ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XL (2004)

Recenzje

Tadeusz B e d n a r s k i, *Elementy matematyki w naukach ekonomicznych*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2004, str. 267, ISBN 83-89355-11-6.

Pod koniec pierwszej połowy ubiegłego wieku rozpoczął się w naukach społecznych proces ich intensywnej matematyzacji. Dotyczy to zwłaszcza nauk ekonomicznych, kiedyś przecież działu filozofii, a ściślej etyki. Nie jest dziś ważne, że nie wszyscy byli tym procesem zachwyceni, że na przykład Oskar Morgenstern pisał, iż nadmierna matematyzacja modeli ekonomicznych jest wyrazem kompleksu niższości ekonomistów, którzy, mimo że nierzadko mogą swoje obserwacje wyrazić w języku społecznym, odwołują się do języka matematyki, tym sposobem chcąc uczynić swą dyscyplinę bardziej naukową. Jest jednak bezspornym faktem, że nie jest możliwe uprawianie ekonomii bez matematyki, podejmowanie decyzji ekonomicznych bez oparcia o modele matematyczne.

W przeciwieństwie do matematyków anglosaskich, ich polscy koledzy i koleżanki nie mają bogatej tradycji pisania podręczników matematycznych dla specjalistów innych nauk. Prawdę mówiąc, zdaniem piszącego tę recenzję, takiej tradycji nie ma prawie w ogóle. Wzmacnia to tendencję do uczenia elementów matematyki bez głębszego wejrzenia w rzeczywiste, zawodowe potrzeby nauczanych. Nierzadko tedy są zajęcia „z matematyki” traktowane z niechęcią przez przyszłych psychologów, socjologów, ekonomistów, a także biologów, czy nawet inżynierów. Są według nich złem koniecznym i prawie niepotrzebnym. Upraszczając i pisząc rzecz oczywistą, ale do niedawna niekiedy zapominaną przez autorów podręczników dla niematematyków, można stwierdzić, że podręcznik taki nie spełni swojej roli, jeśli każdy rozdział i nieomal każdy podrozdział nie będzie się rozpoczynał omówieniem problemu zawodowo interesującego czytelnika. Jeżeli czytelnikiem jest przyszły ekonomista, naukę analizy matematycznej, algebry liniowej, czy statystyki trzeba zaczynać od postawienia ciekawego i niebanalnego problemu ekonomicznego. Czytelnik musi sam zrozumieć, że zadowalające rozwiązanie takiego problemu wymaga zastosowania metody matematycznej, a to znaczy, że wymaga zapoznania się najpierw z odpowiednim aparatem pojęciowym, a potem sposobami jego efektywnego wykorzystania. Przykłady z przyszłej praktyki zawodowej czytelnika muszą też być dostatecznie gęsto pomieszczone w całym tekście podręcznika.

Te ostatnie postulaty spełnia, napisana do tego żywą i dobrą polszczyzną, recenzowana książka prof. Tadeusza Bednarskiego. Autor jest doskonałym i uznanym matematykiem-statystykiem, który potrafi dać wykład poprowadzony ściśle i logicznie, jasno i precyzyjnie, z jednoczesną dbałością o lekkość stylu i z położeniem akcentu na przekonanie czytelnika niematematyka do rozumowania matematycznego, jako środka najlepiej prowadzącego do interesującego czytelnika celu.

Na książkę składa się 7 rozdziałów. W pierwszym omówione są podstawy logiki, zbiory i relacje oraz grafy. W drugim wprowadzone są ciągi liczbowe oraz funkcje rzeczywiste jednej zmiennej (w całym podręczniku jest mowa tylko, i nic w tym złego, o funkcjach rzeczywistych). Rozdział trzeci dotyczy funkcji różniczkowalnych, badania ich przebiegu oraz rozwinięcia w szereg Taylora. Rozdział czwarty zapoznaje czytelnika z całką nieoznaczoną i oznaczoną. Rozdział piąty, to wprowadzenie do algebry liniowej, zaś w szóstym następuje powrót do analizy matematycznej, tyle że funkcji wielu zmiennych. W rozdziale 7 czytelnik zostaje zapoznany z elementami aparatu pojęciowego rachunku prawdopodobieństwa oraz z podstawami statystyki, a ściślej wnioskowania statystycznego.

O talencie dydaktycznym Autora niech świadczy to, że ważnym zagadnieniem podrozdziału o zbiorach i relacjach jest zagadnienie racjonalności społecznego wyboru, a stąd twierdzenie Arrowa. Grafy wykorzystane są nie tylko do wspomnienia zagadnienia efektywnej organizacji pracy, ale w kontekście analizy sieci połączeń omówiony jest problem mostów królewieckich. Przy okazji twierdzenia Arrowa możemy przeczytać o wynikających zeń dylematach życia demokratycznego, zaś przy okazji mostów królewieckich wzmiankę o Leonhardzie Eulerze.

