ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVIII (2002)

Recenzje

Julian K l u k o w s k i, Ireneusz N a b i a ł e k, *Algebra dla studentów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1999, stron 326, ISBN 83-204-2407-0.

Książka pomyślana została jako podręcznik algebry dla studentów tych kierunków na politechnice, na których potrzeba najwięcej matematyki. Tradycyjnie uważa się, że takim kierunkiem jest elektronika. Głównym tematem książki jest wykład algebry liniowej. Poprzedzony on został wstępem, wprowadzającym język i notacje teorii mnogości, elementy algebry abstrakcyjnej, tzn. grupy, pierścienie, ciała, wraz z wykładem liczb zespolonych. Wszystko to autorzy zawarli na pierwszych siedemdziesięciu czterech stronach. Później jest już tylko algebra liniowa z wtrąconym rozdziałem 6 (*Liniowa geometria analityczna w przestrzeni* R^3). Rozdział ten (str. 171–188) jest całkowicie niezależny od innych rozdziałów. Jest to wykład elementów geometrii analitycznej w przestrzeni trójwymiarowej w sposób, w jaki ją na ogół wykładano w ciągu ostatnich sześćdziesięciu lat. Oprócz definicji iloczynu skalarnego wprowadzone też zostało pojęcie iloczynu wektorowego i mieszanego i ich zasosowania. Notacja i ujęcie materiału ściśle koresponduje ze sposobem nauczania geometrii analitycznej w szkole średniej. Z tego punktu widzenia to dobrze, że autorzy ułatwiają studentowi pracę. Z drugiej jednak strony trudno zrozumieć celowość takich zabiegów w sytuacji, gdy material rozdziału 6 mógłby być wprowadzony jeko ilustracja ogólnego wykładu w szczególnym przypadku przestrzeni R^3.

Wszystkie definicje i twierdzenia poparte są odpowiednim materiałem ilustracyjnym, co niewątpliwie ułatwić może naukę potencjalnemu czytelnikowi. Na tym jednak kończą się plusy tej książki. To co przytoczę poniżej świadczy o tym, że książkę pisano pośpiesznie i trochę nieuważnie, co znacznie pomniejszyło jej walory dydaktyczne. A szkoda. Bo mógł to być dobry podręcznik, ale niestety, nie jest.

We wstępie Autorzy piszą: *Cechą charakterystyczną algebry jest duża liczba definicji i twierdzeń.* I dalej: *Warto jednak podkreślić, że dowody w algebrze są na ogół proste i autorzy polecają je uwadze Czytelnika* [...]. Trudno z takimi sądami polemizować. Odesłałbym autorów takich opinii np. do dowodu twierdzenia klasyfikującego skończone grupy proste czy choćby podręcznikowego dowodu nierozwiązalności przez pierwiastniki ogólnego równania stopnia co najmniej piątego. Tymczasem dalej (str. 62) czytamy: *Algebraiczny dowód tego twierdzenia jest trudny.* Mowa tu o *zasadniczym twierdzeniu algebry.* Konia z rzędem temu, kto taki dowód poda! Każdy z wielu znanych dowodów tego twierdzenia wykorzystuje w jakimś stopniu topologiczne własnoći ciała C liczb zespolonych z jego naturalną topologią produktową indukowaną przez wartość bezwzględną. Jakikolwiek dowód tego twierdzenia musi ten fakt wykorzystać, gdyż twierdzenie dotyczy własności konkretnych funkcji ciągłych (wielomianów) na danym ciele topologicznym C, a nie jakimś ciele abstrakcyjnym.

