ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXV (1999)

Recenzje

J. B a n a ś, S. W ę d r y c h o w i c z, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996, wydanie trzecie, poprawione i uzupełnione, ISBN 83-204-2000-8.

W recenzji tej będzie mowa o dodatku „Zastosowania rachunku różniczkowego i całkowitego”*. Zajmuje on 37 stron druku, na których jest 115 zadań, w większości z odpowiedziami lub wskazówkami. Rzecz jest podzielona na trzy części: zastosowania w ekonomii (59 zadań), zastosowania w chemii, biologii, fizjologii i psychologii (21 zadań), zastosowania w fizyce (35 zadań). To oczywiście znak czasu. Ponoć ekonomia jest teraz najważniejsza. W Uniwersytecie Warszawskim, który jest uprzejmy mnie zatrudniać, wśród studentów ekonomii można spotkać od czasu do czasu laureatów Olimpiady Matematycznej. Podobnie zapewne jest również w innych uczelniach. Wcześniej, przed 1989 rokiem to się w zasadzie nie zdarzało – wykładałem tam analizę matematyczną przez kilka lat. Można więc myśleć, że Autorzy zbioru zadań umieścili wśród 59 propozycji kilka takich, których rozwiązanie wymaga chwili namysłu od młodego człowieka (chodzi o istoty myślące). I tu spotyka nas zawód. Zadania są sztampowe, nic ciekawego w nich nie ma. Jedyna radość to to, że jeśli przyjdzie nam prowadzić ćwiczenia w grupie złożonej ze studentów chcących wejść w posiadanie dyplomu (a wiedzy – niekoniecznie), to możemy otworzyć zbiór i robić zadania bez wcześniejszego ich czytania, bo nic nas tu nie jest w stanie zaskoczyć z wyjątkiem niezręcznych sformułowań.

Teraz omówię kilka przykładów zadań, które mi się szczególnie nie podobają. Zaznaczam, że jest to wybór, a nie pełna lista zastrzeżeń.

Zadanie 4. *Wartość produkcji fabryki toreb wynosi* $30x - 2x^2 - 2$ *zł za* x *roboczogodzin. Znaleźć wydajność krańcową* (tzn. pochodną – przyp. M.K.) *przy zatrudnieniu* 6 *robotników.* Odpowiedź: 6 zł za jedną roboczogodzinę. Jest to oczywiście pochodna funkcji $30x - 2x^2 - 2$ w punkcie $x = 6$, ale co to ma do liczby robotników, przecież oni mogą, ale nie muszą pracować równocześnie.

W zadaniu 8. podany jest wzór na cenę pary butów: $25 - 0,02x$. Ciekawe: jeśli fabryka wyprodukuje 1250 par butów (co chyba nie oznacza ogromnej produkcji), to cena będzie równa 0.

Polecenie w zadaniu 11. to: zinterpretować każdy składnik po prawej stronie równości: $\frac{dk}{dt} = s\frac{dc}{dt} + c\frac{ds}{dt}$. Wcześniej jest podany wzór $k = sc$. Odpowiedź: pierwszy składnik oznacza szybkość zmiany kosztów (k) na skutek zmiany cen (c), natomiast drugi jest szybkością wzrostu kosztów na skutek zmiany szybkości zużycia paliwa na kilometr (chodzi o s – przyp. M.K.). Zupełnie nie rozumiem, czemu ma służyć tego rodzaju zadanie, chyba że zakładamy, iż studenci nie mają zwyczaju myśleć w czasie zajęć z matematyki, więc mają się wszystkiego wyuczyć na pamięć i potem powtarzać uczone formułki bez zrozumienia. To co Autorzy nazwali zadaniem nadaje się najwyżej na pytanie, które zadać można studentom mimochodem w trakcie zajęć i oni mają natychmiast odpowiedzieć!

Zacytujmy zadanie 12. Cena jajek w groszach za tuzin wyraża się wzorem $c = 55(p-1)^{-2}$, gdzie p jest podażą wyrażoną w jednostkach 10 tys. tuzinów. Załóżmy, że 1 lipca 1995 r. podaż wynosi $p = 2.1$ oraz że maleje ona z prędkością 0.03 na miesiąc. Jak szybko rośnie wtedy cena?

Jest jeszcze wskazówka: zauważyć, że $c = f(p)$, gdzie p jest funkcją czasu tzn. $p = p(t)$, zatem $c(t) = f(p(t))$. Zdaniem Autorów odpowiedź brzmi: $c'(t_0) \cong 2.479$ grosza za tuzin. Moim zdaniem powinno być: ... za tuzin na miesiąc, bo najwyraźniej jednostką czasu jest tu miesiąc.

