ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XL (2004)

Henryk Żołądek (Warszawa)

# Piąty problem milenijny: istnienie pola Yanga-Millsa i luka masowa

**1. Wstęp.** Spośród siedmiu problemów milenijnych ten jest zdecydowanie najtrudniejszy do opisania[1]. W wielkim skrócie polega on na stworzeniu matematycznych podstaw dla teorii cząstek elementarnych, na podobieństwo szczególnej i ogólnej teorii względności oraz mechaniki kwantowej. Te ostatnie stanowią centralne odkrycia fizyki pierwszej ćwierci XX wieku i są dosyć dobrze znane matematykom. W sumie są to tylko równania różniczkowe cząstkowe.

Pozostałe trzy ćwierci zeszłego wieku, z punktu widzenia fizyków, są poświęcone głównie opracowaniu teorii oddziaływań cząstek elementarnych. Na początku lat 1950-tych ukończono elektrodynamikę kwantową; (jej historię pieknie opisał noblista S. Weinberg w pierwszym rozdziale monografii [We]). W 1954 roku ukazała się praca C. Yanga i R. Millsa [YM], w której zaproponowali rozszerzenie abelowej grupy $G = U(1)$ symetrii elektronów, pozytonów i fotonów na przypadek nieabelowy. Właśnie pola Yanga–Millsa okazały się niezwykle użyteczne w dalszej klasyfikacji cząstek elementarnych. Chodzi głównie o teorię oddziaływań słabych z $G = SU(2) \times U(1)$ i o chromodynamikę kwantową z $G = SU(3)$. Fizycy cieszą się, bo dzięki umiejętnej regularyzacji (nazywanej renormalizacją) pewnych rozbieżnych całek, wyrażających amplitudy prawdopodobieństwa zachodzenia określonych procesów, udało się im uzyskać wyniki wysoce zgodne z danymi doświadczalnymi.

Niestety, matematycy przestali ‘nadążać’ za fizykami. W pewnym sensie kwantową teorię pola można traktować jako teorię równań różniczkowych

1991 Mathematics Subject Classification: 81T13, 81T08.
Key words and phrases: problemy milenijne, kwantowa teoria pola, pola Yanga–Millsa
Praca napisana w ramach tematu KBN No 2 P03A 010 22.

[1] Gdy po raz pierwszy WM zaproponowały mi napisanie artykułu na ten temat, odmówiłem. Z czasem zmieniłem zdanie, powodowany po części ambicją, a po części wstydem; swego czasu krótko zajmowałem się podobną tematyką.

cząstkowych nieskończenie wielu zmiennych. Z pewnymi klasycznymi operatorami różniczkowymi należy jednak postępować ostrożnie. Fizycy 'czują', jak należy traktować, np. laplasjan na przestrzeni funkcyjnej lub układ nieskończenie wielu oscylatorów harmonicznych. Matematycy dopiero oswajają się z takimi nieskończonościami.

Piąty problem milenijny polega na 'dogonieniu' i 'poprawieniu' fizyków. Został on opracowany przez A. Jaffe i E. Wittena [JW] (patrz także [Wit]), gdzie wydzielono teorię Yanga–Millsa jako:

– centralną w fizyce,

– ważną matematycznie,

– reprezentatywną dla trudności pojawiających się w kwantowej teorii pola.

Oto oryginalne sformułowanie problemu: *udowodnić, że dla dowolnej prostej zwartej grupy cechowania kwantowe pole Yanga–Millsa istnieje i posiada lukę masową.*

Następne paragrafy tego artykułu służą krótkiemu przedstawieniu matematycznych aspektów kwantowej teorii pola, związanych z piątym problemem milenijnym. Zaczniemy od skalarnego pola bozonowego, gdzie wprowadzimy kilka istotnych pojęć (luka masowa, przestrzeń Focka, model siatkowy, grupa renormalizacyjna, asymptotyczna swoboda). Następnie opiszemy model elektrodynamiki kwantowej (z fermionami i grupą przekształceń cechowania). W kolejnym modelu Yanga–Millsa–Higgsa wprowadzimy nieabelowe cechowania i opiszemy mechanizm Higgsa. Przy opisie chromodynamiki kwantowej opowiemy, na czym polega uwięzienie kwarków i łamanie chiralnej symetrii.

Zakończę ten wstęp uwagą, że w ostatnich dwudziestu latach metody teorii pola okazały się źródłem czysto matematycznych inspiracji. Oto przykłady: niezmienniki Donaldsona i Seiberga–Wittena 4-rozmaitości, niezmienniki typu Jonesa 3-rozmaitości, symetria lustrzana, kohomologie eliptyczne, modularna natura charakterów reprezentacji sporadycznych grup skończonych. Niestety, nie możemy zatrzymywać się na tych kuszących tematach.