Autorzy uwierzyli w to co piszą, podając dość dużą liczbę definicji w rozdziale 1. Definicja 1.1: *Każdą funkcję* $f : X \times X \to X$ *nazywamy dwuargumentowym działaniem wewnętrznym określonym w zbiorze* X. Jest to nielogiczne: jeżeli działanie jest w zbiorze, tzn. nie wyprowadza poza ten zbiór. Po co więc przymiotnik *wewnętrzny*? Jest to pozostałość nie używanej już dziś terminologii. Po co definiować *strukturę algebraiczną*, skoro można mówić o *algebrze* (albo *algebrze ogólnej*, por. [2])? Zresztą autorzy definiują tylko pojęcie grupy, pierścienia, ciała i przestrzeni liniowej. Wystarczyłby więc termin *zbiór z działaniami.* Kółko nie jest zbyt szczęśliwym oznaczeniem działania w grupie. Symbol zastrzeżony jest dla superpozycji funkcji. Oczywiście mógłby ktoś ripostować, *przecież tak jest*, *zgodnie z twierdzeniem Cayleya.* To prawda, ale najpierw trzeba mieć to twierdzenie, a potem potrzebny jest jeszcze komentarz.

W tekście są tradycyjne błędy historyczne, zresztą nie zawinione przez Autorów. Np. tzw. *grupę Kleina* zdefiniował i opisał za pomocą relacji wspomniany Arthur Cayley [3]. Natomiast tzw. *twierdzenie Lagrange'a* o rzędzie podgrupy sformułował i udowodnił Pietro Abbati [1]. Podobnie, *twierdzenie Kroneckera–Capellego* udowodnił wiele lat wcześniej Carles Lutwidge Dodgson, znany pod pseudonimem Lewis Carroll, autor m.in. *Alicji w Krainie Czarów.*

Z kolei na str. 32 (u dołu) znajdujemy niezbyt szczęśliwy zapis złożenia dwóch permutacji w postaci trójwierszowej. Może to kolidować z symbolem macierzy. Podana definicja parzystości permutacji (str. 35) wymaga dowodu poprawności, albo przynajmniej stwierdzenia, że potrzebny jest dowód. Tradycyjnie (str. 44) symbole $\oplus$, $\otimes$ zastrzeżone są w algebrze na oznaczanie sumy prostej i iloczynu tensorowego. Dlaczego działań w pierścieniu nie oznaczyć zwykłymi symbolami dodawania i mnożenia? Autorzy sami wpadli w tę pułapkę: w zadaniu 1.21 c) zamiast $(x + y)^n = x^n + y^n$ powinno przecież być $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$. Dlaczego definiować *dzielniki zera* (str. 40) jako parę elementów, a nie *dzielnik zera*? Tradycyjnie jednostka urojona oznaczana jest przez i, a nie przez j. Po raz pierwszy symbolu tego użył Leonhard Euler w roku 1777. Upowszechnił to Carl Friedrich Gauss. Po co więc zmieniać uświęconą tradycję? (str. 49). Co to znaczy (str. 61): *możliwość zmiany kolejności czynników*? *Twierdzenie Bezouta* (str. 62) opublikował Kartezjusz w swojej *Géometrie* (1637). Przesadą jest nazywać *algorytm dzielenia z resztą* dla wielomianów (str. 65) *algorytmem Euklidesa.* Euklides znał go tylko dla liczb naturalnych. Pojęcie *działania zewnętrznego* (str. 75–76) określone zostało tylko w tym celu, aby zdefiniować *przestrzeń liniową.* To jest ta *duża liczba definicji w algebrze.* Czy nie prościej powiedzieć, że określona jest funkcja $K \times V \to V$, zwana *mnożeniem przez skalary z* K, *taka że* [...]. Stopień wielomianu zerowego nie został zdefiniowany. Należałoby więc w zadaniu 3.3 (str. 80) dopisać wielomian zerowy w definicji $K_n[x]$. Czy nie prościej zdefiniować *liniową niezależność*, a potem *liniową zależność*? Zwrot, że coś *zachodzi jedynie wtedy, gdy* [...] nie jest najszczęśliwszy, przynajmniej w tekście matematycznym.

