

Recenzje

Odpowiedź na recenzję Jacka Cichonia

Recenzję naszej książki *Wstęp do teorii mnogości* pióra Jacka Cichonia przeczytaliśmy z mieszanymi uczuciami. Trudno nam się oprzeć wrażeniu, że recenzja ta (i wyciągnięte przez Recenzenta końcowe wnioski) dalekie są od rzetelności i obiektywności.

A oto nasze uwagi do konkretnych zarzutów Recenzenta.

Zacznijmy od uwagi, że w części logicznej (rozdziały 1 i 2), prezentujemy – co wyraźnie deklarujemy w Przedmowie – tylko wstęp do logiki. Studenci matematyki i informatyki mają w programie studiów cały wykład poświęcony logice matematycznej, nie ma więc powodu, by logikę potraktować zbyt szeroko. Podajemy więc tylko niezbędne informacje, odwołując się przy tym do wiadomości ze szkoły średniej. Jeśli chodzi o konkretne zarzuty Recenzenta, to:

(1) Precyzyjna definicja wartościowania pojawi się na wykładzie z logiki matematycznej i nie widzimy powodu, by ją tu wprowadzać.

(2) Na jakiej zasadzie uznawać, że np. zdania o schematach $\phi \wedge \psi$ i $\neg\phi \vee \neg\psi$ są sprzeczne?

(3) Wbrew temu, co pisze Recenzent, pojęcie schematu zdania pojawia się wcześniej (na str. 13).

(4) Predykat identyczności bywa uznawany przez specjalistów za predykat pozalogiczny (por. np. W.A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów*, PWN, Warszawa 1981, str. 65). Nie wykluczamy go jednak z logiki (por. str. 38–39, a także 44–45).

(5) Co do pojęcia tautologii rachunku predykatów, jedynym zarzutem może tu być tylko to, że *intuicyjne* określenie rozumienia terminu „tautologia” nazwaliśmy „definicją”. Uznaliśmy, że skoro pojęcie tautologii rachunku predykatów zostanie precyzyjnie zdefiniowane na nieodległym czasowo wykładzie logiki matematycznej, to nie ma potrzeby wprowadzać tu pojęcia wartościowania i spełniania, zwłaszcza że definicja ta nie jest krótka i wymaga komentarza. Natomiast mimo wszystko czytelnikowi należy się jakaś informacja, czym są napisy zwane „prawami rachunku predykatów” – jak tu jest rozumiany termin „prawo”. Stąd nasza „definicja”. Nie omijamy Tarskiego, tylko do niego nie dochodzimy.

Rozdział 3: Podstawy teorii zbiorów. Nie jest jasne, dlaczego Recenzenta dziwią nasze uwagi na temat (spotykanych) sposobów wprowadzania zbioru pustego – przecież w tekście wyraźnie wyjaśniamy, o co nam chodzi. Nigdzie nie twierdzimy też (co zdaje się sugerować Recenzent), że jedynym sposobem definiowania zbiorów jest operacja wyróżniania. Co Recenzent ma na myśli mówiąc o „aksjomatach równości rachunku zdań”?! Celem podanych na końcu rozdziału uwag o algebrach Boole’a i twierdzeniu Stone’a jest jedynie wskazanie pewnych faktów i własności a nie ich systematyczny wykład (a zresztą pojęcie izomorfizmu studenci znają przecież choćby z wykładu algebry, a my nie wykładamy całej matematyki w duchu Bourbakiogo).

Rozdział 4: Relacje. Dlaczego wedle Recenzenta termin „konwers” relacji jest „egzotyczny”? Przecież jest to pojęcie używane w wykładach logiki na równi z pojęciem relacji odwrotnej (wystarczy zajrzeć do kilku podręczników, by się o tym przekonać). Dalej, relację zamieszkiwania w tym samym budynku będącą przykładem relacji równoważności ograniczono do mieszkańców Poznania po to, by ustalić jej pole (chcemy uspokoić Recenzenta: zamiana Poznania na Wrocław niczego tu nie zmieni i wiemy o tym doskonale!). „Miła niespodzianka” (żeby użyć zwrotu Recenzenta) w postaci aksjomatów Peana (a nie Peano, jak pisze Recenzent!) znalazła się po to, by pokazać jeden ze sposobów wprowadzenia pojęcia liczby naturalnej, które było bazą wcześniejszych konstrukcji wykorzystujących relacje równoważności – i w tekście wyraźnie to wyjaśniamy. Dziwią więc złośliwe uwagi Recenzenta na ten temat.

