ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XL (2004)

Witold Więsław (Wrocław)

Algebra w XX wieku. Rys historyczny

1. Algebra do XX wieku. Istnieje niewiele publikacji poświęconych historii algebry. Jeszcze mniej jest większych opracowań na ten temat. Kończą się one najczęściej na XIX wieku. Na szczęście ostatnio wydana książka [4] znacznie poprawia istniejący stan rzeczy. Zarys historii algebry do lat czterdziestych XX wieku można znaleźć w książce [88] van der Waerdena. Nie jest to pełny wykład historii algebry, ale wybór najważniejszych zagadnień uwzględniający upodobania autora. O historii algebry w różnych okresach jej rozwoju pisałem już wcześniej. Omówienie historii poszczególnych działów algebry można znaleźć w następujących artykułach: zarys historii algebry ([99], [103], [106], [108]); początki teorii grup ([98], [99], [102], [103], [106]); teoria równań algebraicznych ([98], [103], [106], [110], [113]); algebra liniowa ([97], [106], [109], [113]); początki teorii pierścieni ([99], [106], [107], [108], [111], [112]); teoria niezmienników [107]; algebra w Polsce ([101], [105]). Bogatym źródłem historii algebry są sprawozdania z kongresów i podręczniki (*vide* Bibliografia).

Nie zamierzam przedstawiać tu szczegółowej historii algebry w XX wieku. Pragnę jedynie wskazać na tendencje w rozwoju tej dyscypliny w ostatnim stuleciu na tle jej dotychczasowego rozwoju. Bibliografia zawiera jedynie najbardziej charakterystyczne pozycje. Pominąłem w niej wiele bardzo ważnych prac i książek z XX wieku, chcąc jedynie odnotować pewne nazwiska. Istnieją osobne tomy *Mathematical Reviews* poświęcone wybranym tematom (teoria grup, pierścienie itd).

1.1. *Początki.* Algebra pojawiła się już w Starożytności. Ponieważ rozwijała się wówczas głównie geometria, z konieczności wszystkie odkrycia matematyczne formułowane były w jej języku. Wielu odkryć w zakresie algebry dokonał Euklides (ok. 365–ok. 300) lub jego poprzednicy. H. G. Zeuthen nazwał je w 1886 roku *algebrą geometryczną* [49]. O. Neugebauer i B. L. van der Waerden upowszechnili tę nazwę i utrwaliła się ona w matematyce. Były to geometryczne interpretacje różnych wzorów algebraicznych, które umiano przedstawić tylko w takiej postaci, np. wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dopiero jednak Diofantos w *Arytmetyce* (połowa III w.) zbudował to, co dziś nazywamy algebrą. Od swych prapoczątków, tzn. od *Arytmetyki* Diofantosa [26] i *Algebry i almukabały* al-Chorezmiego [16] (IX w.), algebra była nauką o rozwiązywaniu równań algebraicznych, jednego lub kilku. Uczeni islamu, przede wszystkim al Chorezmi (783–850), abu Kamil (850–930) i Omar Chajjam (ok. 1037–1122) rozwinęli idee Greków z Aleksandrii budując to, co dziś można by nazwać *algebrą werbalną*. Posługiwano się nią do rozwiązywania zadań praktycznych sprowadzających się do równań stopnia pierwszego i drugiego. Podjęto też próby rozwiązywania równań stopnia trzy i cztery, sprowadzając rozwiązania takich równań do przecięć stożkowych. To już jest algebra w całej swej rozciągłości, ale uprawiana słownie, bez jakiejkolwiek symboliki. Średniowieczna Europa będzie te idee kontynuować, a w późniejszych wiekach, stopniowo i powoli pojawią się pierwsze symbole. W ten sposób algebra zacznie w XVI wieku wchodzić w okres rozwoju jej symboliki, a w konsekwencji, w okres rozwoju *algebry symbolicznej*, albo *literowej*. Nastąpi to, nie bez zahamowań, w wieku XVII. Koniec tego stulecia to już niemal współczesna algebra, przynajmniej w zakresie symboliki. W ujęciu XVII i XVIII stulecia algebra to nauka o rozwiązywaniu równań. René des Cartes (Descartes), zwany po polsku Kartezjuszem, wykazał, że pomysł wprowadzenia współrzędnych, zrealizowany przez astronoma marokańskiego al Marakishi w XIII wieku w postaci wykresów funkcji definiowanych przy pomocy wielomianów trygonometrycznych [47], dopiero dzięki uniwersalnej symbolice literowej mógł być skuteczny. Zauważyli oni, że geometrię można zalgebraizować, utożsamiając punkty płaszczyzny z parami liczb rzeczywistych, wprowadzając w ten sposób metody algebraiczne do geometrii i geometryczne widzenie algebry. Al Marakishi nie wywarł jednak żadnego wpływu na rozwój matematyki, a jego pomysłu nie doceniono, zapewne dlatego, że nie było jeszcze uniwersalnego narzędzia w postaci symboliki matematycznej; w szczególności nie umiano zapisywać równań w postaci symbolicznej i dokonywać formalnie ich przekształceń. Odkrycie metody współrzędnych pobudziło rozwój algebry, wzmocniony dodatkowo wprowadzeniem i ujednoliceniem symboliki literowej w XVI i XVII wieku, której jeszcze w XIX wieku próbowano nadawać sens filozoficzno-mistyczny (J.-M. Hoene-Wroński). Kartezjusz w swojej *Géométrie* [21] ilustruje na przykładach, jak rozkładać wielomiany na czynniki i jak wyznaczać ich wymierne pierwiastki w przypadku, gdy wielomian ma współczynniki całkowite. Bez dowodu odnotowany jest też fakt, zwany w literaturze *twierdzeniem Bézouta*: a jest pierwiastkiem wielomianu f o współczynnikach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $x - a$ dzieli f. Inny podstawowy fakt dla pierścienia wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach liczbowych odnotowuje C. F. Gauss w swoim *Dzienniku* (*Tagebuch*) pod datą 19 sierpnia 1796 ([37], por. też [106], str. 324): *jeżeli wielomiany P i Q są względnie pierwsze, to istnieją* *takie wielomiany t i u, że* $tP + uQ = 1$. Dziś prawie każdy student matematyki wie, a przynajmniej powinien wiedzieć, że cała arytmetyka pierścienia wielomianów jest konsekwencją tego twierdzenia.

1.2. *Kolejne stulecia XVI–XVIII.* Nowoczesna algebra, wykraczająca poza zapomniane osiągnięcia Diofantosa i późniejsze odkrycia uczonych Indii i islamu, w tym al-Chorezmiego, zaczęła się rodzić już pod koniec XV wieku we Włoszech w związku z próbami rozwiązywania równań stopnia 3. Wiek XVI, to ostateczne rozwiązanie tego problemu (N. Tartaglia, G. Cardano i inni). Pod koniec tego stulecia François Viète pisze fundamentalne dla algebry prace, zapoczątkowując systematyczne użycie uniwersalnej symboliki w algebrze [86]. Odkrycie przez matematyków włoskich XVI w. (Scipione del Ferro, N. Tartaglia, G. Cardano, L. Ferrari) algorytmów opartych na rozważaniach geometrycznych, pozwalających obliczyć pierwiastki równań stopnia 3 i 4 przez pierwiastniki (tzn. wykonując na współczynnikach wielomianu jedynie działania algebraiczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i obliczanie pierwiastków różnych stopni) dawało nadzieję na to, że odkryte zostaną analogiczne algorytmy dla równań dowolnego stopnia n. Próby takie podjęto w XVIII w. (L. Euler, E. W. von Tschirnhaus, J. L. Lagrange). Lagrange w 1770 napisał duży traktat [52], w którym przeanalizował dotychczasową wiedzę na ten temat, nie uzyskując co prawda istotnie nowych wyników, ale zauważając, że w tego typu rozważaniach bardzo przydają się permutacje. Pomysł Lagrange'a – *permutowanie pierwiastków wielomianu* – podchwycą wkrótce inni matematycy. Algebra stopniowo zaczyna więc rozszerzać swój zakres, ale jeszcze przez kilkadziesiąt lat będą w niej dominować wielomiany jako podstawowy obiekt badań.

Gdyby chcieć krótko, w uproszczony sposób, opisać główne kroki w rozwoju algebry, to można by to ująć następująco. Wieki XVI–XVII to rozwój symboliki i umiejętności operowania tymi symbolami. Algebra jest nauką o rozwiązywaniu równań. Wiek XVIII, próby Eulera (i innych) udowodnienia zarówno zasadniczego twierdzenia algebry, jak też wykazania, że każde równanie stopnia 5 jest rozwiązalne przez pierwiastniki dowodzą, jak silna i bezkrytyczna była wiara w sukces nowej metody – algebry literowej jako narzędzia. Wiek XVIII to utrwalenie i rozwinięcie nauki o równaniach i rozwiązanie jej podstawowych problemów: dowód zasadniczego twierdzenia algebry i dowód niemożliwości, podany przez profesora medycyny, Paolo Ruffiniego (1799), nie istnieje algorytm pozwalający rozwiązać dowolne równanie stopnia co najmniej 5, jak to ma miejsce dla równań niższego stopnia [75]. Później Ruffini podał jeszcze pięć innych dowodów swojego twierdzenia, np. [76]. Nie bardzo dano wtedy temu wiarę, jednak w końcu się z tym oswojono, a Niels Henrik Abel potwierdził to w nieco inny sposób dopiero w 1826 roku [1]. C.F. Gauss w 1799 w swojej rozprawie doktorskiej [38] podał dowód *Zasadniczego Twierdzenia Algebry*, uściślając i modyfikując, jak pisał do swego przyjaciela, Farkasa Bólyai, dotychczas znane dowody. Twierdzenie udowodnił w wersji rzeczywistej, tzn. wykazał, że każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem wielomianów stopnia 1 i stopnia 2 o ujemnych wyróżnikach. Warto przypomnieć, że za ten dowód Gauss uzyskał na uniwersytecie w Helmstedt doktorat *in absentia*. Podwaliny ogólnej teorii pozwalającej rozstrzygać w konkretnym przypadku, czy dane równanie algebraiczne jest rozwiązalne przez pierwiastniki, dał Évariste Galois (1811–1832). Naszkicowana przez niego teoria, zwana dziś *teorią Galois* (albo ściślej *klasyczną teorią Galois*), została w pełni zrozumiana i doceniona dopiero w drugiej połowie XIX wieku. Jej uproszczenie zawdzięczamy Richardowi Dedekindowi (1831–1916), a współczesną wersję Emilowi Artinowi (1898–1962).

1.3. *Wiek XIX.* Nadal rozwija się algebra jako nauka o równaniach. Wprowadza się w związku z tym nowe pojęcia. Są to pojęcia algebry zwanej *abstrakcyjną*, tzn. pojęcia grupy, ciała, potem pierścienia, przestrzeni liniowej i modułu nad pierścieniem. Tylko dwa pierwsze utrwaliły się w świadomości matematyków drugiej połowy XIX wieku. Inne kształtowały się w związku z potrzebami teorii niezmienników. W dalszym ciągu wielomiany odgrywały ważną rolę w algebrze. Wiek XIX w algebrze można więc nazwać wiekiem kontynuacji i tworzenia podstawowych pojęć *algebry abstrakcyjnej*, którą dziś wolimy nazywać *algebrą klasyczną.*

Dziewiętnastowieczne badania teorii niezmienników wpłynęły w sposób istotny na rozwój algebry w tym okresie. Przypomnijmy jej podstawy (Sylvester, Cayley, Salmon i inni).

Niech F będzie formą stopnia k, zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, o współczynnikach z ciała $\mathbf{C}$ liczb zespolonych, tzn. wielomianem jednorodnym stopnia k tych zmiennych, $GL_n(\mathbf{C})$ n-wymiarową *grupą liniową* (grupa odwracalnych macierzy $n \times n$ o składowych zespolonych), a $SL_n(\mathbf{C})$ *specjalną grupą liniową,* tzn. grupą macierzy $n \times n$ o wyznaczniku 1. Macierz $g = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbf{C})$ działa na zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ przez przekształcenie liniowe, tzn.