Skąd wiadomo, że istnieją ciała czteroelementowe (zadanie 3.16, str. 82)? Wcześniej była tylko definicja ciała reszt modulo p. Czy *układ wektorów* to to samo co *zbiór wektorów* (str. 83)? Na str. 84 brakuje definicji liniowej niezależności dowolnego zbioru wektorów, gdy tymczasem (str. 87) czytamy, że *przestrzeń liniowa* V *nad ciałem* K *może nie mieć skończonej bazy.* W twierdzeniu 3.10 (str. 85) występuje niezdefiniowane pojęcie: *maksymalny układ liniowo niezależny.* Dlaczego wielomian tożsamościowo równy zero (przykład 3.12, str. 87) ma wszystkie współczynniki zerowe? Tego trzeba dowieść. Uwaga (str. 88 u góry) powinna się znaleźć na stronie 87, zaraz po twierdzeniu 3.13. Może jednak pisać $\dim_K V$ zamiast $\dim V$? A jeżeli wystąpią dwa różne ciała, np. liczby rzeczywiste i zespolone? Ten sam obiekt jest różnie oznaczany (zadanie 3.29, str. 91; zadanie

3.3, str. 80). Co to jest ciało m-elementowe (zadanie 3.33)?

Zbiory i ich elementy oznaczane są dużymi literami (np. str. 94 i dalej). Koliduje to z konwencjami teorii mnogości. Definicja *rzędu przekształcenia* (str. 107) powinna być wyodrębniona jako Definicja 4.4. To ważne pojęcie w algebrze liniowej. Incydentalne użycie symboli logicznych (np. na str. 120) nie jest najlepsze. Czy nie lepiej napisać to słownie? Znak permutacji (str. 131) też nie został poprawnie określony, bo nie wiadomo, czy parzystość jest funkcją permutacji, czy też konkretnego jej rozkładu na transpozycje. Algorytm rozwiązywania równań liniowych polegający na eliminacji zmiennych w równaniach poprzez dodawanie równań i mnożenie ich przez skalary, nazywany *metodą eliminacji Gaussa*, w istocie wymyślili Chińczycy w III wieku przed Chrystusem. Na str. 175 zdefiniowany jest iloczyn skalarny w R^3. Natomiast na str. 189 zdefiniowany został iloczyn skalarny w przestrzeniach rzeczywistych, tym razem algebraicznie. Nie ma tam ani jednego zdania o tym, czy oba jednakowo nazwane pojęcia jakoś się wiążą. Na str. 193 została dwa razy podana definicja normy w przestrzeni liniowej. Czemu to ma służyć? Iloczyn skalarny wektorów x i y oznaczany jest tradycyjnie przez (x, y) lub $\langle x, y\rangle$, a norma przez $\|x\|$. Po co wprowadzać różne oznaczenia tych samych wielkośći?

Przestrzeń euklidesowa (str. 189) została zdefiniowana jako rzeczywista przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym. Tradycyjnie przestrzeniami euklidesowymi nazywane są tylko przestrzenie skończonego wymiaru. Przestrzeń euklidesowa jest w oczywisty sposób przestrzenią unormowaną: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Twierdzenie 7.10 powinno więc brzmieć: *Każde dwie n-wymiarowe przestrzenie euklidesowe są izomorficzne.*

Dlaczego wykluczać wektor zerowy (def. 8.2) jeko wektor własny operatora? Odbija się to później na nieprzejrzystym formułowaniu twierdzeń (por. tw. 8.6). Co oznacza zwrot w def. 9.4.: *możliwie niskiego stopnia*? Na str. 256 (i dalej) powinno być: Sylvestra, a nie Silvestra. Def. 10.1 nie jest definicją formy dwuliniowej, tylko półtoraliniowej (wg terminologii N. Bourbakiego). Forma dwuliniowa ma być liniowa według każdej zmiennej.

Na koniec ostatnia uwaga, a właściwie ostatnie zaskoczenie. Otóż od XVII stulecia matematycy (i nie tylko oni) mnożenie elementów $a, x, b, y, \ldots$ w algebrze zapisują w postaci $axby$. Autorzy książki z konsekwencją godną innych spraw piszą wszędzie kropki na oznaczenie mnożenia. Nie rozumiem w jakim celu, ale czy wszystko należy rozumieć?

Prace cytowane

[1] A. Białynicki-Birula, *Zarys algebry*, PWN, Warszawa, 1987.

[2] P. Abbati, *Lettera di Pietro Abbati Modenese al socio Paolo Rufini da questo presentata il di 16 dicembre 1802*, Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. 10, No 2 (1803), 385–409.

[3] A. Cayley, *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$*, Philosophical Magazine 18 (1859), 34–37.

Witold Więsław