## 2. Model $\lambda\phi^4_d$ euklidesowej teorii pola

**2.1.** *Lagranżjan i działanie.* [IZ,GJ2,We]. Przy okazji tworzenia teoretycznego aparatu relatywistycznej elektrodynamiki kwantowej fizycy przeprowadzili równolegle wyliczenia dla zdecydowanie prostszego modelu skalarnego pola bozonowego $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ z *lagranżjanem*

$$L(\phi) = -\phi_t^2 + \phi_{x_1}^2 + \ldots + \phi_{x_{d-1}}^2 + m^2\phi^2 + \lambda\phi^4,$$

który jest niezmienniczy względem grupy Poincarégo (grupy izometrii przestrzeni Minkowskiego). Wygodnie jest przejść do czasu urojonego $t = ix_0$, wtedy bowiem możemy zdefiniować dodatnio określone *działanie*

$$S(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(-\Delta + m^2)\phi + \lambda\phi^4,$$

z *czystą masą* $m$ i z *czystą stałą sprzężenia* $\lambda$.

**2.2.** *Przestrzeń Hilberta i Hamiltonian.* [GJ2,Si]. Oczekuje się, że funkcja const $\cdot e^{-S(\phi)}$ jest 'gęstością' pewnego rozkładu prawdopodobieństwa $\mu$ na przestrzeni $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (dystrybucji temperowanych). Ponadto miara warunkowa $\nu$ indukowana na przestrzeni $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$, dystrybucji niezależnych od $x_0$, powinna definiować *fizyczną przestrzeń Hilberta* $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1}), \nu)$, generowaną przez wyrażenia $\delta_0(x_0) \cdot \prod f_j$, $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ (traktowane jako elementy $L_2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mu)$). Przesunięcie $(0, x') \to (s, x')$, $s > 0$, indukuje pewne włożenie $\mathcal{H}$ w $L_2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mu)$. Rzutując obraz z powrotem na $\mathcal{H}$ otrzymujemy półgrupę operatorów $e^{-sH} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, tzw. *macierzy przejścia.* Jej generator $H$ jest *operatorem Hamiltona.*

**2.3.** *Swobodne pole.* [GJ2,Ne]. Powyższy obrazek wydaje się zbyt piękny, aby był prawdziwy. Jednakże dla $\lambda = 0$ miara $\mu$ rzeczywiście istnieje. Jest to miara gaussowska z funkcją charakterystyczną

$$\int e^{if(\phi)} d\mu(\phi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(f, \left(-\Delta + m^2\right)^{-1} f\right)\right], \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

gdzie $f(\phi) = \phi(f) = \int \phi f$ i w wykładniku $[\cdot]$ mamy iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot)$ w $L_2(\mathbb{R}^d)$.

W przypadku $d = 1$ miara $\mu$ definiuje stacjonarny proces stochastyczny Ornsteina–Uhlenbecka $\{\xi_s\} = \{\phi(s)\}$ z korelacjami $\langle \xi_s \xi_t \rangle_\mu = \frac{1}{2m} e^{-m|s-t|}$ i ciągłymi realizacjami. (W przypadku 1-wymiarowej czasoprzestrzeni cała teoria jest dosyć standardowa).

W przypadkach $d \geq 2$ jądro $C(x,y)$ (propagator) operatora $\left(-\Delta + m^2\right)^{-1}$ ma osobliwość wzdłuż diagonali: $\sim \ln|x-y|$ $(d=2)$ i $\sim |x-y|^{2-d}$ $(d \geq 3)$. Dlatego też wielkości $\phi(x)$ nie reprezentują zmiennych losowych ($\langle \phi^2(x) \rangle = \infty$). $\phi$ jest zmienną losową o wartościach dystrybucyjnych i dopiero wielkości $f(\phi)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, są standardowymi zmiennymi losowymi. $\phi$ jest tzw. uogólnionym polem losowym, nazywanym *swobodnym polem bozonowym o masie* $m$.

Miara $\mu$ jest przykładem całki funkcjonalnej lub całki feynmanowskiej po trajektoriach.

**2.4.** *Interpretacja masy.* [JW,GJ2]. Nietrudno pokazać oszacowanie

$$|\langle F(\phi)G(\phi) - \langle F(\phi)\rangle \langle G(\phi)\rangle| < C \cdot e^{-m \cdot \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\, F, \mathrm{supp}\, G)}, \tag{2.1}$$

dla funkcji $F, G$ w postaci iloczynów próbnych funkcji o zwartych i odległych nośnikach. Zatem masa $m$ jest *wykładnikiem ubywania korelacji.*

Wielkość $m$ interpretuje się także jako *lukę masową* w widmie operatora Hamiltona $H$. Fizyczną przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ można utożsamić z następującą *bozonową przestrzenią Focka*

$$\mathcal{F}_s(X) = \overline{\mathbb{C}\Omega \oplus X \oplus S^2X \oplus S^3X \oplus \ldots} = \overline{S(X)},$$

gdzie

$$X = L_2(\mathbb{R}^{d-1}, d^{d-1}p/\sqrt{m^2+p^2})$$

jest *przestrzenią Hilberta stanów* 1-*cząstkowych* w obrazie pędów $p$, zaś $S^jX$ są symetrycznymi potęgami tensorowymi $X$. Hamiltoniam $H$ jest utożsamiany z

$$0 \oplus E \oplus (E \otimes 0 + 0 \otimes E) \oplus \ldots,$$

gdzie $E : X \to X$ jest operatorem mnożenia przez $\sqrt{m^2+p^2}$ (zgodnie ze wzorem Einsteina $E = mc^2$, gdy prędkość światła $c = 1$ i pęd $p = 0$). Inna definicja $\mathcal{H}$, to $L_2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1}), \nu)$, gdzie miara $\nu$ jest gaussowska z funkcją charakterystyczną $\left\langle e^{if(\phi)}\right\rangle_\nu = \exp\left[-\frac{1}{2}(f,(2E)^{-1}f)\right]$.