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Wówczas, definiując $g(F)(x_1, \dots, x_n) = F(g(x_1), \dots, g(x_n))$ dla formy F stopnia k, otrzymujemy przekształcenie liniowe zbioru form stopnia k zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ w siebie. Niech E będzie przestrzenią liniową takich form. *Niezmiennikiem* nazywamy funkcję f określoną na E, która jest wielomianem względem współrzędnych przestrzeni E (tzn. wielomianem względem współczynników form F) i która jest niezmiennicza względem działania grupy G (grupa liniowa, specjalna liniowa lub też ustalona podgrupa jednej z nich): $f((g(F)) = f(F)$ dla każdego g z G i każdego F z przestrzeni E.

Niekiedy rozpatruje się ogólniejszą sytuację: powyższy warunek zastępuje się przez $f(g(F)) = \det(g)f(F)$. Postawowy problem tej teorii brzmiał: czy zawsze istnieje taki skończony zbiór niezmienników, przy pomocy którego można wyznaczyć pozostałe.

Druga połowa XIX wieku była okresem zmagania się z problemem niezmienników, tzn. z próbą opisu wszystkich niezmienników. Wyznaczano niezmienniki różnych przestrzeni form. Liczba publikacji poświęconych teorii niezmienników była ogromna. Wśród najważniejszych nazwisk wymienić należy Arthura Cayleya (1821–1895), Jamesa Josepha Sylvestra (1814–1897), Georga Salmona (1819–1904), Paula Gordana (1837–1912) i wielu innych. Problem niezmienników rozwiązał w pełni David Hilbert (1862–1943) w roku 1890. Rezygnując z opisu algorytmów służących do wyznaczania niezmienników (a to właśnie chciano przez pół wieku uzyskać), udowodnił, że dla grupy liniowej pierścień niezmienników jest skończenie generowany (por. [107]). Ale nie o to chodziło Cayley'owi i Sylvestrowi, oni chcieli znać algorytmy pozwalające skonstruować taki zbiór wielomianów. Hilbert zapoczątkował jednak nowy kierunek w rozwoju algebry, a nawet więcej, bo nowy trend w matematyce: ważne są nie tylko algorytmy, ale także twierdzenia egzystencjalne, rozstrzygające, że coś istnieje albo nie istnieje.

W drugiej połowie XIX wieku, w związku z definicjami różnych obiektów algebraicznych, pojawiły się próby definiowania obiektów spełniających odpowiedni układ aksjomatów. Było to, w jakimś stopniu, naśladowanie Hamiltona i jego definicji kwaternionów. Owe próby definiowania ogólnych obiektów algebraicznych prowadzono bez względu na to, czy pojawiły się one wcześniej w praktyce matematycznej, czy też nie. Zaczęła powstawać *algebra ogólna*, czyli *uniwersalna*. Próba Whiteheada [94] nie była specjalnie udana. Książka ta była poświęcona budowaniu algebraicznych podstaw logiki i geometrii. Podstawowym twierdzeniem które pokazało, że pojęcie wymiaru przestrzeni liniowej jest dobrze zdefiniowane (tzn. nie zależy od wyboru bazy), było tzw. *twierdzenie Steinitza o wymianie* (1910). Tymczasem Whitehead [94] wcześniej dowiódł twierdzenia o wymianie. Dowód jest poprawny. Autor używał jednak przestarzałej już wtedy terminologii Grassmanna. Wydaje się więc, że uściślenie pojęć algebry liniowej, którego dokonał Whitehead, nie zostało w jego epoce dostrzeżone. A później używano już innej terminologii i o jego książce zapewne zapomniano. Mamy tu też polskie akcenty. Tematyką tą interesował się S. Dickstein, pozostawiając publikacje na ten temat, np. książkę [25]. Podobnie jak Dickstein [25], również Whitehead wydał tylko pierwszy tom swojego dzieła [94]. Obie książki, Dicksteina [25] i cytowany tom Whiteheada [94], traktowały o ogólnej teorii działań, ich autorzy mogą więc być uważani za prekursorów *algebry ogólnej*, czyli *uniwersalnej*. W obu książkach autorzy zajmowali się ogólną teorią działań binarnych, tzn. funkcji, które każdej parze elementów danego zbioru

A przyporządkowują element tego zbioru, a więc funkcji $f : A \times A \to A$. Jeden z rozdziałów u Dicksteina [25] miał tytuł: *Teorya działań formalnych.* Autor cytował tam Grassmanna i Hankela. Definiował tam np. (str. 74) *prawo rozdzielności* (odpowiednio, *prawostronne* i *lewostronne*) *działania* Δ_2 względem *działania* Δ_1 w postaci równości:

$$\Delta_2[\Delta_1(a,b),c] = \Delta_1[\Delta_2(a,c),\Delta_2(b,c)]$$
$$\Delta_2[a,\Delta_1(b,c)] = \Delta_1[\Delta_2(a,b),\Delta_2(a,c)].$$

W dalszym ciągu Dickstein wprowadzał *dzielniki zera* (str. 144), wielomiany (nazywając je *funkcjami całkowitymi*). Dalsza część książki poświęcona była wektorom w rzeczywistej przestrzeni trójwymiarowej, utożsamiając je z *kwaternionami czystymi*, tzn. zapisywanymi w postaci $ai + bj + ck$, gdzie i, j, k są urojonymi jednostkami kwaternionowymi. W podobnym duchu napisana była książka Whiteheada [94], z tą jednak różnicą, że Whitehead przede wszystkim skupiał się na zastosowaniach wprowadzonej teorii do geometrii.

1.4. *Różne definicje algebry i jej zakres.* Jeszcze w połowie XIX wieku w zakres algebry nazywanej też *analizą algebraiczną* (*analyse algébrique*), wchodziła ogólna teoria ułamków (*théorie génerale des fractions*), wielkości zespolone (*quantités imaginaires*), teoria równań (*théorie des équations*) i szeregi (*séries*) [36]. Algebra była więc nauką niemal wyłącznie o równaniach algebraicznych i algorytmach ich rozwiązywania, choć już wcześniej pojawiały się ogólniejsze definicje. Np. Clairaut [17] pojmował algebrę jako rodzaj języka służącego do rozwiązywania problemów. Joseph Alfred Serret [79] uważał, że algebra to analiza równań: *l'Algèbre est, à proprement parler, l'Analyse des équations.* Serret rozróżnia trzy działy algebry: 1. ogólna teoria równań; 2. rozwiązywanie równań numerycznych; 3. algebraiczne rozwiązywanie równań.

Innego zdania na temat algebry był Józef-Maria Hoene-Wroński [78]: *Algebra jest nauką o prawach, arytmetyka zaś o faktach uważanych na liczbach.*

Zadziwiająco ogólną, jak na owe czasy, definicję algebry podał D. F. Gregory [39]: *Algebra is a science which treats the combination of operations defined not by their nature, that is, by what they are or what they do, but by laws of combination to which they are subject* (*Algebra jest nauką, która rozważa kombinacje działań zdefiniowanych nie przez ich naturę, tzn. przez to, czym są i jak funkcjonują, ale poprzez prawa zależności, którym podlegają*).

Louis Poinsot (1777–1859) uważał, że *Algebra wyższa jest tą częścią nauki, która opiera się całkowicie na teoryi porządku i kombinacyj, która zajmuje się wyłącznie zbadaniem natury i składu formuł uważanych w sobie samych, jako czystych symboli i bez żadnej idei wartości albo ilości. Do téjto części należy odnieść teoryę głęboką zrównań, różne teorye wyrażeń urojonych, i całą sztukę przekształceń algebraicznych, i jest to nawet jedyna część wysoka nauki, która zasługuje, właściwie mówiąc, na imię Algebry* [78].

W bliższych nam czasach definicje algebry uległy zmianie, choć nadal różnią się między sobą i są odbiciem poglądów na matematykę ich autora. Przełom XIX i XX wieku przyniósł rozwój teorii aksjomatycznych, głównie w algebrze. Pojawiały się formalne definicje różnych algebr ogólnych takich jak grupy, pierścienie, ciała, moduły, kraty, algebry z dodatkową strukturą, np. porządkiem, normą lub metryką, albo ogólniej topologią. Czasopisma z tego okresu pełne były prac porównujących różne aksjomatyczne definicje, np. grupy. Jednakże przełom w poglądach na przedmiot i zakres algebry nastąpił z chwilą ukazania się książki van der Waerdena [87]. Do jego książki [87] jeszcze powrócimy. Była to niewątpliwie rewolucja w matematyce. Od tego czasu termin *modern algebra* przeciwstawiany jest terminowi *classical algebra*. *Klasyczną algebrą* zaczęto więc nazywać numeryczne i algebraiczne rozwiązywanie równań wraz z całą algebrą wielomianów, *algebrę współczesną* przeciwstawiając *algebrze klasycznej*. W jakimś stopniu podział ten pozostał do dziś.

Oystein Ore (1931) pisał: *Algebra deals with the formal combinations of symbols according to prescribed rules* (*Algebra rozważa formalne kombinacje symboli stosownie do przepisanych reguł*).

Hermann Weyl miał dość krytyczny stosunek do algebry swoich czasów, jak można sądzić z jego wypowiedzi z 1935 roku: *The pure algebraist can do nothing with his numbers except perform upon them the four species, addition, subtraction, multiplication, and division* (*Czysty algebraik nie może wykonać niczego na swoich liczbach, prócz czterech działań, dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia*).

Wkrótce termin *modern algebra* stał się po prostu *algebrą*. Saunders MacLane pisał w 1939 roku [93]: *Algebra tends to the study of the explicit structure of postulationally defined systems closed with respect to one or more rational operations* (*Algebra dąży do badania szczegółowej budowy aksjomatycznie zdefiniowanych systemów zamkniętych względem jednego lub kilku danych działań*). Jest to nic innego, jak współczesna definicja *algebry ogólnej* albo *uniwersalnej*. Powyższa definicja mieści się w ramach ogólnej koncepcji *dyscypliny matematycznej* (*a mathematical science*) rozumianej jako formalny system dedukcyjny, sformułowanej przez Younga jeszcze w 1911 roku [115].

Bez względu na przyjętą definicję algebry, poniżej będę omawiał tylko te wyniki, które zaliczane są do algebry według klasyfikacji przyjętej na koniec XX wieku, tzn. wg AMS Classification Subject 2000. Powoduje to, że wiele wyników algebry, uzyskanych w wyniku potrzeb innych dyscyplin i tam zastosowanych (algebraiczna teoria liczb, geometria algebraiczna), pominę poniżej, mimo że wyniki te są w swym duchu algebraiczne.

2. Kongres Paryski. Problemy Hilberta. Co ciekawe, Hilbert nie przedstawił swoich wyników o niezmiennikach na I Kongresie w Zurychu

(9–11 VIII 1897). Sam kongres tkwił głęboko w tematyce XIX wieku [84]. Z algebry było na nim niewiele. C. Reuschle mówił o pewnej metodzie teorii niezmienników, C. Stéphanos o skończenie wymiarowych algebrach łącznych, P. Gordan o formach ternarnych, a G. Rados o formach kwadratowych. Inne wykłady w sekcji arytmetyki i algebry związane były z teorią liczb lub z geometrią algebraiczną. Podobnie, odbyty trzy lata później II Kongres w Paryżu (6–12 VIII 1900) tkwił nie tylko czasowo, ale i tematycznie jeszcze w XIX stuleciu [19]. Dla matematyki XX wieku był to jednak kamień milowy, dzięki problemom Hilberta, zapowiedź nowych badań, precyzyjnie lub tylko schematycznie wskazana problematyka badań na nowy, XX wiek. Wtedy jednak nie zdawano sobie sprawy z roli, jaką odegrają w przyszłości problemy Hilberta. W Paryżu też było mało algebry. L. Autonne mówił o skończonych podgrupach liniowej grupy kwaternionowej, H. Hancock wygłosił wykład *Remarks on Kronecker's modular systems*, czyli o kongruencjach w pierścieniach wielomianów, R. Perrin mówił o kowariantach form binarnych, a tytuł wykładu L. E. Dicksona brzmiał: *The known systems of simple groups*. Była to zapowiedź ważnego miejsca problemów Dicksona w teorii grup XX wieku. Wydaje się, że rozwiązanie przez Hilberta problemu niezmienników nie zostało wtedy jeszcze docenione przez matematyków.