W zadaniu 14. mamy ustalać, gdzie wielomian kwadratowy maleje i szukać jego lokalnych ekstremów. Prawdopodobnie mamy użyć do tego celu pochodnych. Jeśli o to chodzi, to nie należy tego robić, bo do badania wielomianów kwadratowych niepotrzebny jest rachunek różniczkowy, a jego stosowanie w tym celu prowadzi do ogłupiania studentów.

W zadaniu 19. mamy wyrazić optymalną wielkość produkcji, jeśli przyjmujemy za kryterium optymalności koszt jednostkowy – a cóż to znaczy? Jaki koszt jest najlepszy: najmniejszy czy największy (np. w celu uniknięcia podatku)? Takich niedomówień jest w tekście więcej.

W zadaniu 29. Autorzy definiują tempo wzrostu $T_f(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jako $\lim_{h\to 0}[f(x_0+h) - f(x_0)]/[hf(x_0)]$ i każą udowodnić, że $T_f(x_0) = f'(x_0)/f(x_0)$. Co tu jest do dowodu?! Jeśli jednak przewidujemy taki poziom studentów, to może jeszcze zadanie z gwiazdką: wykazać, że $T_f(x_0) = (\ln|f|)'(x_0)$.

A teraz zadanie 32: Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie x_0 oraz $f(x_0) \neq 0$. Załóżmy, że przyrostowi argumentu x o $s\%$ odpowiada przyrost wartości funkcji f o $q\%$. Pokazać, że zachodzi wtedy przybliżona równość: $q \cong sE_f(x_0)$ (gdzie $E_f(x_0) = x_0 T_f(x_0)$ jest zdefiniowane wcześniej – M.K.). Mam pytanie: co tu ma być małe? – rozumiem z tekstu, że tu chodzi o bardzo słabych studentów, inaczej te zadania w ogóle nie mają sensu.

Zadanie nr 34 moim zdaniem powinno być przeznaczone dla szkoły podstawowej (chyba VI klasa), w skrócie: o ile wzrośnie $q(x) = \sqrt{2x+1}$, jeśli x wzrośnie o 1% licząc od $x_0 = 4$?

W rozwiązaniu zadania 44 natomiast brakuje najważniejszej części rozumowania: znaleziono za pomocą mnożników Lagrange'a punkt podejrzany o to, że w nim funkcja osiąga swe maksimum i stwierdzenie tego, że tak jest w rzeczywistości – pozostawiano czytelnikom. Rachunki według algorytmu, który każdy, kto posiadł umiejętność czytania, może znaleźć w dowolnym podręczniku, można opuścić, a wyjaśnienie kwestii delikatniejszych – dziedzina jest trójkątem domkniętym, musimy więc zająć się brzegiem – trzeba koniecznie zamieścić.

W odpowiedzi do zadania 56 jest błąd (literówka): ma być 80 zamiast 8.

Zadanie 61: Model liczby osób biorących udział w głosowaniu w pewnym rejonie jest opisany wzorem $N(t) = 30 + 20t^2 - t$, gdzie t oznacza czas w latach, N jest liczbą ludności w tysiącach. (a) W jakim czasie liczba głosujących wzrasta najszybciej? (b) Wyjaśnić znaczenie punktów $t = 0$ i $t = 8$. Czy w pytaniu (a) chodzi o maksimum N' czy o maksimum N'/N? Odpowiedź nie pasuje do żadnej z tych koncepcji, może wzór na $N(t)$ powinien być inny, np. $N(t) = 30 + 20t^2 - t^3$.

Zadanie 62. Liczba myszy w lesie zmienia się w zależności od liczby x zgodnie ze wzorem $P = 30 + 10^2 - x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 10$. Sporządzić wykres funkcji P oraz wyznaczyć jej wartość największą i najmniejszą. – Czy to jest zadanie z zastosowań matematyki w biologii?!

Zadanie 63. Organizm ameby utrzymuje zawsze kształt trójkąta prostokątnego, którego pole jest równe 10^{-6} mm^2. Znaleźć szybkość zmian obwodu tego trójkąta w chwili, gdy ameba ma kształt trójkąta równoramiennego i gdy jedna z nibynóżek rośnie z prędkością 10^{-4} m/s.

W rozwiązaniu obliczono pochodną obwodu względem długości jednej z przyprostokątnych oraz poinformowano czytelników, że informacja o nibynóżkach jest zbędna.