Widać, że widmo $H$ składa się z wartości własnej 0, z *wektorem próżni* $\Omega$ jako własnym, i z półprostej $[m,\infty)$. Mamy oszacowanie

$$\left|(v_1, e^{-sH}v_2)_{\mathcal{H}}\right| \le Ce^{-ms}, \quad v_1, v_2 \in \mathcal{H} \ominus \mathbb{C}\Omega. \tag{2.2}$$

Oszacowania (2.1) i (2.2) służą za definicję masy również w przypadku samooddziałującego pola.

**2.5.** *Przybliżenie siatkowe.* Niestety, gdy pole $\phi$ oddziałuje z samym sobą ($\lambda > 0$), miary $\mu$ nie można opisać tak pięknymi wzorami jak w przypadku swobodnym. Tę miarę należy dopiero skonstruować.

Najpierw zakładamy, że (euklidesowa) czasoprzestrzeń jest postaci

$$\Lambda = \Lambda_{N,h} = [-N,N]^d \cap h\mathbb{Z}^d,$$

czyli zbiorem punktów siatki o oczkach długości $h$ zawartych w kostce o krawędziach długości $2N$. Wtedy pole $\phi$ jest utożsamiane z konfiguracją 'spinów' $\{\phi(x), x \in \Lambda\} \in \mathbb{R}^\Lambda$. Wyrażenia

$$\mu_{N,h} = \frac{1}{Z} e^{-F(\phi)} \prod_{x\in\Lambda} d\phi(x),$$

$$F = \sum_{x\in\Lambda\cup\partial\Lambda} h^d \sum_{\substack{\nu=1,\ldots,d,\\ x+he_\nu\in\Lambda\cup\partial\Lambda}} \left(\frac{1}{h}\left(\phi(x+he_\nu) - \phi(x)\right)\right)^2 + \\ + m^2 \sum_{x\in\Lambda} h^d\phi^2(x) + \lambda \sum_{x\in\Lambda} h^d\phi^4(x)$$

zadają miarę probabilistyczną na przestrzeni $\mathbb{R}^{\Lambda}$. Tutaj $\frac{1}{h}(\phi(x+he_\nu) - \phi(x))$ odpowiada pochodnej cząstkowej w kierunku wersora $e_\nu$ i zakładamy, że na *brzegu* $\partial\Lambda = \{x \in h\mathbb{Z}^d : \mathrm{dist}(x,\Lambda) = h\}$ jest zadany ustalony układ spinów. Stałą $Z$ nazywa się *sumą statystyczną*.

Spodziewamy się, że dla dużych $N$ i małych $h$ powyższy model siatkowy przybliża model ciągły. Na przykład, $\phi(x) := \phi(\chi_x)$, gdzie $\chi_x$ jest funkcją próbną o małym nośniku wokół $x \in \Lambda$.

**2.6.** *Granica termodynamiczna.* Jeśli chodzi o granicę, gdy $N \to \infty$, a $h$ jest stałe, to można posłużyć się metodami mechaniki statystycznej. Jest to tak zwana granica termodynamiczna, a odpowiednia miara na $\mathbb{R}^{h\mathbb{Z}^d}$ jest nazywana *granicznym rozkładem Gibbsa.* Wiadomo, że ta granica istnieje dla dowolnych stałych $m, \lambda$ i dowolnych warunków brzegowych (patrz [GJ2,Si]). Dla małych $\lambda$ metodą tzw. *rozwinięć gronowych* dowodzi się niezależności granicznego rozkładu od warunków brzegowych. Dla dużych $\lambda$ mogą wystąpić przejścia fazowe (niejednoznaczność granicznej miary).

**2.7.** *Renormalizacja.* Niestety, z granicą przy $h \to 0$ już tak prosto nie jest. Pojawiają się nieskończoności już w pierwszych wyrazach rozwinięcia względem potęg $\lambda$. Na przykład, $\left\langle\phi^4(x_0)\right\rangle_{\mu_{N,h}}|_{\lambda=0} \to \infty$, bo $\phi^4(x_0)$ nie istnieje dla ciągłego pola swobodnego. Tutaj *renormalizacja* polega na zamianie jednomianu $\phi^4$ wielomianem Hermite'a (lub Wicka) : $\phi^4 := \phi^4 - 6\phi^2\left\langle\phi^2\right\rangle_{\mu_{N,h}} + 3\left\langle\phi^2\right\rangle^2_{\mu_{N,h}}$ ; wtedy $\left\langle: \phi^4 :\right\rangle = 0$ i np. $\left\langle: \phi^4(x_0) :: \phi^4(x_1) :\right\rangle = 4!\left\langle\phi(x_0)\phi(x_1)\right\rangle^4$.