3. Od Kongresu w Paryżu do I wojny światowej. III Kongres (Heidelberg, 8–13 VIII 1904) też tkwił tematycznie głęboko w XIX wieku [85]. W tytule wykładu P. Gordana były równania stopnia 6, ale dotyczył on geometrii algebraicznej. E. B. Wilson w wykładzie *On Products in Additive Fields* zastanawiał się nad sposobami zdefiniowania mnożenia elementów w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. F. Hočevar miał wykład *Über die Bestimmung der linearen Teiler einer algebraischen Form*, A. Loewy: *Über reduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen*. A. Wiman opisał równania stopnia 9 z grupą metacykliczną. Na IV Kongresie (Rzym, 6–11 IV 1908) C. Stéphanos mówił o kowariantach dla form algebraicznych, P. Gordan o tym samym co w Heidelbergu, A. O. Nicoletti podał nowe dowody twierdzeń o sprowadzaniu form dwuliniowych do postaci kanonicznej, modyfikując dowody K. Weierstrasssa i G. Frobeniusa [7]. Ostatni kongres przed I wojną światową, V Kongres (Cambridge, 22–28 VIII 1912) algebrze poświęcił niewiele miejsca [59]. E. B. Elliot pewną znaną tożsamość dla wielomianu jednej zmiennej przeniósł na wiele zmiennych. Wykład A. B. Frizella *Axioms of ordinal magnitudes* włączono do sekcji algebry, zapewne dlatego, że trzecią grupę swoich aksjomatów nazwał *Group axioms*. Jedyny ważny wykład z algebry wygłosił Josef Kürschak na temat *Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie*. Jego praca zawiera formalną definicję ciała z wartością bezwzględną i podstawowe własności takich ciał. Kürschak zauważa, że w schemacie tym mieszczą się nie tylko liczby rzeczywiste i zespolone, lecz także liczby p-adyczne, skonstruowane przez K. Hensela w 1897 roku początkowo w sposób czysto arytmetyczny, później, już w XX wieku, w sposób topologiczny, jako uzupełnienie ciała liczb wymiernych w metryce p-adycznej. Na kongresie tym uwagę zwraca też ciekawy wykład Giono Lorii o metodach wyciągania pierwiastka kwadratowego przez starożytnych Greków.

Początek stuleci przyniósł książki Burnside'a [13] i Dicksona [23] poświęcone grupom skończonym. Odegrały one ważną rolę w dalszym rozwoju teorii grup. W roku 1902 Burnside sformułował dwa problemy, które pobudziły intensywny rozwój teorii grup w XX wieku. Przypomnijmy, że wykładnikiem grupy nazywa się najmniejszą wspólną wielokrotność rzędów jej elementów.

Problem Burnside'a. Czy każda skończenie generowana grupa o skończonym wykładniku jest skończona? Albo ogólniej: czy każda grupa o skończonym wykładniku jest lokalnie skończona?

Ogólny Problem Burnside'a. Czy każda skończenie generowana grupa torsyjna jest skończona? Ogólniej: czy każda grupa torsyjna jest lokalnie skończona?

Burnside dał odpowiedź pozytywną na pierwszy problem dla wykładników 2 i 3. W roku 1905 udowodnił, że każda podgrupa o skończonym wykładniku grupy $GL(n, \mathbf{C})$ jest skończona.

Z pewnym uproszczeniem można powiedzieć, że wiek XIX w algebrze skończył się w czasie I wojny światowej. Za formalny początek XX wieku w algebrze można uznać prace Adolfa Fraenkela z teorii pierścieni [34], [35]. Osiągnięcia algebry w XIX wieku podsumował Felix Klein w swoich wykładach [48]. Jego ocena jest bardziej niż powściągliwa. Trzeba przyznać, że poświęcił on algebrze niewiele miejsca. Wydaje się, że Klein nie doceniał roli algebry. Np. algebrze i teorii Galois poświęcił nieproporcjonalnie mało miejsca: o Galois i jego teorii napisał na kilku tylko stronach (loc. cit., tom I, 88–93); krótka informacja o teorii permutacji u Galois zajęła trzy strony (ibidem 336–338). Nie znajdujemy natomiast u Kleina jakiejkolwiek wzmianki o Ruffinim. Wynikowi Ruffiniego i Abela poświęcił zaledwie wzmiankę (ibidem, 102), cytując tylko Abela. Wydaje się, że na opiniach Kleina zaważyły jego zainteresowania naukowe, dość dalekie od algebry.

Stan algebry abstrakcyjnej sto lat temu może zilustrować następujący fakt. Dopiero na początku XX wieku J. H. Maclagan-Wedderburn udowodnił twierdzenie o rozkładzie grupy skończonej na produkt [91]. Lukę w jego dowodzie usunął dopiero R. Remak [72]. Z drugiej strony, kilka lat później Ernst Steinitz [81] opublikował fundamentalną pracę poświęconą podstawowym pojęciom i własnościom ciał.

4. Nowe idee – Emmy Noether. To właśnie Emmy Noether (1882–1935) należy uznać za współtwórcę algebry XX wieku. Emmy, córka znanego matematyka, Maxa Noethera, który swoje najważniejsze wyniki uzyskał w klasycznej geometrii algebraicznej, po ukończeniu studiów w Getyndze zajęła się teorią niezmienników [22]. Okres getyngeński jej pracy obejmuje lata 1915–1933. Dwa ostatnie lata życia spędziła w USA, w Bryn Mawr. Okres amerykański zakończyła nieoczekiwana, gwałtowna śmierć Emmy, w kilka godzin po operacji guza. Niewątpliwie zainteresowania Emmy Noether teorią niezmienników wiązały się w Davidem Hilbertem i jego słynnym wynikiem, choć nie można, jak sądzę, nie doceniać roli jej ojca. Jak czytamy w spisie getyngeńskich wykładów, w roku akademickim 1916/17 *profesor Hilbert wykładał teorię niezmienników z pomocą panny Noether*. W krótkim czasie skupiła ona wokół siebie grono młodych ludzi. Mówiono o nich *Noether i jej chłopcy*. Pierwszy jej wykład odbył się w okresie od 22 września do 20 grudnia 1919 roku i poświęcony był geometrii analitycznej. W roku 1921/22 prowadziła czterogodzinny wykład, który obejmował niezmienniki algebraiczne i różniczkowe, algebrę wyższą (w tym twierdzenie o skończoności liczby podstawowych niezmienników i teorię ciał), elementarną i algebraiczną teorię liczb. Opinie o jej wykładach były zróżnicowane. Bywała niezbyt dobrze przygotowana, wykłady były bardzo schematyczne, ale też pełne pomysłów i mogły być traktowane bardziej jako programy badawcze, aniżeli systematyczny wykład takiego czy też innego działu matematyki. W notatkach jednego z jej słuchaczy czytamy: *Wykład zakończył się o* 12.50, *Bogu dzięki!* Ktoś inny pisał, że jej wykłady *nie były dla niego przeżyciem* [22]. Van der Waerden pisał (loc. cit.): *Ona nie miała żadnych uzdolnień dydaktycznych.*

Matematyk XIX wieku powiedziałby, że *teoria niezmienników jest pomostem między algebrą i geometrią*. Dziś można uznać ją za dziedzinę wspólną dla teorii reprezentacji, geometrii algebraicznej, algebry przemiennej i kombinatoryki algebraicznej.

Ulubionym studentem Emmy był van der Waerden. Jego słynna książka [87] była w znacznym stopniu inspirowana przez wykłady i seminaria Emmy Noether. Praca na seminariach była dla niej i jej „chłopców” podstawowym sposobem rozwijania algebry. Do jej uczniów należało m. in. trzynastu doktorantów, a wśród nich Max Deuring, Ernst Witt, Otto Schilling, Chiungtze Tsen, Hans Fitting, Jacob Levitzki, Heinrich Grell, Fritz Seidelmann. Emmy Noether rozwijała wraz z uczniami głównie teorię pierścieni z teorią ideałów, oraz teorię algebr nad ciałami. Z każdym z tych nazwisk historia algebry związała ważne pojęcia (np. radykał Levitzkiego, pierścień Witta, waluacje Schillinga) lub też ważne twierdzenia (np. twierdzenie Tsena).

5. Lata dwudzieste i trzydzieste XX stulecia. Przełomem w nauczaniu algebry stała się cytowana już książka van der Waerdena [87], wydana w 1930 roku. Na ujęcie materiału wpłynęły niewątpliwie wykłady i wyniki Emila Artina i Davida Hilberta, ale przede wszystkim wykłady i seminaria Emmy Noether. Książka ta stała się odtąd wzorcowym podręcznikiem algebry uniwersyteckiej, służącym nieprzerwanie kilku generacjom matematyków. O popularności i znaczeniu tego dzieła może choćby świadczyć fakt, że w roku 1976 ukazało się pierwsze jego wydanie po rosyjsku mimo, że upłynęło wówczas już prawie pół wieku od pierwszego wydania. A bynajmniej nie było to wydanie w celach historycznych. Pierwszy tom miał dotychczas ponad osiem wydań, a drugi – ponad pięć. Obok wielu zalet i eleganckiego wykładu książka van der Waerdena miała i wady, np. zawierała niewiele algorytmów algebry. Spośród podanych algorytmów wymienić należy algorytm rozkładu wielomianu o współczynnikach całkowitych na czynniki pierwsze, czy też algorytm wyznaczania grupy Galois. Mimo to książka ta stała się na wiele dziesiątków lat wzorcem uniwersyteckiego wykładu algebry.

Pod koniec lat trzydziestych zaczęły wychodzić pierwsze tomy dzieła Bourbakiego. Ogólność i abstrakcyjność wykładu osiągnęły tu swoje apogeum. Dowody twierdzeń są egzystencjalne, brak jakichkolwiek przykładów w tekście i algorytmów. To, co przez całe stulecia było standardem nauczania matematyki, tzn. dobrze dobrane przykłady, przestało się liczyć. Jak pisał Emil Artin (BAMS 1953) w recenzji II księgi (*Algebra*) Bourbakiego, *w wykładzie teorii Galois zapłacono wysoką cenę za to, że nie dopuszcza się użycia teorii liczb czy też pojęcia grupy dualnej do skończonej grupy abelowej. W szczególności nie można podać prawie żadnego przykładu nad ciałem Q liczb wymiernych, bo nie ma możliwości udowodnienia, że dany wielomian jest nieprzywiedlny.* Tendencje wyżej opisane, jak też oba dzieła, van der Waerdena i Bourbakiego, wpłynęły w istotny sposób na zawartość podręczników algebry w ostatnich sześćdziesięciu latach.

Fizyk P. Jordan, próbując znaleźć algebraiczne podstawy mechaniki kwantowej, istotnie różne od standardowego ujęcia w języku macierzy hermite'owskich, wprowadził w latach trzydziestych klasę przemiennych algebr niełącznych, zdefiniowanych przez relację $(x^2y)x = x^2(yx)$ podobną do alternatywności (łączność dla trzech elementów, jeżeli dwa z nich są równe). Algebry te stały się obiektem intensywnych badań w drugiej połowie XX wieku.