Rozdział 5: Funkcje. Istotnie, bijemy się w piersi. Definicja funkcji nie jest do końca poprawna. Usterka wzięła się z braku stosownego ograniczenia kwantyfikatora: zamiast $\forall x \in X$ powinno być rzecz jasna $\forall x \in D(R)$. Z drugiej strony zawiniło tu spotykane często w literaturze (a wiadomo: *habitus altera natura est*) ograniczanie się tylko do funkcji całkowitych. Dlaczego za niepoprawne uważa Recenzent stwierdzenie o analogiczności złożenia i operacji iloczynu względnego – toż identyczność może być przecież traktowana jako szczególny przypadek analogii. Na stronie 91 istotnie brakuje założenia, że $A \subseteq \text{dom}(f)$.

Rozdział 6: Relacje porządkujące. Rzeczywiście, słowo „typy” użyte w tytule paragrafu nie jest zbyt fortunne (słowo to ma przecież znaczenie techniczne w teorii mnogości, a tu zostało użyte w sensie potocznym). Zgrabniej pewnie byłoby zatytułować ten paragraf „Rodzaje relacji porządkujących”. W definicji elementów minimalnego i maksymalnego (str. 108) istotnie pojawił się błąd drukarski: powinno być $x_0 < y$ ($y < x_0$) a nie $x_0 \leq y$ ($y \leq x_0$). Podane jednak w tej samej definicji wyjaśnienie słowne jest poprawne. Jeśli chodzi

o definicję dobrego porządku (str. 110), to istotnie można dopatrzeć się w niej błędu syntaktycznego, jako że wcześniej rozważyliśmy wyraźnie tylko kwantyfikatory z jednym warunkiem ograniczającym, a tu pojawiły się dwa warunki. Definicja jest jednak z całą pewnością merytorycznie poprawna, zrozumiała i nie wzbudzi żadnych wątpliwości u czytelnika. Na str. 113 wyraźnie piszemy, co mamy na myśli mówiąc o skomplikowaniu definicji relacji dobrego porządku na zbiorze liczb rzeczywistych. Sugestia Recenzenta, by zamiast tego mówić, że „porządek taki nie może być analityczny ani coanalityczny”* jest niezgodna z jego wcześniejszymi sugestiami i zastrzeżeniami – przecież wprowadzenie nieznanych pojęć wprowadzi jeszcze większy zamęt i będzie mniej zrozumiałe (będzie przecież klasycznym błędem *ignotum per ignotum*).

Rozdział 7: Teoria mocy. Niezrozumiałe są zastrzeżenia Recenzenta do naszych uwag na temat sposobu wprowadzenia mocy zbiorów poprzez relację równoliczności – jest to przecież sposób stosowany w wielu wykładach naiwnej teorii mnogości, a taką przecież prezentujemy w książce. Wyjaśniamy też (str. 122) dlaczego te braki i niedostatki intuicyjnej w istocie definicji mocy zbioru (wywodzącej się od Cantora) nie psują poprawności dalszych rozważań. Nieprawdziwa jest następująca uwaga Recenzenta: „Całkowicie błędna jest teza, że czasami w teorii mnogości wprowadza się pojęcie liczby kardynalnej jako pojęcie pierwotne”. Czymże bowiem innym jest w istocie wprowadzenie liczb kardynalnych jako pewnych typów relacyjnych, przy czym to ostatnie jest pojęciem pierwotnym. A tak robią na przykład w swej monografii *Teoria mnogości* K. Kuratowski i A. Mostowski. Nigdzie nie piszemy, jak sugeruje Recenzent, że „zbiór jest przeliczalny, jeśli jest zbiorem wyrazów jakiegoś nieskończonego ciągu”. Piszemy natomiast: „zbiór nieskończony jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego elementy można ustawić w ciąg nieskończony” (str. 128). Skąd więc kolejny zarzut? Dalej, jak słusznie zauważa Recen-