Nawet po tej stosunkowo elementarnej modyfikacji nadal mogą się pojawić rozbieżności, związane z rozbieżnością szeregu potęg $\lambda$. Wypada modyfikować czystą masę $m = m(N,h)$ i czystą stałą sprzężenia $\lambda = \lambda(N,h)$. Te modyfikacje udaje się zorganizować wprowadzając pewne skalowania. Przejście od jednej skali do drugiej polega na zamianie odległości $h$ między węzłami siatki na $h' = h/2$ i równoczesnym rozszerzeniu obszaru $N \to N' = 2^\alpha N$. Uśredniając po spinach w komórkach o mocy $2^d$ z miary Gibbsa na przestrzeni konfiguracji na $\Lambda_{N',h'}$ dostaje się miarę Gibbsa na przestrzeni konfiguracji na $\Lambda_{N,h}$, jednak ze zmienionymi parametrami $m = 2^{-\beta}m'$ i $\lambda = 2^{-\gamma}\lambda'$. Odwrotna operacja do tego uśredniania nosi nazwę *przekształcenia renormalizacji.* Jego iteracje tworzą półgrupę, nazywaną *grupą renormalizacyjną* i oznaczaną $\{R^s\}$.

Pojawia się pytanie o punkty stałe grupy renormalizacyjnej. Sytuacja, gdy $\lambda(s) \to 0$ przy $s \to \infty$, nazywa się *nadfioletową asymptotyczną swobodą.* Przydomek nadfioletowa pochodzi stąd, że lokalizacja w małych komórkach przestrzennych implikuje słabą lokalizację w przestrzeni pędów, tj. pędy są duże (zasada Heisenberga).

**2.8.** *Wyniki.* [GJ1,GJ2]. Udało się udowodnić, że dla $d = 2$ i $d = 3$ miary $\mu_{N,h}$ są zbieżne (w odpowiednim sensie) do pewnej miary granicznej $\mu$ na

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Dla małych $\lambda$ miara $\mu$ jest jednoznaczna i posiada lukę masową o szerokości $m + O(\lambda)$.

Dla $d \geq 5$ jedyna możliwa graniczna miara jest gaussowska (asymptotyczna swoboda).

Dla zmodyfikowanego modelu $\left(\lambda\phi^4 - \frac{m}{2}\phi^2\right)_2$ przy dużych $\lambda$ udowodniono istnienie przejścia fazowego. W zależności od tego, jakie nakładać warunki brzegowe na $\partial\Lambda$ (dodatnie lub ujemne), otrzymuje się różne miary graniczne.

Niestety, w fizycznie ważnym przypadku $d = 4$ problem istnienia nieswobodnego pola $\lambda\phi_4^4$ jest otwarty (patrz [Ma2]). Trudności techniczne są tutaj ogromne i wygląda na to, że badacze opadli z sił.

Inne wytłumaczenie zaniechania badań nad konstruktywną teorią pola leży prawdopodobnie w pojawieniu się topologicznej teorii pola (wersja teorii strun), która odniosła szereg spektakularnych sukcesów w czystej matematyce. Większość specjalistów przeszła na tę stronę.

**2.9.** *Powrót do Minkowskiego.* Mając miarę $\mu$, spełniającą szereg warunków (aksjomaty Osterwaldera–Schradera [OS], których nie chcę przytaczać), definiuje się *funkcje Schwingera* $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ wzorem

$$\langle S_n, f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \rangle = \langle f_1(\phi) \ldots f_n(\phi) \rangle_\mu, \quad f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Okazuje się, że te funkcje są analityczne poza diagonalami $x_i = x_j$ i przedłużają się do dziedziny, gdzie pierwsze składowe $x_{j,0}$ są urojone. Wtedy dostaje się *funkcje Wightmana* [SW] $W_n(t_1, \vec{x}_1, \ldots, t_n, \vec{x}_n)$ interpretowane następująco:

$$\langle W_n, f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \rangle = (\Omega, \phi_M(f_1) \ldots \phi_M(f_n)\Omega)_{\mathcal{H}},$$

gdzie $\phi_M(t, \vec{x}) = e^{itH}\phi_M(0, \vec{x})e^{-itH}$, a $(\phi_M|_{t=0})(g) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ jest operatorem mnożenia przez $g$. Funkcje Wightmana 'dobrze' zachowują się względem działania grupy Poincarégo.