6. Od lat trzydziestych do pięćdziesiątych. Kongresy. VIII Kongres w Bolonii (3–10 IX 1828) był początkiem triumfu algebry nieprzemiennej [8]. Wśród trzydziestu jeden odczytów w sekcji I–A (Algebra i Teoria liczb) dwadzieścia dotyczyło algebry. Wystąpienie Emmy Noether miało tytuł: *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie in Arithmetischer Auffassung.* Wtórowali jej G. Köthe (*Struktur der Ringe die die Durchschnittsminimalbedingungen erfüllen*) i A. Speiser (*Probleme der Gruppentheorie*). O. C. Hazlett, uczeń Leonharda E. Dicksona, kontynuował badanie arytmetyki ciał nieprzemiennych, rozpoczęte jeszcze w XIX wieku przez Adolfa Hurwitza, a kontynowane przez tegoż Dicksona (*Algebras and their arithmetics*, 1923), przedstawiając wykład na temat *Integers as matrices.* R. Fueter mówił o funkcjach zmiennej kwaternionowej, a L.-G. du Pasquier o arytmetyce pewnych algebr kwaternionowych. „Nieprzemienny charakter" sekcji I–A podkreśliła próba H. W. Turnbulla ze Szkocji zbudowania ogólnej teorii ułamków łańcuchowych w pierścieniach nieprzemiennych: *Matrix continued fractions*. Badań tych później nie kontynuowano, choć wydają się interesujące. Algebra nieprzemienna pojawiła się już na VII Kongresie w Toronto w roku 1924. IX Kongres w Zurychu (1932) nie wyróżnił się niczym specjalnym. Udowodnione w tym czasie przez Kurta Gödla (1931) twierdzenie o niezupełności arytmetyki liczb naturalnych okazało się być podstawowym dla rozwoju algebry. Upadł program formalizmu Hilberta i niczym nie uzasadniona wiara, że wszystko w matematyce da się zaksjomatyzować. W szczególności dotyczyło to wszystkich systemów dedukcyjnych, które zawierają zwykłą arytmetykę liczb naturalnych. Odkrycie to spowodowało odejście od systemów dedukcyjnych co, jak sądzę, wyszło algebrze tylko na dobre. Natomiast X Kongresowi w Oslo (1936) należy poświęcić więcej uwagi, choćby dlatego, że następny, XI Kongres odbył się dopiero w 1950 roku (Cambridge, Mass.). Jedyny wykład plenarny z algebry miał Oystein Ore: *On the decomposition theorems of algebra* ([20], tom I, 297–307). Był to wykład programowy, omawiający aktualne osiągnięcia w algebrze. Przede wszystkim jednak była to apoteoza Emmy Noether. Ore wskazywał na to, że oprócz aksjomatycznej syntezy (*axiomatic synthesis*) ważne są w algebrze zagadnienia zupełności, a więc pełny opis systemu algebraicznego (*algebraic system* – dziś preferujemy termin: *algebra uniwersalna* albo *ogólna*), spełniającego dany układ aksjomatów. Np. twierdzenie Ernsta Steinitza opisujące budowę dowolnego ciała jest przykładem takiego twierdzenia. Ore zwracał też uwagę na znaczenie pojęcia izomorfizmu w algebrze. Przedstawiał w swym programie ogólny schemat rozkładu danej algebry na produkt algebr *mniej złożonych*, jak pisał. Podkreślał rolę warunku wprowadzonego przez Emmę Noether: każdy wstępujący ciąg ideałów stabilizuje się po skończonej liczbie kroków (*Teilerkettensatz*). Nieco później doceniono rolę warunku wprowadzonego do algebry przez Emila Artina: każdy zstępujący ciąg ideałów stabilizuje się po skończonej liczbie kroków. Dużą część swojego wykładu programowego poświęcił Ore pojęciu kraty (*lattice*), wywodzącemu się od Dedekinda (*Dualgruppe*). Co ciekawe, terminologia teorii krat nie była wtedy jeszcze ustalona. Używano wymiennie terminów *lattice* i *structure*. Zainteresowanie kratami wywołane zostało dzięki ważnym osiągnięciom w tej dziedzinie Garreta Birkhoffa, Marshala Stone'a i Alfreda Tarskiego (algebry Boole'a). Na Kongresie tym po raz pierwszy pojawił się nowy dział algebry, algebra topologiczna. Przez analogię do intensywnie rozwijającej się w latach trzydziestych teorii grup topologicznych, uwagę matematyków zaczęły zwracać inne algebry z topologiami. Pierwszym znaczącym wynikiem w tej dziedzinie było wykazanie przez L. S. Pontrjagina [57] w roku 1932, że liczby rzeczywiste i zespolone są jedynymi spójnymi i lokalnie zwartymi ciałami topologicznymi (por. też [95], [96]). W Sztokholmie Kurt Mahler przedstawił wyniki dotyczące nowego pojęcia, pseudonormy w pierścieniu, a Olga Taussky zastanawiała się, kiedy przestrzeń euklidesowa jest ciałem topologicznym w zwykłej topologii. Natomiast George Polya powrócił do dziewiętnastowiecznych badań, zastosowań algebry w teorii wiązań chemicznych: *Kombinatorische Anzahlbestimmung für Permutationsgruppen und chemische Verbindungen.* Badania takie zapoczątkowali Arthur Cayley i William Kingdom Clifford w latach siedemdziesiątych XIX wieku.

W latach trzydziestych algebra stopniowo przyswajała metody teorii mnogości, wykorzystywane już wcześniej w innych działach matematyki (funkcje rzeczywiste, topologia). Np. Zorn [116] wykorzystał zasadę maksimum (zwaną dziś w Polsce Lematem Kuratowskiego-Zorna, a w USA Lematem Zorna) do dowodu istnienia ideałów maksymalnych, istnienia ciał rzeczywiście domkniętych czy też ciał algebraicznie domkniętych. Teichmüller [83] podał różne warunki równoważne pewnikowi wyboru, np. twierdzenie Zermelo (każdy zbiór można dobrze uporządkować), czy też warunek D (vide [83]): *dla każdej rodziny skończonych podzbiorów zbioru X, zawierającej zbiór pusty, istnieje maksymalny podzbiór M zbioru X, którego każdy skończony podzbiór należy do tej rodziny.* Dziś dowody wykorzystujące wymienione twierdzenia można znaleźć w każdym podręczniku algebry. W omawianym okresie dopiero je odkrywano.

Jeszcze przed II wojną światową narodziła się algebra homologiczna, wydzielając się jako odrębna dyscyplina z intensywnie rozwijającej się topologii algebraicznej. Jednak fundamentalne prace Eilenberga i Mac Lane'a na ten temat ukazały się dopiero po wojnie ([28], [29]). W pracy [28] dali oni początek teorii kategorii, która początkowo była narzędziem algebry, później stała się językiem matematyki, tak jak teoria mnogości na początku XX wieku, aby wreszcie oddzielić się swoich korzeni dając nową dyscyplinę *teorię kategorii.* Znacznie później, bo w latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych, ukazały się pierwsze monografie Cartana, Eilenberga i Mac Lane'a ([15], [54]). Zenon Borewicz poinformował mnie przed laty, że początki algebry homologicznej stworzył niezależnie w okresie wojny D. K. Faddiejev z Leningradu. Powoływał się na skrypt Faddiejeva z lat czterdziestych, w którym zostały wyłożone podstawy tej teorii.

Kohomologie grup i ich związek z rozszerzeniami grup badał już Reinhold Baer w latach trzydziestych.

Okres II wojny światowej kierował zainteresowania matematyków ku kryptologii. Wiadomo np. że Adrian Albert skupił wokół siebie algebraików zajmujących się tą tematyką. Generalnie jednak nie wiele do dziś wiadomo na ten temat, mimo publikacji obszernych dzieł [44]. Udział polskich kryptologów był w tym wyścigu znaczący ([71], [100]), ale do dziś nie odnotowany, nie licząc śladowych publikacji. Co ciekawe, algebra w okresie międzywojennym nie była w Polsce rozwijana, a wykłady uniwersyteckie ograniczały się do jej elementarnego zakresu.

Podstawy teorii pierścieni topologicznych stworzył Kaplansky [45] (por. też [95], [96]).

Pierwszy kongres po II wojnie światowej, XI Kongres odbył się w USA (Cambridge, Massachusetts, 30 VIII – 6 IX 1950). Liczba zgłoszonych odczytów z algebry była tak duża, że postanowiono wydzielić w ramach kongresu osobną konferencję poświęconą algebrze [60]. Oto tytuły odczytów plenarnych:

Groups and universal algebra

G. Birkhoff, *Some problems in lattice theory*

S. MacLane, *Cohomology theory of abelian groups*

R. Baer, *The cohomology theory of a pair of groups*

C. Chevalley, *The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups*

Structure theory of rings and algebras

A. A. Albert, *Power-associative algebras*

R. Brauer, *On the representation of groups of finite order*

N. Jacobson, *Representation theory for Jordan rings*

J. Dieudonné, *Les idéaux minimaux dans les anneaux associatifs*

T. Nakayama, *On two topics in the structural theory of rings (Galois theory of rings and Frobenius algebras)*

Arithmetic algebra

E. Artin, *Modern development of algebraic number theory and class field theory*

W. Krull, *Jacobsonsches Radikal und Hilbertscher Nullstellensatz*

M. Eichler, *Arithmetics of orthogonal groups*

M. Krasner, *Généralisations non-abéliennes de la théorie locale des corps des classes*

Algebraic geometry

O. Zariski, *The fundamental ideas of abstract algebraic geometry*

A. Weil, *Number theory and algebraic geometry*

Warto zwrócić uwagę, że odczyty z dwóch ostatnich sekcji nie byłyby dziś zaliczone do algebry. Sekcja *Arytmetyka algebraiczna* stanowi dziś część algebraicznej teorii liczb. Geometria algebraiczna już pięćdziesiąt lat temu traktowana była jako odrębna dyscyplina. Co ciekawe, wykład Kaplanskiego *Topological algebra* włączono do równolegle odbywającej się konferencji z analizy, w sekcji *Algebraic tendencies in analysis.* W sekcji tej znalazł się też wykład Paula R. Halmosa o teorii miary i Rogera Godementa o problemach teorii reprezentacji grup. Uwagę zwraca nie tylko duża liczba różnorodnych wyników z algebry, lecz także wiele pojęć algebry, które rozwinęły się w takim stopniu, aby znaleźć swoje miejsce na kongresie. Np. wygłoszono odczyty poświęcone grupoidom, półgrupom (Paul J. Dubreil), kwazigrupom, lupom Moufanga. Trevor Evans przedstawił problem słów w algebrze ogólnej. Liczne prace poświęcono teorii grup, w tym grupom uporządkowanym (F. Loonstra). Jednak najwięcej wyników dotyczyło pierścieni (np. pierścienie alternatywne, potęgowo-łączne, Jordana itd.) i ich uogólnień (półpierścienie, radykał Jacobsona dla półpierścienia itd.). Po raz pierwszy zaczęto odkrywać analogony teorii Galois w sytuacjach różnych od klasycznej (Nakayama, *Teoria Galois algebr*; Thrall, *Teoria Galois dla algebr przekształceń liniowych*). Klasyczną teorię Galois dla skończonego rozszerzenia typu Galois L ciała K można sformułować jako antyizomorfizm kraty ciał leżących między L i K z kratą podgrup grupy Galois tego rozszerzenia. Ogólny schemat *odpowiedniości Galois* pochodzi od Rigueta [73]. W ostatnim półwieczu odkryto wiele odpowiedniości Galois w algebrze i poza nią (liniowe równania różniczkowe). W części algebraicznej kongresu znalazły swoje miejsce także tematy klasyczne: przestrzenie liniowe i macierze, teoria ciał i równania.

7. Ekspansja algebry w drugiej połowie XX stulecia. Dominacja teorii grup i algebry homologicznej. Następny, XII Kongres odbył się w Amsterdamie (2–9 IX 1954). Dwa odczyty plenarne poświęcone były algebrze [61]: Richard Brauer (*On the structure of groups of finite order*) udowodnił, że w każdej grupie parzystego rzędu N istnieje właściwa podgrupa rzędu $h > \sqrt[3]{N}$. Natomiast Jean Dieudonné (*Le calcul différentiel dans les corps de caractéristique* $p > 0$) zdefiniował obiekt, który nazwał *formalną grupą Liego*, używając do konstrukcji formalnych szeregów potęgowych o współczynnikach z ciała charakterystyki dodatniej. Odczyty z algebry obejmowały duże spektrum tematów, m.in. pierścienie niełączne (Ernst-August Behrens), pierścienie półproste, algebry Jordana (Nathan Jacobson), półgrupy, kraty, grupy skończone itp. Uwagę zwracają próby przeniesienia klasycznych wyników z teorii liczb na pierścienie skończone (Erich Lamprecht, *Allgemeine Gaussche Summen in endlichen Ringen*). Polski akcent to odczyt Stanisława Krystyna Zaremby *Spacing problems in abelian groups* dotyczący pewnego zagadnienia kombinatorycznego, motywowanego problemami teorii kodowania.