Wzmianki takie, jak wyżej wymienione, ożywiają wykład, natomiast podsumowania kwestii czy działów matematyki, omawianych w książce, doskonale porządkują i utrwalają obraz całości. Podobnych pozytywnych uwag można by poczynić więcej. Wspomnijmy jeszcze tylko, że wykład analizy funkcji wielu zmiennych jest słusznie poprzedzony rozdziałem poświęconym podstawom algebry liniowej. Nie tylko pozwala to na użycie zapisu macierzowego przy okazji analizy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, ale także na poprzedzenie wyznaczania ekstremów warunkowych (w rozdziale z analizy) eleganckim omówieniem optymalizacji liniowej (w rozdziale z algebry). Charakterystyczne i godne pochwały jest jawne włączenie do obydwu rozdziałów wspomnianych zagadnień optymalizacji.

Dobór problemów ekonomicznych jest na pewno w jakiejś mierze podyktowany względami subiektywnymi, ale trudno by było inaczej, a zresztą jest to dobór reprezentatywny. Dobór ten obejmuje m.in. ceny równowagi, elastyczność cenową popytu, modelowanie dynamiki zmian produkcji, wartości krańcowe, optymalizację planowania produkcji. Nawet jeśli problemy te zostały najczęściej, z konieczności i skutkiem trafnej decyzji (chodzi o podręcznik z elementów matematyki, a nie ekonomii!), przedstawione skrótowo, to zostało to zrobione dobrze, niekiedy zaś pewne szczegóły słusznie zostały przeniesione do zadań.

Zakres zasadniczego materiału wydaje się doskonale dopasowany do potrzeb przyszłych ekonomistów. Recenzent nie rozumie tylko, dlaczego Autor ograniczył się do rozważenia optymalizacji nieliniowej jedynie przy istnieniu ograniczeń równościowych. Dlaczego pominięty został problem ograniczeń nierównościowych, nie tylko ważny i rozważony oczywiście w kontekście programowania liniowego, ale mający (przy spełnieniu łatwych do zinterpretowania warunków regularności) prostą geometryczną interpretację zarówno koniecznych jak i wystarczających warunków optymalności? Ponadto w rozdziale 7 warto było przynajmniej wspomnieć o p-wartości w kontekście testowania hipotez oraz nieco szerzej potraktować problem regresji liniowej. Warto też było rozdział ten zakończyć przynajmniej hasłową wzmianką o zadaniach wnioskowania statystycznego pominiętych w podręczniku, a mających istotne znaczenie dla ekonomistów (tu niech mi wolno będzie na szczere rzeczy napisanie, że ze względu na zakres tematyczny i sposób ujęcia materiału aż prosiło się o odwołanie czytelnika do obszernego podręcznika ze statystyki wydanego przez WNT w roku 2001, czyli podręcznika także stosunkowo nowego, a napisanego przez niżej podpisanego i J. Mielniczuka).

Książka została bardzo starannie napisana, praktycznie bez błędów (recenzent zauważył tylko oczywiste błędy we wzorze na końcu str. 132). Wątpliwości budzi jedynie strona edytorska – przykłady wydrukowane taką samą czcionką albo są tylko numeryczną ilustracją wprowadzonych pojęć, albo dowodem ważnego faktu, albo istotnym rozwinięciem zasadniczego wywodu.

Już dziś warto napisać, że książka zasługuje na drugie wydanie. A to znaczy, że niejako tym bardziej należy wymienić przynajmniej niektóre drobne usterki redakcyjne.

Najtrudniejsze są zawsze te wątki, w których rezygnuje się z formalizmu matematycznego na rzecz wykładu nieformalnego i argumentacji odwołującej się do intuicji. Na str. 26 zabrakło przypomnienia, że liczba wymierna może mieć nieskończenie długie rozwinięcie dziesiętne, ale że w rozwinięciu tym musi wystąpić okres i że przeto *szansa wygenerowania* kolejnych cyfr takiego rozwinięcia drogą losowania ze zwracaniem ze zbioru wszystkich 10 cyfr *jest praktycznie równa zero*. Autor, chcąc porównać liczności zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych, przeciwstawia ułamki uzyskane przez losowe tworzenie rozwinięcia o nieskończonej długości tylko ułamkom o skończonych rozwinięciach, a tym samym tylko tym ostatnim w sposób jawny przypisuje (by jeszcze raz użyć języka Autora) praktycznie zerową szansę ich wygenerowania. Istniejąca luka w opisie liczb z przedziału [0,1] może sprawić trudność niewprawnemu czytelnikowi.