zent, w kilku miejscach tego rozdziału korzystamy z sum rodzin zbiorów (wprowadzając to pojęcie dopiero w rozdziale 9), ale za każdym razem podajemy stosowne definicje – czytelnik nie natrafi więc na żadne trudności pojęciowe. W paragrafie 7.5 wkradł się – przyznajemy – błąd drukarski: powinno być \sim zamiast $=$. To, że tylko w niektórych miejscach wyraźnie mówimy, że korzysta się tu z aksjomatu wyboru, a w innych nie, nie jest wynikiem pogubienia się, co sugeruje Recenzent, ale tego, że celem naszym nie jest pedantyczne wskazywanie (chwalebne zresztą, ale nie w wykładzie dla początkujących) wszystkich miejsc, w których interweniuje ten aksjomat, a jedynie uwrażliwienie czytelnika na jego rolę poprzez wskazanie przykładów. Recenzent twierdzi, że podane przez nas dowody twierdzeń Cantora-Bernsteina i Cantora są bardzo długie i mało czytelne. Być może. To subiektywna opinia Recenzenta, do której ma oczywiście pełne prawo. Jego końcowa natomiast uwaga dotycząca rozdziału 7 naszej książki jest już jednak nadużyciem. Przytacza się tu mianowicie zdanie całkowicie wyrwane z kontekstu i stosuje je arbitralnie do własnej uwagi dotyczącej czegoś zupełnie innego. U nas jest ono komentarzem do reakcji współczesnych na dowód Cantora istnienia liczb przestępnych, a Recenzent odnosi je do własnych uwag na temat bliżej nieokreślonego *consensusu***.

Rozdział 8: Typy i liczby porządkowe. Odpowiedź na zarzuty Recenzenta jest tu podobna do tej sformułowanej przy okazji liczb kardynalnych. Zastanawiamy się cóż dziwnego widzi Recenzent w przytaczanych przez siebie a wziętych z naszej książki zdaniach na temat antynomiczności pojęcia zbioru wszystkich zbiorów czy na temat tego, że kwestie te nie mają większego znaczenia dla naiwnej teorii mnogości i że w konsekwencji możemy ją uprawiać mimo nich. W rozdziale 10 zresztą opisujemy system aksjomatyczny teorii mnogości, który jest propozycją rozwiązania trudności.

Dziwne są uwagi Recenzenta dotyczące rozdziału 10, w którym opisuje się aksjomatyczny system teorii mnogości Zermela-

Fraenkla. Dlaczego zdaniem Recenzenta uwagi o historii aksjomatyzacji teorii mnogości wraz z opisem sytuacji, która wymusiła konieczność poszukiwania takich aksjomatyzacji (antynomie) są nudne? Rozumiemy, że mogą one nie interesować kogoś, dla kogo kwestie historii matematyki są nieinteresujące i kto koncentruje się jedynie na zagadnieniach technicznych. Ale tak nie czynią przecież wszyscy. Może więc dla nich właśnie nasze uwagi okażą się interesujące. Z drugiej strony nie jest dla nas jasne, czy Recenzent zauważył, że jednym z celów, które nam przyświecały przy pisaniu tej książki, było podanie nie tylko wiadomości „technicznych” z teorii mnogości, ale także ukazanie jej rozwoju w szerszym kontekście historycznym i filozoficznym (taką też rolę pełni dodatek historyczny dołączony do książki, którego Recenzent w swej recenzji w ogóle nie dostrzegł). Dalej, dlaczego podane przez nas sformułowanie aksjomatu wyboru uznaje Recenzent za „makabryczne”? Przecież jest to po prostu aksjomat wyboru zapisany w formalizmie teorii mnogości! Czyżby Recenzent nigdy takiego sformułowania nie widział i zadowolął się jedynie jego sformulowaniem w języku potocznym (które zresztą też podajemy, uznając jednocześnie, że student powinien choć raz zobaczyć symboliczne sformułowanie tego aksjomatu). Trudno w to uwierzyć, boć sam przecież deklaruje w recenzji, że zajmuje się teorią mnogości. Nie jest też jasne, co sprawiło Recenzentowi taką trudność w dostrzeżeniu pewnego sensu w uwagach natury filozoficzno-historycznej o poszczególnych aksjomatach i ich roli (może brak zainteresowania tego typu pytaniami i ograniczanie się wyłącznie do kwestii technicznych?). Nie rozumiemy też, cóż takiego dziwnego dostrzegł Recenzent w uwadze o definicjach niepredykatywnych poczynionych na marginesie aksjomatu wyróżniania. Przecież dyskusja wokół definicji niepredykatywnych i ich roli w matematyce odegrała bardzo istotną rolę w kształtowaniu się współczesnych koncepcji podstaw i filozofii matematyki (wystarczy tu wspomnieć choćby Poincarégo i Russella).