XIII Kongres w Edynburgu (14–21 VIII 1958) algebrze poświęcił niewiele czasu [62]. Wśród dziewiętnastu odczytów plenarnych był tylko jeden z algebry. Helmut Wielandt dokonał przeglądu wyników w teorii grup skończonych: *Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen.* Jednak sensacją tego kongresu było obalenie XIV Problemu Hilberta przez Masayoshi Nagatę, który dla dowolnego ciała skonstruował podgrupę grupy liniowej przestrzeni wymiaru 16 nad tym ciałem, której pierścień niezmienników nie jest skończenie generowany nad tym ciałem. Późniejsze lata przyniosły dalsze studia nad zagadnieniami wokół XIV Problemu Hilberta [58].

XIV Kongres odbył się znowu w Sztokholmie (15–22 VIII 1962). Spośród tematów algebraicznych dominowała na nim teoria grup skończonych [63]. Wśród szesnastu wykładów plenarnych tylko jeden dotyczył algebry. Jacques Tits wygłosił wykład: *Groupes simples et géométries associées.* Aleksiej Iwanowicz Kostrikin (*Algebry Liego i grupy skończone*) udowodnił prawdziwość Ograniczonego Problemu Burnside'a dla wykładnika pierwszego p. Pytanie brzmiało: Czy w klasie wszystkich grup skończonych z zadaną liczbą k generatorów i tożsamością $x^p = 1$ istnieje taka maksymalna grupa $B(k, p)$, że każda grupa z tej klasy jest jej grupą ilorazową? Dowód Kostrikina długo budził wątpliwości. Ćwierć wieku później pełny jego dowód ukazał się w wersji książkowej [51]. Do dowodu posłużyła technika oparta na grupach i algebrach Liego. Innym ważnym wynikiem przedstawionym w Sztokholmie były dwa twierdzenia Johna G. Thompsona (*Two results about finite groups*): A. Każda grupa skończona nieparzystego rzędu jest rozwiązalna; B. Jeżeli istnieje automorfizm rzędu pierwszego skończonej grupy G bez nietrywialnych punktów stałych, to G jest nilpotentna. Wynik A udowodnili wspólnie Walter Feit i John G. Thompson [33]. Wyniki te doprowadzą Thompsona do Medalu Fieldsa (1970). Trzeba było jednak jeszcze trochę popracować. Szkic dowodu twierdzenia A zajął ponad 250 stron [33].

Już pod koniec XIX wieku wiedziano (William Burnside, Leonhard E. Dickson), dzięki twierdzeniom Camille Jordana i Otto Höldera, że opis grup skończonych sprowadza się do opisu skończonych grup prostych, poprzez budowę kolejnych rozszerzeń. Pojęcie grupy prostej pochodzi od C. Jordana (1869). Część grup prostych występuje w dwudziestu seriach, znanych jeszcze w XIX wieku (grupy alternujące A_n dla $n \neq 4$, wynik przypisywany Galois dla $n = 5$; projektywna specjalna grupa liniowa $PSL(n, q)$, tzn. grupa macierzy $n \times n$ o składowych z ciała q-elementowego i wyznaczniku 1, podzielona przez jej centrum, poza przypadkiem, gdy $n = 2$ i $q = 2, 3$; itd). Grupy proste nie występujące w żadnej ze znanych serii (znane były już wszystkie serie [40]) noszą nazwę sporadycznych grup prostych. Mathieu (1861) odkrył dwie grupy proste sporadyczne M_{11} i M_{12}, a później dalsze grupy noszące jego nazwisko, tzn. M_{22}, M_{23}, M_{24} (1873). Np. M_{11} jest czterokrotnie tranzytywną grupą permutacji jedenastu elementów. Wczesną historię teorii grup skończonych można znaleźć w [102]. Do roku 1966 nie znano innych grup sporadycznych, prócz grup Mathieu. Dopiero Z. Janko [43] zapoczątkował serię kolejnych przykładów grup sporadycznych. A więc przez prawie sto lat nie było nowych przykładów grup sporadycznych! Odkrycie to pobudziło innych badaczy. W krótkim czasie zaczęto odkrywać kolejne sporadyczne grupy proste (Conway, Fischer, Hall, Harada, Held, Higman, Lyons, McKay, Norton, O'nan, Rudvalis, Sims, Smith, Wales). Ostatecznie okazało się w latach osiemdziesiątych, że jest dokładnie 26 grup sporadycznych. Dalsze wyniki teorii grup przedstawiono na XV Kongresie (Moskwa, 1966). John G. Thompson wygłosił wykład: *Characterizations of finite simple groups.* A. I. Malcew mówił *O niektórych zagadnieniach z pogranicza algebry i logiki.* Rozwijająca się już od pewnego czasu teoria modeli znalazła zastosowania w algebrze [74]. Pierwszym spektakularnym zastosowaniem tych metod (ultrapotęgi ciał z waluacjami) w algebrze i teorii liczb był wynik Axa i Kochena [9], wyjaśniający status Hipotezy Artina: dla każdej liczby naturalnej d istnieje taki skończony zbiór liczb pierwszych $A(d)$, że jeżeli tylko liczba pierwsza p nie leży w tym zbiorze, to każda forma f nad ciałem Q_p, $n > d^2$ zmiennych, ma nietrywialne zero w Q_p. Zapoczątkowane w ten sposób zastosowanie teorii modeli w algebrze trwa do dziś, pozwalając na uzyskiwanie głębokich wyników, których na razie nie można udowodnić klasycznymi metodami algebry. Przypomina to trochę sytuację dotyczącą opisu niezmienników w XIX wieku i nieoczekiwany wynik Hilberta. Tu sytuacja jest podobna. Opisany jest nieefektywnie zakres prawdziwości tej hipotezy. Późniejsze wyniki, uzyskane w inny sposób, podały pewne oszacowania liczby elementów zbioru wyjątkowego $A(d)$. Kongres Moskiewski wskazał też inne trendy w algebrze [64]. Hyman Bass (*Whitehead groups and Grothendieck groups of group rings*) przedstawił rezultaty rodzącej się K-teorii, wkrótce ujęte w formie monografii [10]. E. R. Kolchin w wykładzie *Some problems in differential algebra* przedstawił podstawy algebry różniczkowej, w szczególności wspominając o teorii Galois ciał z różniczkowaniami. Teoria ta opisana jest w kolejnych wydaniach jego książki [50]. Algebraiczne ujęcie tej tematyki zapoczątkował Irving Kaplansky w [46]. E. S. Gołod i I. R. Szafarewicz udowodnili w 1964 roku, że jeżeli skończona p-grupa o minimalnej liczbie generatorów d określona jest przez r relacji, to $r > \left(\frac{d-1}{2}\right)^2$, podając równocześnie przykład nieskończonej, ale skończenie generowanej p-grupy, która nie spełnia tej nierówności dla r i d. W Moskwie Gołod mówił *O niektórych problemach typu Burnside'a*, podając negatywne rozwiązanie Ogólnego Problemu Burnside'a. Skonstruował on nieskończenie wymiarową algebrę nad ustalonym ciałem K, mającą $d \geqslant 2$ generatorów, której każda podalgebra generowana przez mniej niż d elementów jest nilpotentna. Wyprowadził stąd istnienie nieskończonej p-grupy mającej $d \geqslant 2$ generatorów i takiej, że każda jej podgrupa generowana przez mniej niż d elementów jest skończona. W następnych dziesięcioleciach były konstruowane dalsze przykłady tego typu, z dodatkowymi własnościami budowanej grupy. W szczególności, w roku 1968 P. S. Novikov i S. I. Adjan skonstruowali kontrprzykłady do Problemu Burnside'a dla grup z nieparzystym wykładnikiem $n > 4380$. Wynik ten był później poprawiany przez wielu autorów.

Dopiero jednak na XVI Kongresie (Nicea, 1–10 IX 1970) uhonorowano intensywny rozwój algebry przyznaniem Medalu Fieldsa J. G. Thompsonowi

[3]. Richard Brauer [3] w swoim wystąpieniu (*On the work of John Thompson*) pisał m.in.: *Wyznaczył on minimalne grupy proste, tzn. te grupy proste, których właściwe podgrupy są rozwiązalne*, stwierdzając dalej, że *wiele ważnych wniosków pokazuje, że teraz można odpowiedzieć na pytania dotyczące grup skończonych, które do tej pory były daleko poza zasięgiem* [dotychczasowych metod]. *Wymienię jeden: skończona grupa jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej właściwa podgrupa generowana przez dwa elementy jest rozwiązalna. Można spróbować to udowodnić, aby zobaczyć, jak głęboki jest ten wynik.* [...] A oto tematyka wykładów plenarnych w Nicei. Walter Feit, który niestety nie dostał Medalu Fieldsa, choć nań zasłużył, przedstawił aktualny stan wiedzy o skończonych grupach prostych (*The current situation in the theory of finite simple groups*), mówiąc, że *praca będzie dotyczyć tylko jednego problemu. Znaleźć sensowny opis wszystkich niecyklicznych* [skończonych] *grup prostych.* Praca zawierała m.in. opis grup prostych odkrytych przez Fischera, Griessa i innych. Natomiast Novikov otrzymał Medal Fieldsa za rozstrzygnięcie Problemu Burnside'a. Richard G. Swan poświęcił wykład intensywnie rozwijającej się K-teorii (*Algebraic K-theory*). Liczba ważnych wyników poświęconych skończonym grupom prostym była imponująca, jeśli jeszcze zwrócić uwagę na rangę nazwisk:

Richard Brauer, *Blocks and characters*

J. H. Conway, *The subgroup structure of the exceptional simple groups*

George Glauberman, *Local and global properties of finite groups*

Daniel Gorenstein, *Centralizers of involutions in finite simple groups*

D. G. Higman, *A survey of some questions and results about rank 3 permutation groups*

Zvonimir Janko, *A class of non-solvable finite groups*

Michio Suzuki, *Characterizations of some finite simple groups*

J. G. Thompson, *Quadratic pairs*

Niemniej ważne były wyniki z innych działów algebry, głównie z teorii pierścieni. S. I. Adjan swój wykład *Identités dans les groupes* poświęcił omówieniu aktualnego stanu problemu Burnside'a (wyniki własne, Novikova, Kostrikina i innych). Ponadto wyłoszono wykłady na temat:

S. A. Amitsur, *Some results on rings with polynomial identities*

P. M. Cohn, *Free ideal rings and free products of rings*

Max Koecher, *Jordan algebras and differential geometry*

A. I. Kostrikin, *Variations modulaires sur un thème de Cartan*

B. H. Neumann, *Properties of countable character*

A. Pfister, *Sums of squares in real function fields*

Przedstawiono również wyniki z algebry homologicznej i teorii ciał. Znamienny był tym razem brak wykładów dotyczących algebry ogólnej.

Pod koniec lat sześćdziesiątych coraz bardziej ujawniały się potrzeby praktyki komputerowej. Ponieważ nie można w nieskończoność zwiększać możliwości obliczeniowych komputerów, należy przeanalizować istniejące algorytmy, w tym algorytmy algebry pod kątem ich złożoności obliczeniowej, co przekłada się bezpośrednio na czas pracy komputera. Pierwsze udane próby w tym kierunku pochodzą jeszcze od Derricka Henry Lehmera z lat trzydziestych. Lehmer szukał algorytmów pozwalających np. na możliwie szybkie mnożenie dużych liczb. Tematyka ta powróciła w latach sześćdziesiątych. Zaczęto analizować pod kątem złożoności znane algorytmy algebry. Volker Strassen odkrył w 1968 roku, że do pomnożenia dwóch macierzy 2×2 wystarczy siedem, a nie osiem mnożeń, jak by to wynikało ze znanych wzorów. Fudamentalna praca na ten temat [82] ukazała się w roku 1973. Liczba operacji potrzebnych do pomnożenia dwóch macierzy $n \times n$ jest, jak łatwo zauważyć, rzędu $O(n^3)$. Z algorytmu Strassena wynika, że w istocie rząd wielkości jest mniejszy i wynosi $O(n^{\log 7})$. Wynik ten wielokrotnie poprawiano. Jak mi powiedział Strassen na Kongresie Algebry w Nowosybirsku (21–26 VIII 1989), można się tu wszystkiego spodziewać. W pierwszej połowie XX wieku wyniki tego typu zaliczano do algebry. Później zakwalifikowano by je do metod numerycznych algebry. Jeżeli jednak sięgnąć do pracy [82], nie ma wątpliwości, że jest to algebra: autor używa iloczynów tensorowych. W ostatnich trzydziestu latach XX wieku przeanalizowano także inne podstawowe algorytmy algebry pod kątem ich złożoności obliczeniowej. W ten sposób powrócono do niektórych algorytmów znanych jeszcze w XIX wieku i wtedy uważanych za nieprzydatne w praktyce. W ostatnich dziesięcioleciach zrodziła się z tych badań odrębna dyscyplina. Bada ona np. złożoność różnych algorytmów w teorii grup, w zależności od rzędu grupy lub innych wielkości związanych z grupą (liczba podgrup, elementów danego rzędu itp.).