## 3. Elektrodynamika kwantowa

**3.1.** *Lagranżjan i grupa cechowania.* Lagranżjan ma postać (patrz [We])

$$L(\psi, \bar{\psi}, A) = L_F + L_{YM}, \tag{3.1}$$

gdzie

$$L_F(\psi, \bar{\psi}, A) = -\sum_\mu \bar{\psi}\left(\gamma^\mu \left[\partial_\mu + ieA_\mu\right] + m\right)\psi \tag{3.2}$$

i

$$L_{YM}(A) = -\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Tutaj $\psi(t,\vec{x}) = (\psi_0,\ldots,\psi_{d-1})^{\intercal}$, $\bar{\psi}(t,\vec{x}) = \left(\bar{\psi}_0,\ldots,\bar{\psi}_{d-1}\right)$ są *spinorami* reprezentującymi pola *elektronów* i *pozytonów* ($\bar{\psi}_j$ nie są sprzężeniami $\psi_j$), $A(t,\vec{x}) = (A_0,\ldots A_{d-1})$ jest *potencjałem wektorowym pola elektromagnetycznego* (koneksją) z *tensorem natężenia* (krzywizną) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $F^{\mu\nu} = \sum\limits_{\alpha,\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$, $\left(g^{\alpha\beta}\right) = diag(-1,1,\ldots,1)$ (metryka Minkowskiego w przestrzeni kostycznej) i *macierze Diraca* $\gamma^\mu$ (których nie wypisuję) definiują reprezentację odpowiedniej *algebry Clifforda* ($\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$). Stała sprzężenia $e$ jest równa *ładunkowi elektronu* i jest bardzo mała. W literaturze są rozważane w zasadzie tylko przypadki $d = 2$ i $d = 4$. W obszarze euklidesowym $t = ix_0$ trzeba wprowadzić pewne modyfikacje, np. $\gamma_E^0 = \gamma^0$ i $\gamma_E^j = i\gamma^j$, $j \geq 1$ i zmiany niektórych znaków (patrz [Ma1]).

Lagranżjan (3.1) dopuszcza nieskończenie wymiarową grupę symetrii. Jest to grupa *przekształceń cechowania*

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x),\ \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)},\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x),$$

gdzie $\alpha(x)$ jest dowolną funkcją rzeczywistą. Ponadto fizycznie znaczące obserwable są niezmiennicze względem przekształceń cechowania. To powoduje pewne komplikacje przy definiowaniu miary funkcjonalnej; należałoby całkować po przestrzeni ilorazowej względem działania grupy przekształceń cechowania. Te problemy są skutecznie rozwiązywane i nie będziemy się tutaj nimi zajmować.

**3.2.** *Całka Berezina.* Kwantowanie rozpoczniemy od przypadku swobodnych pól fermionowych $\psi, \bar{\psi}$, tj. gdy $A = 0$, w obszarze euklidesowym. Działanie z lagranżjanem (3.2) przybiera postać kwadratową względem pól $\psi$ i $\bar{\psi}$; jednakże subtelność polega na tym, że wszystkie składowe $\psi_\mu, \bar{\psi}_\nu$ są antyprzemienne (również pomiędzy sobą): $\psi_\mu\psi_\nu = -\psi_\nu\psi_\nu$, $\bar{\psi}_\mu\bar{\psi}_\nu = -\bar{\psi}_\nu\bar{\psi}_\nu$, $\psi_\mu\bar{\psi}_\nu = -\bar{\psi}_\nu\psi_\nu$. W istocie mamy algebrę Grassmana $\mathcal{G}$ generowaną przez $\psi_\mu(f), \bar{\psi}_\nu(f)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (odpowiednik algebry symetrycznej $S(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subset L_2(\mathcal{S}', \mu)$ z poprzedniego paragrafu).

Odpowiednikiem miary $\mu$ jest pewien *gaussowski funkcjonał* $\langle\cdot\rangle$ na algebrze $\mathcal{G}$. To oznacza, że

$$\langle \xi_1 \ldots \xi_{2n} \rangle = \sum (-1)^\pi \left\langle \xi_{i_1}\xi_{j_1} \right\rangle \ldots \left\langle \xi_{i_n}\xi_{j_n} \right\rangle,$$

gdzie sumuje się po rozbiciach $\pi$ zbioru $\{1,\ldots,2n\}$ na ciąg uporządkowanych par $(i_k, j_k)$, gdzie $k = 1,\ldots,n$ i $(-1)^\pi$ jest znakiem odpowiedniej permutacji. Tutaj $\xi_j = \psi_\mu(f)$ lub $= \bar{\psi}_\nu(g)$ i tylko wielkości

$$\left\langle \bar{\psi}_\alpha(g)\psi_\beta(f) \right\rangle = \int \tilde{f}(p)\tilde{g}(p)\frac{(m + \sum \gamma_E^\mu p_\mu)_{\alpha\beta}}{m^2 + p^2}dp$$

są niezerowe, ($\tilde{f}(p)$ oznacza transformację Fouriera). Funkcjonał $\langle\cdot\rangle$ często interpretuje się jako tak zwaną *całkę Berezina* (patrz [Ma2,We]).