Po formalnym wprowadzeniu na początku rozdziału 2 definicji funkcji, pierwszym przykładem funkcji jest odwzorowanie zbioru *osób dorosłych dokonujących dziś zakupów* w zbiór *wszystkich podzbiorów towarów będących w sprzedaży*. Jestem pewien, że warto było w tym miejscu podać przykład z przeciwdziedziną o prostszej strukturze. Nota bene, w tym samym miejscu, czyli w ostatnim akapicie na str. 45, termin *odwzorowanie* użyty jest jako szerszy niż funkcja, natomiast na str. 47, jako synonim funkcji. (Tamże, na str. 45 w wierszu 5 od dołu, powinno być *nie jest na ogół funkcją*, a nie *nie jest funkcją*.)

Strona 85 kończy się takim zdaniem: *Należy pamiętać, że z formalnego punktu widzenia wykres funkcji ciągłej także może być bardzo nieregularny, dlatego powyższe wyjaśnienia mają raczej sens intuicyjny, odnoszący się do interpretacji regularności i nieregularności w sytuacji, kiedy argumenty funkcji możemy przedstawić jako ciąg liczb, czyli w tzw. przypadku dyskretnym.* I dalej: *Nieciągłość odnosimy tutaj do intensywności i przypadkowości oscylacji funkcji, i to niezależnie od tego, jak mały jest przedział argumentów, do którego ograniczamy badanie funkcji.* Autor niepotrzebnie chciał tu powiedzieć zdecydowanie zbyt dużo, a w rezultacie zaciemnił wcześniej jasny obraz.

Na koniec krótka lista innych drobiazgów:

(i) Autor ma tendencję do wprowadzania nowych terminów najpierw nieformalnie, przez ich użycie w tekście, potem dopiero podając stosowną definicję. Niekiedy jest to dopuszczalne i nawet atrakcyjne ze względów stylistycznych, ale bywa też mylące (np. czytelnik dowiaduje się na str. 17, że tabela 1.2 stanowi *Dowód, że [] jest prawem logiki*, choć dopiero na następnej stronie może przeczytać czym są rzeczone prawa; na str. 46 najpierw może przeczytać: *Zatem funkcja ta nie jest różnowartościowa*, by dopiero później dowiedzieć się, jaką funkcję nazywa się różnowartościową.

(ii) Począwszy od strony 46, Autor przyjmuje, nie napisawszy tego explicite, że dziedziną funkcji jest podzbiór R lub R^k (na wymienionej stronie pisze nieoczekiwanie, że *w wypadku funkcji rzeczywistej możemy wykonać jej wykres*).

(iii) Definicja granicy funkcji w punkcie, użyta na str. 82 przy okazji definiowania ciągłości funkcji, nie była wprowadzona wcześniej; co dziwne, Autor postępuje inaczej definiując ciągłość w punkcie funkcji dwóch zmiennych (p. str. 188). Podobnie, czytelnik ma prawo nie zrozumieć definicji granicy ilorazu różnicowego (str. 89).

(iv) Pochodne funkcji złożonej i odwrotnej powinny być chyba omówione dokładniej (ich obliczanie sprawia zwykle trudności studentom).

(v) Na str. 102 czytamy: *O tym, czy pierwiastek pierwszej pochodnej odpowiada ekstremum funkcji, pozwala nam rozstrzygnąć drugi warunek wystarczający na istnienie ekstremum funkcji*. Po pierwsze, fraza *pierwiastek [] pochodnej* jest myląca i, po drugie, o tym, czy dany punkt odpowiada ekstremum funkcji, pozwala nam rozstrzygnąć także pierwszy warunek wystarczający na istnienie ekstremum (i ewentualny każdy inny warunek wystarczający). Ta druga niezręczność językowa powtarza się w innych miejscach podręcznika.

(vi) Autor chyba pominął jawne zdefiniowanie funkcji wypukłej i wklęsłej na całej prostej.

(vii) We wzorze Taylora brakuje warunku $h > 0$; poza tym, wcześniej niż to uczyniono, należałoby przypomnieć, czym jest $n!$.

(viii) skutkiem drobnej językowej niezręczności, elastyczność cenowa popytu jest na str. 117 zdefiniowana właściwie dwukrotnie: raz bez, i raz z minusem.

(ix) Warto chyba wyraźnie napisać, co rozumie się przez składowe wektora. Warto chyba też minor zdefiniować wcześniej, przy okazji obliczania macierzy odwrotnej.

Jacek Koronacki