8. Ostatnie ćwierćwiecze XX wieku. XVII Kongres (Vancouver, 1974) nie wniósł zbyt wiele do algebry. Na następnym XVIII Kongresie (Helsinki, 15–23 VIII 1978) też nie było wiele na tematy algebraiczne [65]. W dalszym ciągu dominowała teoria grup. Jeden z wykładów plenarnych miał Daniel Gorenstein (*The classification of finite simple groups*). Uzupełniały go wykłady Michaela Aschbachera (*A survey of the classification program for finite simple groups of even characteristic*) i Charlesa C. Simsa (*Group-theoretic algorithms, a survey*). Prócz tego były ważne wykłady z teorii pierścieni (Melvin Hochster, *Cohen-Maccaulay rings and modules*), a ponadto z algebraicznej K-teorii (Wilberd van der Kallen, V. P. Płatonov).

XIX Kongres, mający się odbyć w 1982 roku w Warszawie, opóźnił się o rok z powodu stanu wojennego w Polsce i ostatecznie odbył się w terminie 16–24 VIII 1983. Opóźnienie to zostało zrekompensowane w postaci obszernej dwutomowej publikacji [66]. Algebrę reprezentowały dwa tematy: grupy skończone i algebry. Robert L. Griess, Jr. w wykładzie: *The sporadic simple* *groups and construction of the Monster* mówił o niemal zakończonej klasyfikacji skończonych grup prostych. Dalsze wykłady z teorii grup: M. Gromov, *Infinite groups as geometric objects*; A. Ju. Olszanski, *On a geometric method in the combinatorial group theory*. Pozostałe wykłady w sekcji algebry dotyczyły różnego typu algebr:

J. C. Jantzen, *Enveloping algebras of semisimple Lie algebras*

A. Joseph, *Primitive ideals in enveloping algebras*

C. M. Ringel, *Idecomposable representations of finite-dimensional algebras*

E. I. Zelmanov, *On the theory of Jordan algebras*

Dwa wykłady dotyczyły K-teorii: C. Soulé, *K-théorie et zéros aux points entiers de fonctions zeta*; R. P. Stanley, *Combinatorial applications of the hard Lefschetz theorem*.

XX Kongres odbył się w Berkeley (3–11 VIII 1986). Program z algebry był dość bogaty [67]. Algebrze były poświęcone dwa odczyty plenarne. Arnold Schönhage (*Equation solving in terms of computational complexity*) swój występ poświęcił już w pełni ukształtowanej dyscyplinie, algebraicznej teorii złożoności algorytmów. A. A. Suslin opisał *Algebraic K-Theory of fields*. Na sekcji algebry wygłoszono osiem godzinnych wykładów:

Maurice Auslander, *The what, where, and why of almost split sequences*

G. V. Belyj, *On commutant of the absolute Galois group*

Walter Borho, *Nilpotent orbits, primitive ideals, and characteristic classes (a survey)*

Michel Broue, *Théorie locale des blocs d'un groupe fini*

Peter Gabriel, *Darstellungen endlichdimensionaler Algebren*

A. S. Merkurjev, *Milnor K-theory and Galois cohomology*

V. L. Popov, *Modern developments in invariant theory*

Robert Lee Wilson, *Simple Lie algebras over fields of prime characteristic*

XXI Kongres [68] odbył się w Kyoto (21–29 VIII 1990). W algebrze dominowała K-teoria. Jednym z medalistów Fieldsa był Władimir Drinfeld, nagrodzony na dowód Hipotezy Langlandsa dla grupy $GL(2, F_q(t))$ i za wyniki dotyczące grup kwantowych. Nie są to zagadnienia algebry, choć niewątpliwie algebra jest ważnym narzędziem w wymienionych tematach. Pojęcie *moduł Drinfelda* weszło na stałe do algebry. Wśród wykładów plenarnych znalazły się trzy wykłady z algebry:

Spencer Bloch, *Algebraic K-Theory, motives, and algebraic cycles*

Yasutaka Ihara, *Braids, Galois groups, and some algebras in mathematics*

Vaughan F. R. Jones, *Von Neumann algebras in mathematics*

W sekcji *Algebra* znalazło się osiem wykładów po 45 minut:

Jon F. Carlson, *Cohomology of modules over group algebras*

Rostislav I. Grigorchuk, *On growth in group theory*

Craig Huneke, *Absolute integral closure and big Cohen-Macaulay algebras*

Alexander R. Kemer, *Identities of associative algebras*

Paul C. Roberts, *Intersection theory and the homological conjectures in commutative algebra*

Klaus W. Roggenkamp, *The isomorphism problem for integral group rings of finite groups*

Robert W. Thomason, *The local to global principle in algebraic K-theory*

Efim I. Zelmanov, *On the restricted Burnside problem*

Długością elementu g w skończenie generowanej grupie G nazywa się minimalną liczbę generatorów, których iloczynem jest g. *Funkcja wzrostu* w takiej grupie zlicza liczbę elementów, których długość nie przekracza n. W naturalny sposób zdefiniowaną klasę równoważności funkcji wzrostu (zależnych od zbioru generatorów) nazywa się *stopniem wzrostu* grupy. W terminach stopnia wzrostu można wyrazić wiele własności grupy. Grigorchuk rozwiązał problem Milnora dotyczący stopnia wzrostu grupy.

Roggenkamp rozważał *problem izomorfizmu* dla grup skończonych: czy dla grup skończonych G i H z izomorfizmu ich pierścieni grupowych nad pierścieniem $\mathbf{Z}$ liczb całkowitych wynika izomorfizm G z H? Zagadnienie ma bogatą literaturę.

Zelmanov przedstawił najnowsze badania Ograniczonego Problemu Burnside'a (w [51] można znaleźć wcześniejsze wyniki).

XXII Kongres [69] odbył się znów w Zurychu (3–11 VIII 1994), niemal w stulecie I Kongresu. Tematyka wykładów z algebry była podobna do tematyki poprzedniego kongresu. Zelmanov otrzymał Medal Fieldsa za wyniki dotyczące Ograniczonego Problemu Burnside'a. Kontynuując badania Kostrikina rozstrzygnął on Ograniczony Problem Burnside'a dla wykładników postaci p^n (p – liczba pierwsza). Podobnie jak Kostrikin, użył algebr Liego, przy okazji znacznie upraszczając dowód w przypadku $n = 1$. Przypadek $p = 2$ okazał się bardzo skomplikowany; wymagał użycia kwadratowych rozszerzeń pierścieni Jordana.

W sekcji algebry wygłoszono następujące wykłady:

Peter Littelmann, *The path model for representations of symmetrical Kac-Moody algebras*

Alexander Lubotzky, *Subgroup growth*

Jean-François Mestre, *Constructions polynomiales et théorie de Galois*

Raman Parimala, *Study of quadratic forms – Some connections with geometry*

Gerald W. Schwarz, *Invariant differential operators*

Andrei Suslin, *Algebraic K-theory and motivic cohomology*

Michel Van den Gergh, *Modules of covariants*

Wykład Littelmanna dotyczył pewnej ważnej klasy algebr Liego. Mestre nawiązał do klasycznego pytania Emmy Noether: czy każda grupa skończona jest grupą Galois pewnego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Po zakończeniu klasyfikacji skończonych grup sporadycznych pojawiły się liczne konstrukcje wielomianów, których grupą Galois jest zadana grupa sporadyczna. Powyższe wykłady dotyczyły na ogół nie tylko algebry. Np. odczyt Schwarza równie dobrze można zakwalifikować do geometrii algebraicznej.

Ostatni w XX wieku, XXIII Kongres odbył się w Berlinie (18–27 VIII 1998). Najważniejszym wynikiem uhonorowanym na tym kongresie był dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata podany przez Andrew Wilesa [70]. Ograniczenie wieku medalistów do czterdziestki nie pozwoliło na przyznanie mu Medalu Fieldsa. Tytułem rekompensaty Wiles dostał srebrną plakietkę z odpowiednim napisem.

Richard E. Borcherds otrzymał Medal Fieldsa za dowód hipotezy *Monstrous Moonshine* (*Monstrualne Urojenie*). Mianowicie John McKay zauważył, że między współczynnikami eliptycznej funkcji modularnej $j(\tau)$ a wymiarami nieprzywiedlnych reprezentacji grupy Monster (największa wśród grup sporadycznych) zachodzą proste zależności arytmetyczne. Na tej podstawie J. H. Conway i S. Norton (1979) sformułowali hipotezę *Monstrous Moonshine*. Znów, tak jak poprzednio, nie jest to wynik z czystej algebry. Ponadto na sekcji algebry wygłoszono osiem wykładów:

Eric M. Friedlander, *Geometry of infinitesimal group schemes*

Sergei V. Ivanov, *On the Burnside problem for groups of even exponent*

William M. Kantor, *Simple groups in computational group theory*

Gunter Malle, *Spetses*

Aleksander V. Pukhlikov, *Birational automorphisms of higher-dimensional algebraic varietes*

Idun Reiten, *Tilting theory and quasitilted algebras*

Jeremy Rickard, *The Abelian defect group conjecture*

Aner Shalev, *Simple groups, permutation groups, and probability*

Wydaje się, że wykłady Friedlandera i Pukhlikova mogły by być również zakwalifikowane do geometrii algebraicznej. Kantor dowiódł, że istnieją algorytmy w teorii grup skończonych (np. wyznaczanie p-grup Sylowa, ciągu kompozycyjnego itd.), które mają wzrost wielomianowy. Stwarza to dobre podstawy do przyszłych obliczeń numerycznych w teorii grup. Malle rozważał pewne grupy symmetrii, które okazały się grupami Weyla. Wykład Reitena dotyczył reprezentacji algebr artinowskich, a wykład Shaleva poświęcony był najnowszym wynikom w teorii grup skończonych, uzyskanych dzięki metodom probabilistycznym.

Oprócz cytowanych wykładów związanych z algebrą, na każdym kongresie były krótkie komunikaty. Na kongresach w II połowie XX wieku było ich po kilkadziesiąt.

Po wojnie algebra w Polsce zaczęła się rozwijać głównie w Toruniu, gdzie powstał prężny ośrodek, zajmujący się m.in. algebrą homologiczną i teorią pierścieni, skupiony wokół Stanisława Balcerzyka, jego współpracowników i uczniów. Pod koniec lat pięćdziesiątych wokół Edwarda Marczewskiego skupiła się we Wrocławiu liczna grupa matematyków zajmujących się algebrą ogólną (zwaną też uniwersalną). Różnorodne działy algebry rozwijane są obecnie w Katowicach, Warszawie i Wrocławiu. Nie zamierzam jednak omawiać rozwoju algebry w Polsce; byłby to temat na odrębny artykuł.

9. Nauczanie algebry. Program Emila Artina. Potrzebę zmian w nauczaniu, nie tylko algebry, widział już w roku 1954 André Weil [92]. Pisał on: *Wydaje się, że obliczenia numeryczne i wszystkie pomysły z nimi związane będą zajmować coraz ważniejsze miejsce w nauczaniu elementarnym, aniżeli ma to dotychczas miejsce.* Odniósłbym tę wypowiedź również do nauczania matematyki na poziomie uniwersyteckiem.

Program wykładu algebry uniwersyteckiej zaproponował Emil Artin [5].

