylko sugeruje możliwości uogólnień, których poznanie wyraźnie wychodzi poza oczekiwany zakres wiedzy czytelnika książki.

W formie dodatku do książki są sformułowane wykorzystywane wcześniej podstawowe wyniki programowania liniowego.

Czego książka nie zawiera? Wielu aspektów współczesnej matematyki finansowej. Przede wszystkim brak w niej elementów teorii ryzyka. Nie ma też innych sposobów wyceny na rynkach niezupełnych, jakimi są przeważnie rynki z czasem dyskretnym i generalnie rynki rzeczywiste. Można jeszcze wspomnieć o kolejnych kilku brakach, ale w zasadzie po co. Każdy, kto pisał książkę, stawał przed kompromisami. Podręcznik, a raczej wstęp do teorii, nie powinien konkurować grubością z encyklopedią. Ilość faktów powinna być ograniczona i dawać czytelnikowi raczej posmak tematyki, a nie pełny wykład. Nie należy też zapominać, że Stanley Pliska napisał swą książkę w latach 1991–95, a więc przed eksplozją zainteresowania matematyką finansową i gdyby pisał ją w dzisiejszej chwili, na pewno byłaby trochę inna.

Książka jest napisana przystępnie. Zawiera wiele rachunkowych przykładów i ćwiczeń dla czytelnika. Forma graficzna polskiego wydania, a zwłaszcza wytłuszczenie przykładów i wprowadzenie twierdzeń do ramek, jest zdecydowanie lepsza od oryginalnej angielskiej. Autor z całą premedytacją nie używa schematu twierdzenie – dowód. Pojawia się w ramce stwierdzenie, a poniżej mamy dowód. Dla niewprawnego czytelnika może to prowadzić do pewnych trudności jako, że nie zawsze wiadomo, co dowodzimy i gdzie dowód się kończy. Autor recenzji zdecydowanie wolałby sformułowane z numerami twierdzenia i lematy z wyraźne oznaczonymi dowodami, nawet gdy są one tylko heurystyczne czy też szkicowe. Z drugiej strony należy podziwiać autora za przekazanie w czytelny sposób intuicji dotyczących ogromnej części matematyki finansowej. Przypuszczalnie właśnie to stało się przyczyną ogromnego sukcesu wydawniczego tej książki.

Słowa uznania należą się polskiemu tłumaczowi dr Pawłowi Kliberowi. Książka jest dobrze przetłumaczona. Mimo trudnej terminologii, autor właściwie wprowadza polskie odpowiedniki. We wstępie pojawiają się cenne odsyłacze do polskiej literatury.

Wydaje mi się, że książka ta może być podstawą semestralnego wprowadzenia do matematyki finansowej, realizowanego w formie wykładu z ćwiczeniami. Będzie też ona na pewno wartościową pozycją w bibliotece każdego specjalisty z matematyki finansowej, programowania liniowego, ekonomii i optymalizacji.

Łukasz Stettner