ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLI (2005)

Recenzje

Roman M u r a w s k i, Kazimierz Ś w i r y d o w i c z, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań 2005, str. 197, ISBN 83-232-1407-7

Recenzowaną książkę zacząłem przeglądać z dosyć dużym zainteresowaniem, gdyż sam wielokrotnie prowadziłem wykłady ze wstępu do matematyki dla studentów matematyki i informatyki. Oto schemat omawianej książki: rachunek zdań, rachunek predykatów, zbiory, relacje, funkcje, częściowe porządki, teoria mocy, typy i liczby porządkowe, działania uogólnione, aksjomaty teorii mnogości.

Przejdźmy do omówienia poszczególnych rozdziałów.

1. Elementy klasycznego rachunku zdań. Rozdział zaczyna się od podania tabelek zero-jedynkowych dla podstawowych spójników logicznych oraz od nieco tajemniczych rozważań na temat spójników ekstensjonalnych i intensjonalnych, jeszcze bardziej tajemniczego pojęcia schematu zdania oraz kompletnie tajemniczej (w tym momencie) definicji pary zdań sprzecznych (str. 13). Następnie Autorzy opisują klasę formuł rachunku zdań i definiują, bez użycia pojęcia waluacji, pojęcie tautologii. Na szczęście, po chwili, po przeanalizowania dwóch przykładów, okazuje się, że Autorom chodzi mniej więcej o operacyjną definicję tautologii: aby stwierdzić, że formuła jest tautologią, należy stworzyć jej tabelkę zero-jedynkową i sprawdzić, że w „ostatniej" kolumnie są same jedynki. Proces budowania takiej tabelki nie jest wyjaśniony, być może Autorzy zakładają, że takie rzeczy student zna już ze szkoły średniej. Następnie następuje próba zdefiniowania pojęcia reguły wnioskowania, lecz zamiast tego pojawia się trochę dziwne pojęcie schematu wnioskowania (str. 17). Na str. 18 w definicji logicznego wynikania pojawia się pojęcie schematu zdania, które nie zostało wcześniej wprowadzone. Pojawia się następnie lista kilkudziesięciu tautologii wraz z ich historycznymi nazwami.

2. Elementy rachunku predykatów. Rozważania rozpoczynają się od opisania języka predykatów bez równości. No cóż, można uprawiać logikę bez symbolu równości, ale równość jest używana tak często w dalszych rozważaniach, że wygląda to dziwnie. Na szczęście na str. 32 czytelnik dowiaduje się, że „*niekiedy predykat* $=$ *jest uznawany za spójnik logiczny* ..." (sic!), że istnieją logiki II rzędu i że rachunek predykatów jest nierozstrzygalny. Na str. 31 pojawia się następująca definicja: „*Tautologią rachunku predykatów jest formuła zdaniowa ... prawdziwa przy dowolnym rozumieniu występujących w niej predykatów, symboli funkcyjnych, stałych indywiduowych i zmiennych*". Ciekawe. Nie wiedziałem, że to jest takie proste. Nie potrzeba pojęcia struktury, waluacji ani spełniania. Tarski się wygłupił. W tym momencie moja cierpliwość się skończyła. Przeszedłem do czytania następnego rozdziału.

3. Podstawy teorii zbiorów. Rozważania zaczynają się dosyć ambitnie, od podania aksjomatu (zwanego tu zasadą) ekstensjonalności. Następnie wprowadzona jest operacja wyróżniania $(\{x \in U : \varphi(x)\})$, oraz Autorzy pozwalają czasami stosować konstrukcję $\{x : \varphi\}$, ale tylko wtedy, gdy znany jest zbiór U. Na str. 48 Autorzy próbują zdefiniować zbiór pusty. Pierwsze podejście nie jest udane, gdyż definiują go następująco:

$$\{x : x = x \wedge x \neq x\}$$

Tym razem ów zbiór U nie jest znany, więc nie wiadomo, o co Autorom chodzi. Ale widać, że przynajmniej próbują walczyć z brakiem aksjomatów równości rachunku zdań. Druga próba jest trochę bardziej udana: biorąc „*pewny dany zbiór*” definiują zbiór pusty jako $\{x \in A : x \neq x\}$. Niestety, nie wiadomo skąd oni biorą ten „*pewny dany zbiór*”. Nie mam pojęcia dlaczego Autorzy tak komplikują sprawę. W dalszej części omawiane są podstawowe operacje teoriomnogościowe, ich własności oraz diagramy Venna. Rozważania kończą się wprowadzeniem pojęcia algebry Boole’a i przytoczeniem, bez dowodu, twierdzenia Stone’a o reprezentacji (str. 63). Nie jest to pomysł zbyt szczęśliwy, gdyż w twierdzeniu tym występują pojęcia izomorfizmu oraz podalgebry, które nie zostały wprowadzone wcześniej.