**3.3.** *Konstrukcja miary.* Aby skonstruować miarę dla działania z pełnym lagranżjanem (3.1) używa się przybliżenia siatkowego. Wtedy mamy konfiguracje antyprzemiennych spinów $\psi_\mu(x)$, $\bar{\psi}_\nu(x)$ w punktach siatki $\Lambda$ oraz konfiguracje $\left\{g_{\langle xy\rangle}\right\}$ przyporządkowujące parom $\langle xy\rangle$ najbliższych sąsiadów $x, y = x \pm he_\mu \in \Lambda$ liczby $g_{\langle xy\rangle} = e^{\pm iheA_\mu(x)} \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Oznaczmy jeszcze $\gamma_{\langle xy\rangle} = \pm\gamma_E^\mu$ dla $y = x \pm he_\mu$. Działanie przybiera postać [Se,Wil]

$$S = c_1 \sum_x \bar{\psi}(x)\psi(x) + c_2 \sum_{\langle xy\rangle} \bar{\psi}(x)\gamma_{\langle xy\rangle} g_{\langle xy\rangle}\psi(y) + c_3 \sum_P g_{\partial P}.$$

W trzecim składniku sumujemy po kwadratowych plakietkach $P$ siatki $\Lambda$ i $g_{\partial P}$ jest operatorem holonomii koneksji $A$ wzdłuż brzegu plakietki; dokładniej, jeśli $P = (a, b, c, d)$, to

$$g_{\partial P} = g_{\langle ad\rangle} g_{\langle dc\rangle} g_{\langle cb\rangle} g_{\langle ba\rangle}.$$

Stałe $c_1, c_2, c_3$ zależą od $h$ (długość oczka siatki) i od stałych $m$ (czysta masa) oraz $e$ (stała sprzężenia). Jak widać, nie ma tu członu z dyskretną pochodną cząstkową, ale w sumie po $\langle xy\rangle$ pola $\bar{\psi}$ i $\psi$ są brane w różnych punktach. Łatwo także zobaczyć, że $g_{\partial P} = 1 + \frac{1}{2}(eh)^4 F_{\mu\nu}^2 + \ldots$.

Następny, najtrudniejszy krok konstrukcji polega na pokazaniu istnienia granicy, przy $N \to \infty$ (rozmiar $\Lambda = \Lambda_{N,h}$) i $h \to 0$, ciągu miar

$$\frac{1}{Z} e^{-S} \widetilde{\prod_x} d\psi(x) d\bar{\psi}(x) \cdot \prod_{\langle xy\rangle} dg_{\langle xy\rangle},$$

gdzie $\widetilde{\prod} d\psi d\bar{\psi}$ jest całką Berezina. Podobnie jak w przypadku pola skalarnego pojawia się problem renormalizacji stałych $c_j$.

O ile mi wiadomo, jedynie w 2-wymiarowym przypadku udowodniono istnienie granicznej miary, oznaczanej $QED_2$. Dokonali tego J. Fröhlich i E. Seiler [FS], używając pewnego triku polegającego na przekształceniu tego modelu w model pola skalarnego z oddziaływaniem $:\sin\phi:$ (patrz także [Se,F]).

**4. Model Yanga–Millsa–Higgsa.** Tutaj mamy pole wektorowe $\phi(x) \in \mathbb{R}^k$, tzw. *pole Higgsa*, oraz *pole Yanga–Millsa* $A_\mu(x) \in \mathfrak{g}$, gdzie $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego pewnej zwartej grupy Liego $G$. 1-forma $A = \sum A_\mu dx_\mu$ jest traktowana jako forma koneksji trywialnej wiązki $ad$, z włóknem $\mathfrak{g}$ i z działaniem dołączonym grupy $G$, nad $\mathbb{R}^d$. W siatkowym przybliżeniu działanie przyjmuje postać $S = S_H + S_{YM}$, gdzie

$$S_H = c_1 \sum_{\langle xy\rangle} \big(\phi(x), U(g_{\langle xy\rangle})\phi(y)\big) + c_2 \sum_x V(|\phi(x)|), \tag{4.1}$$

$$S_{YM} = c_3 \sum_P \chi(g_{\partial P}). \tag{4.2}$$

Tutaj $V$ jest pewnym prostym wielomianem ograniczonym z dołu, $g_{\langle xy\rangle} \in G$ odpowiadają operatorom przesunięcia równoległego względem koneksji $A$ wzdłuż krawędzi $\langle xy\rangle$ , $U : G \to SO(\mathbb{R}^k)$ jest reprezentacją grupy $G$ oraz $\chi : G \to S^1 \subset \mathbb{C}$ jest pewnym charakterem. Przekształcenia cechowania przybierają postać $\phi(x) \to U(k_x)\phi(x)$, $g_{\langle xy\rangle} \to k_x g_{\langle xy\rangle} k_y^{-1}$ dla dowolnej funkcji $k : \Lambda \to G$.

Ponieważ grupa $G$ może być nieabelowa, więc krzywizna koneksji $A$ może być nieliniowa względem składowych $A^j_\mu$, $\mu = 1, \ldots d$, $j = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$ : w ciągłej przestrzeni Minkowskiego mamy

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu],$$

gdzie $g$ jest stałą sprzężenia. Zatem i przy kwantowaniu pojawiają się dodatkowe trudności.