Zadanie 72. Liczba jednostek $N(t)$ w populacji jest dana wzorem $N(t) = N_0 e^{3t}/(3/2+e^{3t})$. Wyznaczyć $\lim_{t\to\infty} N(t)$ i przedyskutować biologiczne znaczenie tej granicy. Odp. $\lim_{t\to\infty} N(t) = N_0$. Oznacza to, że liczebność populacji w odległym czasie będzie dążyć do punktu równowagi N_0. O co tu chodzi? O jakiej równowadze możemy tu mówić? Co to jest odległy czas? Po co w ogóle dawać takie zadania? Jeśli już, to należałoby szacować błąd względny z jakim $N(t)$ przybliża N_0 dla jakiegoś konkretnego, niezbyt małego t zakładając, że student użyje jakiegoś elektronicznego urządzenia do przeprowadzenia obliczeń, chodzi przecież o biologów.

Zadanie 73. Psycholog przeprowadza manipulacje z teorią testów chcąc zastąpić współczynnik niezawodności

$$R = nr/(1+(n-1)r)$$

(wzór Spearmana–Browna)

przez liczbę 1 zgodnie z czyjąś sugestią, że tak powinno być dla „bardzo dużych” n. Dokonuje tego w ten sposób, że formalnie zastępuje n przez $1/x$, upraszcza, a następnie podstawia $x = 0$ i otrzymuje 1. Wyjaśnić postępowanie psychologa na podstawie teorii granic. Nie rozumiem, o co Autorom chodzi. Mamy analizować ciąg dany jednym z najprostszych i najczęściej spotykanych wzorów szkolnych. To nie ma sensu i nie ma też nic wspólnego ze stosowaniem matematyki – same terminy brzmiące uczenie nic mądrego nie wnoszą.

Zadanie 80. „... Szybkości wydalania (z organizmu – M.K.) substancji tymi drogami wyrażają się odpowiednio wzorami $v_1 = \alpha A e^{-(\alpha+\beta)t}$, $v_1(t) = \beta A e^{-(\alpha+\beta)t}$, gdzie α, β oraz A są pewnymi stałymi dodatnimi. Znaleźć ilość substancji wydalanej z organizmu tymi dwiema drogami i wyznaczyć ich wzajemny stosunek.” W jakim czasie? $t \to \infty$? – czy to nie za długo? Jeśli nie, to trzeba to jakoś uzasadnić, np. przez szacowanie funkcji wykładniczej i wykazanie, że dla dostatecznie dużych t (konkretne oszacowanie!) rezultat jest znikomą częścią wielkości $(\alpha+\beta)A$.

Zadanie 86. Temperatura ... jest dana wzorem $T(x,t) = \beta_1 e^{-\alpha t}\sin\lambda_1 x + \beta_2 e^{-\beta t}\sin\lambda_2 x + \beta_3 e^{-\gamma t}\sin\lambda_3 x$. Pokazać, że $\lim_{t\to\infty} T(x,y) = 0$ dla każdego punktu x. To nie są zastosowania do fizyki, jest to proste ćwiczenie na obliczanie granicy funkcji (wykładniczej), w którym Autorzy informują studenta, że wzór ma jakąś interpretację fizyczną, w co student ma uwierzyć, bo ma mieć (zapewne) zaufanie do swych nauczycieli. Nie tak chyba powinno wyglądać nauczanie matematyki.

Zadanie 112. W mechanice kwantowej liczbę cząstek podlegających rozkładowi Bosego–Einsteina można wyrazić za pomocą wzoru

$$n = \frac{2f}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{Ae^x - 1}\,dx,$$

gdzie A i f są stałymi rzeczywistymi oraz $A > 1$. Obliczyć wartość n. Gdzie tu Autorzy widzą fizykę? Skąd student ma wiedzieć, że tym razem odpowiedź w postaci szeregu jest akceptowalna?

Większość zadań ma coś wspólnego ze stosowaniem matematyki jedynie w sposób opisany w powyżej omówionych zadaniach, tj. w treści są jakieś nazwy spoza matematyki. Poza tym są to najprostsze z możliwych zadania matematyczne. Wygląda na to, że jedyny cel napisania tego rozdziału, to zwiększenie liczby potencjalnych nabywców książki. Wiele zadań sugeruje, że stosowanie matematyki jest banalną działalnością, bo polega jedynie na wykonywaniu najprostszych obliczeń za pomocą najprostszych metod. Użytkowników zbioru zadań nie zachęcam do korzystania z tego rozdziału. Autorzy powinni ten rozdział gruntownie przerobić, by ewentualne następne wydania książki zyskiwały na jego obecności. W tej formie może on jedynie służyć reklamie – oczywiście przy założeniu, że ewentualny nabywca nie zajrzy najpierw do wewnątrz!

Michał Krych

*Recenzja tekstu zasadniczego (wydanie pierwsze) pióra A. Birkholca ukazała się w Wiadom. Mat. 31 (1995), str. 211–212.