Na konferencji w Bombaju, w roku 1960, poświęconej nauczaniu matematyki, Emil Artin przedstawił program nauczania algebry na uniwersytetach [5]. I choć minęło od tego czasu prawie pół wieku, to wydaje się, że program ten jest nadal aktualny i zasługuje na przypomnienie. Relacja Artina to opis jego doświadczeń zebranych na uniwersytetach amerykańskich i niemieckich. Jak stwierdza Artin, program wykładu algebry abstrakcyjnej dla zaawansowanych studentów zależeć będzie od wielu szczegółów, takich jak przygotowanie studentów, wyposażenie biblioteki i innych warunków lokalnych. W przypadku wykładu algebry jesteśmy w szczęśliwym położeniu, pisze Artin, gdyż ewentualny spór może dotyczyć jedynie podejścia aksjomatycznego. Jeżeli zrezygnować z takiego ujęcia, to, zdaniem Artina, cały kurs traci sens i staje się nieudolny. Oponenci tej metody wskazują często na trudności studentów. Artin uważa, że wtedy należy zwolnić tempo wykładu. *Jestem przeciwny podręcznikom prawdopodobnie z powodu mojego europejskiego przygotowania*, pisze Artin. *Na moich wykładach polecam jedynie tylko kilka książek, które student może wykorzystać. Nienawidzę wykładów, w których mam się przekopywać rozdział po rozdziale przez daną książkę. Żywość i świeżość wykładu, pomyślane jako bodziec dla studentów, ucierpiałyby ogromnie. Idąc na kompromis piszę na tablicy więcej niż zwykle tak, aby student mógł w domu zrekonstruować wszystkie szczegóły bez trudności.* W dalszym ciągu Artin zwraca uwagę na to, że obecnie algebra stała się narzędziem używanym w różnych działach matematyki. Algebraicy powinni więc mieć na uwadze potrzeby innych dyscyplin takich, jak topologia, analiza i geometria algebraiczna. Planowanie wykładu powinno być więc uzależnione od lokalnych warunków uniwersytetu. A oto szczegółowy program wykładu proponowany przez Artina.

1. Przypomnienie podstawowych pojęć teorii mnogości, oznaczenia, relacje równoważności, porządki.

2. Wstęp do podstawowych pojęć algebry: zbiory z działaniami.

3. Pojęcie grupy. Rozkład na warstwy względem podgrupy. Grupy z operatorami. Homomorfizmy. Podstawowe twierdzenie o homomorfiźmie. Pojęcie pierścienia, modułu nad pierścieniem.

4. Pojęcie ciała jako szczególny przypadek pierścienia (niekoniecznie przemiennego), przestrzenie liniowe. Materiał uzależniony od tego, ile wcześniej było na ten temat. Tym niemniej powinien być dokonany przegląd podstawowych faktów z algebry liniowej.

5. Ideały w pierścieniach przemiennych. Pierścienie ilorazowe. Ideały maksymalne i pierwsze. Radykał ideału.

6. Konstrukcje nowych obiektów algebraicznych.

(a) Ciało ułamków pierścienia całkowitego lub, ogólniej, pierścień R_S ułamków pierścienia R względem zbioru multyplikatywnego S.

(b) Konstrukcja pierścienia $R[X]$, gdzie X jest zmienną, a R jest pieścieniem lub konstrukcja pierścienia półgrupowego $R[S]$, gdzie S jest półgrupą.

(c) Rozwiązywanie równań $f = 0$, $f \in S \subset F[X]$, gdzie F jest ciałem.

(d) Konstrukcja algebraicznego domknięcia ciała.

(e) Odwzorowania wieloliniowe i iloczyny tensorowe modułów jako wstęp do topologii lub algebry homologicznej.

(7) Pierścienie głównych ideałów (PID) i pierścienie z jednoznacznością rozkładu (UFD).

(8) Twierdzenie Gaussa: jeżeli R jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu, to $R[X]$ też ma tę własność.

(9) Rozszerzenia ciał przemiennych.

(10) Teoria Galois w oparciu o twierdzenie Dedekinda o liniowej niezależności automorfizmów.

(11) Elementy teorii waluacji.

Spośród innych tematów, które można by szerzej rozwinąć, wymienia Artin teorię grup, algebr, pierścienie i moduły noetherowskie, algebrę homologiczną i geometrię algebraiczną. Artin uważa, że można bezpiecznie zrezygnować z omawiania dydaktycznej strony wykładu. Często bowiem najlepiej przygotowany wykład może być zaprzepaszczony poprzez kiepską prezentację. Z drugiej strony, znani są bardzo dobrzy studenci notorycznie słabych wykładowców.

Oczywiście program Artina można by dziś rozszerzyć o nowe hasła, ale wydaje się, że w ogólnym zarysie jest on nadal aktualny. Zresztą na polskich uniwersytetach, nawet i dziś, nie wszędzie wykłada się algebrę nawet w takim zakresie, jak to proponował Artin.

Już w XIX wieku zaczęły pojawiać się podręczniki akademickie algebry. Ważną rolę odegrała wtedy książka Serreta [79], która stała się standardowym podręcznikiem we Francji aż do roku 1900. Ponieważ nie opisywała ona osiągnięć C. Jordana w teorii grup, ani rozwoju teorii ciał wraz z teorią Galois, więc powszechne użycie jej spowodowało automatycznie opóźnienie kilku generacji matematyków francuskich. Dieudonné [25a] mówił o szoku i zdziwieniu swoim i jego młodszych kolegów, gdy ukazała się książka van der Waerdena [87]: *Kształciłem się w École Normale, ale nie wiedziałem, co to jest ideał, a jedynie wiedziałem, co to jest grupa!* Mimo, że uwaga Dieudonnégo ma nieco głębszy wydźwięk, to problem na pewno miał związek z kolejnymi wznowieniami książki Serreta [79]. Podręcznik Webera [89] służył do czasu ukazania się książki [87] i miał polskie wydanie w roku 1925 [90]. Były również w użyciu inne podręczniki algebry ([11], [18], [24], [55]), żeby wymienić tylko kilka przykładów. W II połowie XX wieku cieszył się uznaniem podręcznik [41] urodzonego w Warszawie Nathana Jacobsona, a także dobrze znana w Polsce książka G. Birkhoffa i S. Mac Lane'a [12], wydana po raz pierwszy w roku 1954. Nieco później dużą karierę zrobił podręcznik S. Langa [53]. Zdaniem Abhyankara [2] *Algebra* O. Perrona [56] jest ostatnim podręcznikiem zawierającym liczne algorytmy dla wielomianów wielu zmiennych.

W okresie międzywojennym były w Polsce trzy podręczniki algebry (nie licząc książek o wyznacznikach autorstwa B. Iwaszkiewicza i M. Kernera (1934), Sleszyńskiego (1926) i S. K. Zaremby (1909)): wspomniany podręcznik Webera [90], bardzo dobry podręcznik Stanisława Ruziewicza i Eustachego Żylińskiego [77], oraz wydany w roku 1934 podręcznik [114] Witolda Wilkosza. Wykład algebry Wacława Sierpińskiego [80] ukazał się dopiero w roku 1946.

Wybranie tylko kilku najnowszych i najprężniej rozwijających się dyscyplin matematycznych przez polskich matematyków po odzyskaniu niepodległości w 1918 r. stało się źródłem wielu sukcesów matematyki polskiej. Z drugiej jednak strony spowodowało zaniedbanie innych dyscyplin, w tym także algebry, nie tylko w zakresie badań, ale również w zakresie nauczania. Straty te stopniowo odrobiono po II wojnie światowej. Obecnie, przynajmniej na niektórych uniwersytetach, obserwuje się systematyczne ograniczanie zakresu wykładanej algebry i powrót do poziomu nauczania z II połowy XIX wieku, na rzecz różnych działów matematyki stosowanej. Nie wróży to dobrze polskiej algebrze.

9. Co dalej? Dziś trudno jednoznacznie przewidzieć, jaka tematyka będzie dominować w algebrze XXI wieku. Z pewnością nadal intensywnie będzie się rozwijać teoria grup skończonych. Teoretycznie wiadomo, jak zbudowana jest każda grupa skończona. Zapewne powszechne będą programy komputerowe pozwalające na operacje w danej grupie, grupy kolejnych rzędów zostaną stablicowane, a ich opis będzie dostępny w internecie. Należy oczekiwać, że zostanie wreszcie uporządkowana ogromnie rozbudowana i rozproszona teoria pierścieni. Wymaga to przygotowania monografii, albo serii monografii w stylu Jacobsona [42] czy też innych jego książek (np. o pierścieniach Jordana). Być może wzorem teorii grup nastąpi większe zainteresowanie pierścieniami skończonymi i próba ich opisu. Należy oczekiwać rozwoju tych działów algebry, które mają znaczenie w informatyce i teorii kodowania. Można się spodziewać, że będą nowe opracowania w zakresie algebry homologicznej i jej zastosowań. Zapewne powstaną nowe monografie poświęcone K-teorii. Śledząc tematykę ostatnich kongresów można z dużym prawdopodobieństwem przewidzieć badania w najbliższym czasie. Na wzór *Monstrualnego Urojenia* mogą się pojawić hipotezy uzyskane dzięki dużej liczbie przykładów numerycznych. Mogą powstać zupełnie nowe problemy motywowane rozwojem innych dyscyplin, zarówno matematycznych, jak i niematematycznych. Na wiele klasycznych pytań współczesna algebra nie zna odpowiedzi. Np. jak opisać wszystkie automorfizmy pierścienia wielomianów wielu zmiennych (grupa Cremony). Być może pomocne okażą się wyniki wiążące własności topologiczne obiektu z jego własnościami dyskretnymi. Dla grup są to wyniki znane (np. każda zwarta grupa zerowymiarowa jest proskończona). Zapewne nastąpi renesans niektórych nieco zapomnianych działów algebry, np. algebry uniwersalnej czy też opisu operacji algebraicznych w klasycznych obiektach (ciała, pierścienie). Młodzieńcze prace Norberta Wienera z lat dwudziestych XX wieku dotyczyły operacji w ciałach. Być może przyda się w zastosowaniach numerycznych możliwość zdefiniowania ciała przy pomocy jednej operacji (Wiener). Na uporządkowanie czeka też bardzo rozbudowana teoria modułów i ich różne uogólnienia. Zapewne nadal będą się rozwijać bardzo specjalne działy algebry liniowej. Czas pokaże, w jakim kierunku rozwinie się algebra, bowiem nie wszystko można przewidzieć.

Do rozwoju algebry w XX wieku przyczyniło się wielu matematyków, z których każdy wniósł coś nowego. Moją cegiełką w tej budowli jest pierwsza w świecie monografia [95] poświęcona ciałom topologicznym, której znacznie rozszerzone wydanie [96] ukazało się u Marcela Dekkera w 1988 roku.

Bibliografia

[1] Niels Henrik Abel, *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichung von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 1 (1826), 65–84.

[2] Shreeram S. Abhyankar, *Historical ramblings in algebraic geometry and related algebra*, American Mathematical Monthly 83 (1976), 409–448.

[3] *Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970*, Gauthier-Villars, Paris 1971. 3 tomy.

[4] W.-H. Alten, A. Djafari-Nanini, M. Folkerts, H. Schlosser, H. Wussing, *4000 Jahre Algebra. Geschichte. Kulturen. Menschen*, Springer Verlag 2004.

[5] Emil Artin, *Contents and methods of an algebra course*, Bombay 1960. (w tomie: *The Collected Papers of Emil Artin*, Addison-Wesley Publ. Co., 1965; 539–546).

[6] Michael Atiyah, *Matematyka w XX wieku*, Wiadomości Matematyczne 39 (2003), 47–63.

[7] *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici* (Roma, 6–11 Aprile 1908), Roma 1909.

[8] *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici* (Bologna 3–10 Settembre 1928), vol. VI, Bologna 1929.

[9] James Ax, Simon Kochen, *Diophantine problems over local fields*, Amer. J. Math. 87 (1965), 605–630; 631–648.

[10] Hyman Bass, *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, New York 1968.

[11] G. Bauer, *Vorlesungen über Algebra*, zweite Auflage, Teubner, 1910.

[12] Garret Birkhoff, Saunders Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, PWN, Warszawa 1966.

[13] William Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge: University Press, 1897. Second edition, 1911.

[14] William Burnside, A. W. Panton, *Theory of equations*, vols. I–II, Dublin 1904.

[15] Henri Cartan, Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press.