Dla fizyków ten model jest ważny ze względu na tzw. *mechanizm Higgsa* spontanicznego łamania symetrii i generowania cząstek o dodatniej masie. To ma miejsce w modelu Weinberga–Salama z $G = SU(2) \times U(1)$, (gdy do działania dodać składnik fermionowy $S_F$). Gdy potencjał $V(|\phi|) = \lambda\left(\left|\phi^2\right| - \eta^2\right)^2$ , to zbiór jego minimów jest sferą $S_\eta = \{|\phi| = \eta\}$ ; zatem 'stan podstawowy' lagranżjanu jest $SO(k)$-niezmienniczy. Tymczasem kwantowanie prowadzi do całek po trajektoriach 'skupionych' wokół jednego, spontanicznie wybranego, punktu $\phi_0 \in S_\eta$. Składowe pola $\phi - \phi_0$ w kierunku prostopadłym do $S_\eta$ okazują się skalarnymi polami bozonowymi o dodatniej masie $m \sim \frac{1}{2}V''(\eta)$.

W przypadkach $d = 2$ i $d = 3$ T. Bałaban i inni [Ba,BBIJ,BIJ] udowodnili istnienie pola Yanga–Millsa–Higgsa oraz oszacowali lukę masową.

**5. Chromodynamika kwantowa.** Jest to teoria oddziaływania kwarków i gluonów w 4-wymiarowej czasoprzestrzeni. *Kwarki* występują w trzech *kolorach* (chromos po grecku): $u$ (*up*), $d$ (*down*) i $s$ (*strange*). Są fermionami i ich grupa symetrii to $SU(3)$. *Gluony* odpowiadają składowym $A^i = (A^i_0, A^i_1, A^i_2, A^i_3)$, $i = 1, \ldots, 8 = \dim SU(3)$ koneksji wiązki $ad$ z grupą strukturalną $SU(3)$. Lagranżjan ma postać $L_F + L_{YM}$, podobną jak w elektrodynamice kwantowej, z tą różnicą, że pole Yanga–Millsa jest nieabelowe (patrz (4.2)–(4.3)) i lagranżjan fermionowy zawiera sumowanie po kolorowych indeksach kwarkowych spinorów. Stała sprzężenia jest oznaczana przez $g$ (zamiast $e$) i bynajmniej nie jest mała. (Pominąłem tutaj nowe kwarki $b, c, t$ charakteryzowane za pomocą tzw. *zapachów*.)

Fizycy odkryli trzy charakterystyczne cechy tej teorii: asymptotyczną swobodę, uwięzienie kwarków i spontaniczne naruszenie chiralnej symetrii. Oczywiście, żadna z nich nie jest udowodniona ściśle matematycznie.

*Asymptotyczna swoboda* oznacza, że na małych odległościach kwarki nie oddziałują między sobą. To wynika z tego, że to oddziaływanie (w tzw. obrazie oddziaływania) ma postać kulombowską $\alpha/r$, gdzie stała $\alpha$ ewoluuje pod działaniem odpowiedniej grupy renormalizacyjnej. W szczególności, w skali małych odległości (lub w skali dużych pędów) ta stała okazuje się bardzo mała.

Ponieważ w eksperymentach nie udało się zaobserwować pojedynczych kwarków, pojawił się problem wyjaśnienia tego zjawiska. K. Wilson [Wil] zaproponował następujące kryterium *uwięzienia kwarków*:

$$\left| \left\langle \chi \left( \prod_{\langle xy \rangle \in C} g_{\langle xy \rangle} \right) \right\rangle \right| < C e^{-\kappa A(C)}, \ \kappa > 0, \tag{5.1}$$

gdzie $C$ jest zamkniętą pętlą utworzoną z krawędzi siatki $\Lambda$ (par $\langle xy \rangle$), iloczyn po parach jest uporządkowany i $A(C)$ oznacza pole powierzchni ograniczonej przez $C$. Rzecz w tym, że amplituda prawdopodobieństwa procesu kreacji pary kwark-antykwark $q, \bar{q}$, gdzie następnie $q$ i $\bar{q}$ wędrują wzdłuż kawałków $C_1$ *i* $C_2$ krzywej $C$, aby w końcu zanihilować się, jest proporcjonalna do tzw. *pętli Wilsona* $W(C) = \chi(\prod_{\langle xy \rangle \in C} g_{\langle xy \rangle})$. Oszacowanie (5.1) oznacza, że możliwość oddzielenia $q$ od $\bar{q}$ na duże odległości jest skrajnie mało prawdopodobna. Po więcej szczegółów odsyłam czytelnika do [Se,GJ3,Wil].

Na małych odległościach również masy kwarków dążą do zera (w terminach grupy renormalizacyjnej). Okazuje się, że bezmasowe fermiony podlegają działaniu grupy symetrii większej niż $SU(3)$; jest to grupa $SU(3)_L \times SU(3)_R$ *symetrii chiralnej* (patrz [Ok]). Rzecz w tym, że istnieje dodatkowa 'całka pierwsza': rzut spinu na moment pędu. Jeśli rzut spinu jest przeciwny do momentu pędu, to spinor jest lewy ($L$), w przeciwnym przypadku mamy spinor prawy ($R$). Matematycznie wyraża się to w terminach wartości własnych macierzy Diraca $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$; generatory $SU(3)_{L,R}$, to $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\lambda_j$, gdzie tzw. *macierze Gell-Manna* $\lambda_j$ generują algebrę Liego $SU(3)$ (patrz [We]). Analogicznie jak w modelu Higgsa, lagranżjan jest symetryczny względem $SU(3)_L \times SU(3)_R$, ale przy kwantowaniu ta symetria może zostać i bywa naruszona.