Uwaga, że zadania podane w książce nie są ciekawe to subiektywne odczucie Recenzenta (ma do tego zresztą prawo). Ale czy nie zauważył uwagi poczynionej w Przedmowie, gdzie wyjaśniamy, że celem podanych zadań jest pomoc w przyswojeniu sobie materiału i gdzie wyraźnie piszemy, że nie mogą one zastąpić zbiorów zadań, do których odsyłamy podając kilka z nich w umieszczonym na końcu książki spisie literatury (czytelnicy znajdą tam z pewnością zadania ambitniejsze). Odpowiedź na pytanie Recenzenta „co powinien zrobić czytelnik z zadaniami poświęconymi mocom zbiorów” jest oczywista. Otóż wśród tych zadań nie ma żadnego, w którym występowałoby pojęcie liczby kardynalnej (mówi się w nich jedynie o ustalaniu równoliczności konkretnych zbiorów). Czytelnik nie natrafi więc na żadne trudności pojęciowe. Czyżby Recenzent tego nie zauważył?

Trudno nam uznać recenzję Jacka Cichonia za rzetelną i obiektywną. Wynika z niej, że w naszej książce są wyłącznie niepoprawne definicje, fałszywe twierdzenia, niedobre dowody, nieudolne (i oczywiście, w opinii Recenzenta, nieudane) próby zrobienia czegoś lub, w najlepszym razie, fragmenty w miarę poprawne, ale za to nudne lub takie, których pewien sens udało się dostrzec Recenzentowi dopiero po dłuższym zastanowieniu (por. punkt 10 recenzji). Recenzent (tak jak każdy czytelnik) ma

oczywiście prawo do własnej, subiektywnej oceny książki, ale ocenę taką – w przypadku jej publikowania – należy merytorycznie i rzetelnie uzasadnić. Takiego merytorycznego uzasadnienia nie ma w recenzji J. Cichonia. Wyżej pokazaliśmy, że poza kilkoma wyjątkami zarzuty Recenzenta są niesłuszne. Owszem, przyznajemy, są w książce usterki (to te wspomniane wyjątki), jednak końcowe wnioski – bardzo skrajne – wyciągnięte przez Recenzenta nie są uprawnione, bo zostały wyprowadzone z nader wątpliwych przesłanek. Do tego w recenzji aż się roi od argumentów *ad personam* (często sformułowanych w tonie nastawliwym czy ironicznym). Ponieważ uważamy, że nie przystoi posługiwać się takimi argumentami (być może z braku innych) w recenzji publikowanej w poważnym i cieszącym się długą i piękną tradycją czasopiśmie, nie będziemy podejmowali z nimi dyskusji i zignorujemy je po prostu.

Pozostaje nadzieja, że ewentualny czytelnik zechce sam zajrzeć do książki i dopiero na tej podstawie wyrobić sobie o niej opinię a nie będzie opierał się wyłącznie na apodyktycznych, subiektywnych i nie do końca uzasadnionych stwierdzeniach Recenzenta.

Roman Murawski
Kazimierz Świrydowicz

* Przy okazji: po polsku powinno być raczej „koanalityczny” lub „ko-analityczny”.

** *Słownik poprawnej polszczyzny* Markowskiego sugeruje tu zresztą użycie raczej słowa „konsens” czy lepiej „zgoda, porozumienie”.