4. Relacje. Rozdział ten zaczyna się od definicji pary uporządkowanej, iloczynu kartezjańskiego oraz relacji. Następnie definiowane są różne klasy relacji, złożenie (zwane dosyć nietypowo *iloczynem względnym*) oraz operacja relacji odwrotnej (nazywana nieco egzotycznie *konwersem*). Definiuje się następnie relacje równoważności. Zdziwiło mnie to, że relacja zamieszkiwania w tym samym budynku jest relacją równoważności w Poznaniu, ale nie we Wrocławiu (znam osobę we Wrocławiu, która mieszka w dwóch różnych budynkach). Następnie za pomocą relacji równoważności omawia się proces konstrukcji liczb rzeczywistych z liczb naturalnych. W trakcie rozważań korzysta się z pojęcia indeksowanej rodziny zbiorów (str. 74), które wprowadzone jest dopiero na str. 162. Na końcu rozdziału czeka nas miła niespodzianka: aksjomaty Peano arytmetyki liczb naturalnych.

5. Funkcje. Rozdział ten zaczyna się dosyć niefortunnie od niepoprawnej definicji funkcji. Mamy mianowicie (str. 85): *Relację $R \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:* $\forall x \in X\ \exists y \in Y(xRy)$, $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ \forall z \in Y(xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$. Zgodnie z nią nie istnieje żadna funkcja. Załóżmy bowiem, że $R \subseteq X \times Y$ jest funkcją w sensie powyższej definicji. Niech a będzie dowolnym elementem takim, że $a \notin X$. Wtedy $R \subseteq (X \cup \{a\}) \times Y$ oraz $\forall y \in Y\ \neg(aRy)$. Zatem R nie jest funkcją w sensie powyższej definicji. W zasadzie o definicje nie powinniśmy się spierać. Jednak w dalszych rozdziałach z pojęcia funkcji korzysta się bardzo często, więc można się spodziewać, że nie jest to zamierzony efekt, lecz błąd. Dalej jest trochę lepiej. Pewien niepokój może budzić to, że operacja złożenie funkcji „*jest analogiczna do operacji iloczynu względnego*” a nie jest, po prostu, złożeniem (str. 87). Trochę dziwne jest to, że w definicji obrazu zbioru jest ukryty lemat. Niezbyt prawdziwy jest fakt, że $\overrightarrow{f}(A) \neq \emptyset$ dla każdego $A \neq \emptyset$ (str. 91) (trzeba dodatkowo założyć, że $A \subseteq dom(f)$).

6. Relacje porządkujące. Rozdział ten zaczyna się od podrozdziału o tytule *Typy relacji porządkujących*, lecz wbrew tytułowi nie mówi się w nim o typach relacji, lecz definiuje się pojęcie częściowego i liniowego porządku. Po wprowadzeniu pojęcia elementu najmniejszego i największego następuje próba zdefiniowania elementów maksymalnych i minimalnych. Niestety, próba ta kończy się porażką. Podana definicja (str. 108) nie jest prawidłowa. Następnie Autorzy starają się pokazać, że istnieją częściowe porządki bez elementów minimalnych i maksymalnych. Tym razem próba jest udana (str. 109), lecz cel osiągnięto karkołomną drogą. Definicja dobrego porządku jest syntaktycznie niepoprawna (str. 110). Na str. 113 znajdują się wielce nieprecyzyjne rozważania o bardzo dużym stopniu złożoności formuły definiującej dobry porządek na zbiorze liczb rzeczywistych i Autorzy straszą czytelnika jakimś bardzo trudnym dowodem. Być może chodzi im o to, że porządek taki nie może być analityczny ani coanalityczny, lecz dowód tego jest łatwy, więc pewnie chodzi im o coś innego.

7. Teoria mocy. Rozważania rozpoczynają się niepoprawnej definicji liczby kardynalnej. Autorzy po chwili sami piszą, że jest ona niepoprawna. Ale nie martwią się tym i mówią, że w „*naiwnej teorii mnogości*” można „*abstrahować od takich trudności*”, zwłaszcza, że dalej „*nie będziemy rozważali liczb kardynalnych jako takich*”. Wyobrażam sobie, jakie zamieszanie może wywołać wśród czytelników ta seria informacji o sprzecznej w sobie definicji mocy zbioru, a zwłaszcza to, że Autorzy zamierzają się nią posługiwać w dalszych rozważaniach. Swoją drogą Lemat 7.1.2 jest również fałszywie sformułowany. Całkowicie błędne jest teza, że czasami w teoriach mnogości wprowadza się liczby kardynalne jako pojęcie pierwotne. Zaraz po podaniu definicji zbioru przeliczalnego pojawia się niezbyt prawdziwa informacja o tym, że zbiór jest przeliczalny, jeśli jest zbiorem wyrazów jakiegoś nieskończonego ciągu (Autorzy zapominają o zbiorze pustym). Zresztą ten fakt nie jest dalej konsekwentnie wykorzystywany, gdyż w końcówce kilku rozważań (str. 131, 133) pojawiają się sformułowania „*skreślając* ... *ewentualne wyrazy powtarzające się* ...” W kilku miejscach Autorzy korzystają z sum rodzin zbiorów, które omawiane są dopiero w Rozdziale 9. W dalszej części rozdziału Autorzy gubią się: w niektórych miejscach mówią o stosowaniu aksjomatu wyboru, w innych zapominają to zrobić (np. Tw. 7.5.3, 7.5.5, 7.5.8). Twierdzą, że z definicji liczby $\mathfrak{c}$ „*mamy też* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$”, co, oczywiście, wymaga dowodu, gdyż $\mathfrak{c}$ jest zdefiniowane jako moc zbioru liczb rzeczywistych. W dowodzie tego, że $p^{m+n} = p^m p^n$ korzystają z fałszywej równości $C^{A \cup B} = C^A \times C^B$ (str. 145). Dowody klasycznych twierdzeń Cantora-Bernsteina oraz Cantora są bardzo długie i mało czytelne. Czyż nie prościej (str. 138) jest wziąć funkcję $g : X \to P(X)$ i pokazać, że $\{x \in X : x \notin g(x)\} \notin \overrightarrow{g}(X)$? A w dowodzie twierdzenia Cantora-Bernsteina Autorzy ponownie korzystają z sumy rodziny zbiorów, którą wprowadza się dwa rozdziały później. Po lekturze tego rozdziału czytelnik może odnieść dziwne wrażenie, że prawdziwość twierdzeń matematycznych ustalana jest na drodze bliżej nie sprecyzowanego consensusu: „... *nie został on jednak przez wszystkich zaakceptowany z tego powodu, że jest niekonstruktywny.*” (str. 135).