**6. Problem milenijny i jego znaczenie.** Przypomnijmy, że chodzi o skonstruowanie kwantowego pola z lagranżjanem (4.2) dla $d = 4$ oraz o udowodnienie istnienia luki masowej.

Zauważmy, że w przypadku abelowej grupy cechowania pole $A$ nie oddziałuje z samym sobą; pole elektromagnetyczne ma zerową masę i porusza się z prędkością światła. W przypadku nieabelowym samooddziaływanie jest spowodowane nieliniowymi wyrazami w (4.3). Tylko dzięki temu można spodziewać się dodatniej masy i prędkości mniejszej od prędkości światła. Potwierdzają to eksperymenty komputerowe (patrz [JW]).

Wykładnicze ubywanie korelacji oznaczałoby lokalność teorii, na dużych odległościach oddziaływanie byłoby małe. To pozwoliłoby zastosować wyniki z $\mathbb{R}^4$ do dowolnych 4-rozmaitości. W tym sensie piąty problem milenijny jest ważny również z czysto matematycznego punktu widzenia.

**References**


[Ba] T. Bałaban, *Renormalization group approach to lattice gauge field theories. I: Generation of an effective action in a small field approximation and a coupling constant renormalization in 4D*, Commun. Math. Phys. **109** (1987), 249–301.

[BBIJ] T. Bałaban, D. Brydges, J. Imbrie, A. Jaffe, *The mass gap for Higgs models on a unit lattice*, Ann. Phys. **158** (1984), 281–319.

[BIJ] T. Bałaban, J. Imbrie, A. Jaffe, *Effective action and cluster properties of the abelian Higgs model*, Commun. Math. Phys. **114** (1988), 257–315.

[F] J. Fröhlich, *Classical and quantum statistical mechanics in one and two dimensions. Two-component Yukawa and Coulomb systems*, Commun. Math. Phys. **47** (1976), 233–268.

[FS] J. Fröhlich, E. Seiler, *The massive Thirring–Schwinger model,* $(QED)_2$ *convergence of perturbation theory and particle structure*, Helv. Phys. Acta **49** (1976), 889–924.

[GJ1] J. Glimm, A. Jaffe, *Positivity of the* $\phi_3^4$ *Hamiltonian*, Fortschr. Phys. **21** (1973), 327–376.

[GJ2] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*, Springer–Verlag, New York, 1981.

[GJ3] J. Glimm, A. Jaffe, *Charges, vortices and confinement*, Nucl. Phys. B **149** (1979), 49–60.

[IZ] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill, New York, 1980.

[JW] A. Jaffe, E. Witten, *Quantum Yang–Mills theory*, `http://www.claymath.org/Millennium_Prize_Problems/Yang-Mills_Theory/`

[Ma1] V. A. Malyshev, *Vvedenie v Evklidovu Kvantovuju Teoriu Polia*, Izdat. Moskovskogo Univers., Moskwa, 1985 [po rosyjsku].

[Ma2] V. A. Malyshev, *Ultraviolet problems in the field theory and multiscale expansions*, J. Soviet Math. **42** (1988), 1811–1868; [rosyjski oryginał: Itogi Nauki i Tekhniki, *Teoria Verojatn. Mat. Statist. Teoret. Kibern*, t. **24**, VINITI, Moskwa, 1986, pp. 111–184].

[Ne] E. Nelson, *Quantum fields and Markov fields*, in: *Proc. Sympos. Pure Math. XXIII, 1971*, Amer. Math. Soc., Providence, 1973, 413–420.

[Ok] L. B. Okun', *Fizika Elementarnykh Chastits*, Moskwa, Nauka, 1984 [po rosyjsku].

[OS] K. Osterwalder, R. Schrader, *Axioms for Euclidean Green's functions*, Comm. Math. Phys. **31** (1973), 82–112; **42** (1975), 281–305.

[Se] E. Seiler, *Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Lect. Notes Phys. **159**, Springer–Verlag, New York, 1982.

[Si] B. Simon, *The* $P(\phi)_2$ *Model of Euclidean Quantum Field Theory*, Princeton Series in Phys., Princeton, 1974.

[SW] R. Streater, A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistic and all That*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[We] S. Weinberg, *Teoria Pól Kwantowych, I. Podstawy*, PWN, 1999; *II. Nowoczesne Zastosowania*, PWN, 1999; *III. Supersymetria*, PWN, Warszawa, 2001.

[Wil] K. G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Review D **10** (1974), No 8, 2445–2459.

[Wit] E. Witten, *Physical law and the quest for mathematical understanding*, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (2003), No 1, 21–30.

[YM] C. N. Yang, R. L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Phys. Review **96** (1954), 191–195.