[16] Muhammad ibn Musa al Chorezmi, *Matematičeskie Traktaty*, Taškent 1983. (ros.)

[17] Alexis Claude Clairaut, *Éléments d'algèbre*, Paris 1746.

[18] Ch. de Comberousse, *Cours d'Algèbre Superièure*, Paris 1915.

[19] *Comptes Rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 Août 1900.*

[20] *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens Oslo 1936.* Oslo 1937.

[21] René Descartes, *Géomètrie*, 1637.

[22] Auguste Dick, *Emmy Noether*, Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik", Basel 1970.

[23] Leonhard Eugene Dickson, *Linear Groups* (with an exposition of the Galois field theory), Teubner, Leipzig, 1901.

[24] —, *Introduction to the theory of algebraic equations.* John Wiley and Sons, New York 1903.

[25] Samuel Dickstein, *Pojęcia i metody matematyki, Tom pierwszy, Część pierwsza – Teorya działań*, Warszawa 1891.

[25a] Jean Dieudonné, *The work of Nicholas Bourbaki*, American Mathematical Monthly 77 (1970), 134–145.

[26] *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graecis Commentariis*, Edidit et latine interpretatus est Paulus Tannery, Lipsiae 1893–1895, I–II (istnieje tłum. ros.: Diofant Aleksandrijskij, *Arifmetika i kniga o mnogougolnych czisłach*, Nauka 1974).

[27] Harold M. Edwards, *The Genesis of Ideal Theory*, Archive for History of Exact Sciences 23 (1980), 321–378.

[28] Samuel E i l e n b e r g, Saunders Mac L a n e, *General theory of natural equivalences*, TAMS 58 (1945), 231–294.

[29] —, *Relations between homology and homotopy groups of spaces*, Annals of Mathematics 46 (1945), 480–509.

[30] —, *Cohomology theory in abstract groups I, II*, ibidem 48 (1947), 51–78; 326–341.

[31] *Euclid's Elements*, translated from the text of Heiberg by Thomas L. Heath, Dover Publications, Inc., New York 1956.

[32] Leonard E v e n s, *The cohomology ring of a finite group*, Transactions of the American Mathematical Society 101 (1961), 224–239.

[33] William F e i t, John G. T h o m p s o n, *Solvability of groups of odd order*, Pacific Journal of Mathematics 13 (1963), 775–1029.

[34] Adolf F r a e n k e l, *Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 145 (1915), 139–176.

[35] —, *Über einfache Erweiterung zerlegbarer Ringe,* ibidem 151 (1921), 121–166.

[36] P.-H. F u s s, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géometres du XVIIIème siècle*, tome I–II, St.-Pétersbourg 1843.

[37] Carl Friedrich G a u s s, *Mathematisches Tagebuch*, 1796–1814 (w: Gauss *Werke*, X.1., 1917, 488–574).

[38] —, *Demonstratio Nova Theorematis Omnem Fvnctionem Algebraicam Rationalem Integram Univs Variabilis in Factores Reales Primi vel Secundi Gradus Resolvi Posse* [...], Helmstadii 1799.

[39] Duncan Farquharson G r e g o r y, *On the Nature of Symbolical Algebra*, Trans. Royal Soc. Edinb. 14 (1840), 208–216.

[40] James F. H u r l e y, Arunas R u d v a l i s, *Finite simple groups*, American Mathematical Monthly 84 (1977), No 9, 693–714.

[41] Nathan J a c o b s o n, *Lectures in Abstract Algebra*, I–III, D. van Nostrand 1951.

[42] —, *Structure of Rings*, AMS Providence, R. I. 1956.

[43] Zvonimir J a n k o, *A new finite simple group with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization*, Journal of Algebra 3 (1966), 147–186.

[44] David K a h n, *The code-breakers*, Macmillan Publ. Co. 1967.

[45] Irving K a p l a n s k y, *Topological rings*, American Journal of Mathematics 69 (1947), 153–183.

[46] —, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris 1957.

[47] L. M. K a r p o v a, N. D. S e r g e e v a, *Grafik funkcii u al-Marakishi*, Istoriko-matematiczeskie issledovania, vyp. XXIII (1978), 213–234.

[48] Felix K l e i n, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, I–II, Verlag von Julius Springer, I (1926); II (1927).

[49] Jacob K l e i n, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Dover, New York 1966.

[50] Ellis Robert K o l c h i n, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York and London 1973.

[51] Aleksiej Ivanovicz K o s t r i k i n, *Vokrug Burnside'a*, Nauka, Moskwa 1986. (ros.)

[52] Joseph Louis de L a g r a n g e, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1770 et 1771. (Oeuvres, III, 205–421).

[53] Serge L a n g, *Algebra,* Addison-Wesley, 1965.

[54] Saunder M a c L a n e, *Homology*, Springer 1963.

[55] Eugen N e t t o, *Vorlesungen über Algebra,* I–II, Leipzig. I (1896); II (1900).

[56] Oskar P e r r o n, *Algebra*, tomy I–II, 1927.

[57] Lev P o n t r j a g i n, *Über stetige algebraische Körper*, Annals of Mathematics 33 (1932), 163–174.
[58] *Problemy Hilberta, w pięćdziesięciolecie śmierci ich twórcy*, pod redakcją Witolda Więsława, Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa 1997.
[59] *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 22–28 August 1912), Cambridge 1913.
[60] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Cambridge, Massachusetts, USA, August 30–September 6, 1950), AMS, 1952.
[61] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954* (Amsterdam, September 2–September 9), Amsterdam 1954.
[62] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (14–21 August 1958), Cambridge 1960.
[63] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (15–22 August 1962), Uppsala 1963.
[64] *Proceedings of International Congress of Mathematicians* (Moscow 1966), Izd. Mir, Moskwa 1966.
[65] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Helsinki 1978), tomy I–II, Helsinki 1980.
[66] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (August 16–24, 1983, Warszawa), tomy I–II, Warszawa 1984.
[67] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1986* (August 3–11, 1986, Berkeley, California, USA), AMS 1987, tomy I–II.
[68] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Kyoto 1990), Springer 1991, tomy I–II.
[69] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (August 3–11, 1994), Zürich, Switzerland, Birkhäuser Verlag, Basel 1995, tomy I–II.
[70] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berlin 1998, August 18–27), Documenta Mathematica, 1998, tomy I–III.
[71] Marian R e j e w s k i, *Jak matematycy polscy rozszyfrowali Enigmę*, Wiadomości Matematyczne 23 (1980), 1–28.
[72] R. R e m a k, *Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 153 (1924), 131–140.
[73] Jacques R i g u e t, *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois*, Bull. Soc. Math. France 76 (1948), 1–4; 114–155.
[74] Abraham R o b i n s o n, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland, Amsterdam 1963.
[75] Paolo R u f f i n i, *Teoria Generale delle Equazioni*, 1799. (Opere, I, 1–324).
[76] —, *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*, 1813. (Opere, II, 155–268).
[77] Stanisław R u z i e w i c z i Eustachy Ż y l i ń s k i, *Wstęp do matematyki* (*I. Elementy algebry wyższej i teorji liczb*), Lwów 1927.
[78] Adolf S ą g a j ł o, *Wykład zupełny algebry.* Tom I: Początki algebry. Tom II: Teorya Wyznaczników i ich przedniejsze zastosowania (wg Salmona), Nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiéj, Paryż 1873.
[79] Joseph Alfred S e r r e t, *Cours d'Algèbre supérieure*, Édition 1, Paris 1849; Édition 2, 1854; Édition 3, 1866 (dwa tomy); Édition 4, 1877; Édition 5, 1885; Édition 6, 1910; Édition 7, 1928; ponadto wydania niemieckie i amerykańskie.
[80] Wacław S i e r p i ń s k i, *Zarys algebry wyższej*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław1946 .

[81] Ernst Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 137 (1910), 167–309.
[82] Volker Strassen, *Vermeidung von Divisionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 264 (1973), 184–202.
[83] Oswald Teichmüller, *Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom?*, Deutsche Mathematik 4 (1939), No 5, 567–577.
[84] *Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*, Leipzig 1898.
[85] *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Leipzig 1905.
[86] Francis Viète, *In Artem Analyticem Isagoge*, Tvronis [Tours], Anno 1591.
[87] Bartel Leendert van der Waerden, *Moderne Algebra*, Julius Springer Verlag, Berlin 1930.
[88] —, *A History of Algebra from al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer 1985.
[89] Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 3 Bde, Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1895–96.
[90] —, *Podręcznik algebry wyższej*, Części I–III, Biblioteka Matematyczno-Fizyczna pod red. A. Czajewicza i S. Dicksteina, Warszawa 1925.
[91] J. H. M. Wedderburn, *On the direct product in the theory of finite groups*, Annals of Math. 10 (1909).
[92] André Weil, *Mathematical teaching in universities*, American Mathematical Monthly 61 (1954), 34–36.
[93] M. J. Weiss, *Algebra for the undergraduate*, American Mathematical Monthly 46 (1939), 635–642.
[94] Alfred North Whitehead, *A Treatise on Universal Algebra*, vol. I, Cambridge: at the University Press. 1898.
[95] Witold Więsław, *Topological Fields*, Uniwersytet Wrocławski 1982.
[96] —, *Topological Fields*, Marcel Dekker, New York 1988.
[97] —, *Początki algebry liniowej* (w tomie: *Matematyka XIX wieku*, Materiały z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, pod redakcją Stanisława Fudalego, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 1988), 85–100.
[98] —, *Rozwój teorii równań algebraicznych*, ibidem, 101–123.
[99] —, *Drogi i manowce początków algebry.* Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie, Numer 15 (VII 1995), 16–26.
[100] —, *O szyfrowaniu*, Wiadomości Matematyczne 31 (1995), 45–53.
[101] —, *Algebra i teoria liczb w Polsce*, (w tomie: *Historia Nauki Polskiej, Wiek XX, Nauki ścisłe*, Zeszyt pierwszy, Polska Akademia Nauk, Instytut Historii Nauki, Fundacja im. W. Świętosławskiego, Warszawa 1995), 153–164.
[102] —, *Początki teorii grup skończonych*, Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie, Numer 16 (I 1996), 19–33.
[103] —, *Kłamstwa i mity w historii algebry (i nie tylko algebry)*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka-Fizyka, z. 76, Gliwice 1996, 325–337.
[104] —, *Skąd się wzięły ciała w algebrze?*, Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie, Numer 18 (I 1997), 30–38.
[105] —, *Algebra w Polsce w latach 1851–1950* (w tomie: *Matematyka Polska w Stuleciu 1851–1950*, Materiały z IX Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Międzyzdroje 5–9 czerwca 1995, Pod redakcją Stanisława Fudalego, Szczecin 1995 [1997]), 69–81.
[106] —, *Matematyka i jej historia*, Część I: *Rozwój pojęć matematycznych*, Część II: *Wybór tekstów z historii matematyki*, Wydawnictwo NOWIK, Opole 1997 (416 stron).

[107] —, *XIV problem Hilberta* (w tomie: *Problemy Hilberta, w pięćdziesięciolecie śmierci ich twórcy*, Pod redakcją Witolda Więsława, Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa 1997), 163–173.

[108] —, *Algebra*, Wielka Encyklopedia Powszechna PWN, tom 1 (2001), 368–370.

[109] —, *Algebra liniowa*, Wielka Encyklopedia Powszechna PWN, tom 1 (2001), 371–372.

[110] —, *Algebraiczne równanie*, Wielka Encyklopedia Powszechna PWN, tom 1 (2001), 373–374.

[111] —, *Arytmetyka*, Wielka Encyklopedia Powszechna PWN, tom 2 (2001), 352–353.

[112] —, *Jednoznaczność rozkładu*, Wielka Encyklopedia Powszechna PWN, tom 12 (2002).

[113] —, *Algebra w czasach Gaussa* (w tomie pod red. Witolda Więsława: *Matematyka czasów Gaussa*, XIV Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki, Zielona Góra, 2001), 163–174.

[114] Witold W i l k o s z, *Zarys algebry w ujęciu klasycznym* (cz. I), Biblioteczka Kółka Mat.-Fiz. U.J., Kraków 1934.

[115] John Wesley Y o u n g, *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*, New York 1911.

[116] Max Z o r n, *A remark on method in transfinite algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society 41 (1935), 667–670.