8. Typy i liczby porządkowe. Rozdział ten, podobnie jak poprzedni, rozpoczyna się od niepoprawnych definicji i od podobnych pseudo-usprawiedliwień. Dowiadujemy się, między innymi, że „*Niestety, pojęcie zbioru wszystkich zbiorów jest (...) sprzeczne wewnętrznie*” oraz, że „*W naiwnej jednak teorii mnogości, którą się tutaj zajmujemy, możemy abstrahować od takich kwestii*” (str. 151). Na str. 159 zapomniano pokazać, że zdefiniowany obiekt Z jest zbiorem.

9. Działania uogólnione. Wprowadzone są operacje sumy i przekroju dowolnej rodziny zbiorów, rodziny indeksowane. Autorzy dowodzą kilka własności działań uogólnionych, wprowadzają pojęcie uogólnionego iloczynu kartezjańskiego. Do dowodu tego, że $\bigcap_{t \in T} F_t \subseteq F_{t_0} \subseteq \bigcup_{t \in T} F_t$ korzystają z praw *dictum de omni* i *dictum de singulo* (str. 164).

10. System Aksjomatyczny Teorii Mnogości. W rozdziale tym, po trochę nudnym wstępie, Autorzy przytaczają listę aksjomatów teorii mnogości ZFC z makabrycznie sformułowanym aksjomatem wyboru, snują nieco rozważań o intencji i ekstensji oraz formułują szereg głębokich myśli, których pewien sens (mimo, że zajmuję się teorią mnogości) udało mi się dostrzec dopiero po dłuższym zastanowieniu (np. ”*Zauważmy, że aksjomat ten dopuszcza niepredykatywne definicje zbiorów, tzn. definicje zbiorów odwołujące się do ogółu, do którego należy też zbiór definiowany*, str. 177). Rozdział ten kończą rozważaniami o Aksjomacie Wyboru.

Zadania. Wszystkie rozdziały, poza ostatnim, kończą się listami zadań. Zadania w tego typu książce są bardzo ważne, gdyż dobrze prowadzone ćwiczenia mogą uratować nawet bardzo słaby wykład. Niestety, nie ma wśród nich ani jednego ciekawego, które by wymagało czegoś więcej niż bezpośredniego odwołania się do definicji. Wszystkie są rutynowe i mogą sprawić wrażenie, że zagadnienia poruszane na wykładzie są w istocie trywialne. Nie jestem też pewien, co powinien zrobić czytelnik z zadaniami poświęconymi mocom zbiorów, skoro dowiedział się od Autorów, że pojęcie to jest formalnie niepoprawne.

Pora na podsumowanie. Lektura książki wprowadziła mnie w przygnębienie, zwłaszcza, gdy przeczytałem ponownie, że „*Książka powstała na podstawie wykładów i ćwiczeń prowadzonych przez autorów na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.*" Wygłoszenie dobrego wykładu ze Wstępu do teorii mnogości jest – jak widać - trudnym zadaniem, z którym można sobie nie poradzić. Precyzja wystarczająca na wykładzie z logiki dla prawników jest całkowicie niewystarczająca dla informatyków i matematyków – pierwsze dwa rozdziały, najsłabsze w całej słabej książce, wywołać mogą tylko chaos w głowach biednych czytelników. W pozostałych rozdziałach jest wiele błędów technicznych. Niestety, pojawiają się w nich również poważne błędy koncepcyjne, takie jak złe definicje liczb kardynalnych i porządkowych. Książki tej należy unikać. Korzystanie z niej nawet tylko jako z materiału pomocniczego do wykładów może być szkodliwe dla studentów.

Jacek Cichoń