ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XL (2004)

J. Zabczyk (Warszawa)

Ważniejsze wydarzenia w teorii procesów stochastycznych

Niniejszy tekst jest rozszerzeniem wykładu wygłoszonego na Zjeździe PTM w Łodzi w 2002 roku w serii *Najważniejsze wydarzenia w mojej dziedzinie*. Intencją wykładu było sformułowanie ważnych i typowych wyników teorii procesów stochastycznych w taki sposób, by matematycy pracujący w innych dziedzinach mogli je bez trudu zrozumieć. Z powodu ograniczeń czasowych prezentacja nie podaje dokładniejszych informacji o dowodach i technicznych trudnościach pojawiających się w teorii.

Wstęp. Teoria procesów stochastycznych stanowi jeden z najważniejszych działów teorii prawdopodobieństwa. Przypomnijmy, że podstawowymi obiektami teorii prawdopodobieństwa są *przestrzenie mierzalne*, *miary probabilistyczne* i *zmienne losowe*. Przestrzeń mierzalna $(\Omega, \mathcal{F})$, składa się ze zbioru Ω i σ-ciała $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω. Rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω nazywa się σ-ciałem, gdy spełnia następujące warunki:

i) jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to i $A^C \in \mathcal{F}$,
ii) jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, to $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Ważnym przykładem σ-ciał są σ-ciała *borelowskie* $\mathbb{B}(E)$, czyli najmniejsze σ-ciała podzbiorów przestrzeni metrycznej E, zawierające wszystkie jej podzbiory domknięte. Miara probabilistyczna $\mathbb{P}$ jest funkcją działającą z Ω w $[0,1]$ taką, że $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ i dla rozłącznych zbiorów $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Trójka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywa się *przestrzenią probabilistyczną*. W zastosowaniach zbiór Ω reprezentuje wszelkie możliwe wyniki (realizacje) badanego lub obserwowanego zjawiska. Zbiór $\mathcal{F}$ utożsamia się często ze stwierdzeniami, które o danym zjawisku można wypowiedzieć. Miara $\mathbb{P}$ związuje ze *zdarzeniami–stwierdzeniami* liczby, które mierzą szanse, że opisywane stwierdzeniami sytuacje będą miały miejsce. *Zmienna losowa* to dowolne *odwzorowanie mierzalne* X z jednej przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{F})$ w inną $(E, \mathcal{E})$, czyli odwzorowanie X takie, że

$$\{\omega : X(\omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{F}, \quad \text{jeżeli tylko} \quad \Gamma \in \mathcal{E}.$$

Najczęściej rozpatruje się zmienne losowe przyjmujące wartości w zbiorze E skończonym lub w przestrzeni euklidesowej $E = \mathbb{R}^d$. Ważny jest przypadek, gdy E jest przestrzenią Banacha, w szczególności przestrzenią $C[0,T]$ rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0,T]$. Całki (Lebesgue'a) ze zmiennych losowych

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

oznacza się symbolem $\mathbb{E}X$ i nazywa się *wartościami oczekiwanymi*.

Proces stochastyczny $X(t)$, $t \in [0,T]$, to rodzina zmiennych losowych określonych na ustalonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i o wartościach w ustalonej przestrzeni mierzalnej $(E, \mathcal{E})$. *Trajektorią* procesu X jest każda funkcja zmiennej t postaci $X(t,\omega)$, dla jakiegoś ω. Najczęściej rozpatruje się procesy rzeczywiste, wtedy $E = \mathbb{R}^1$, lub wektorowe, wtedy $E = \mathbb{R}^d$. Ważne klasy procesów przyjmują wartości w przestrzeniach Hilberta i Banacha.

Najważniejsze wydarzenia w teorii procesów stochastycznych rozgrywały się wokół procesu Wienera nazywanego również ruchem Browna. Drugim co do ważności jest proces Poissona. Są to reprezentanci dwóch różnych światów: procesów o ciągłych i nieciągłych trajektoriach. Pierwszy z nich pojawił się w pracy L. Bacheliera [1] z 1900 roku poświęconej analizie cen na giełdzie paryskiej. Pięć lat później posłużył on A. Einsteinowi [14] i M. Smoluchowskiemu [36] do modelowania ruchów Browna. Proces Poissona i pokrewne mu procesy pojawiły się na początku XX wieku w związku z analizą prac central telefonicznych [15] i badaniem zmienności kapitału firm ubezpieczeniowych [27]. Rok 1900 można uważać za moment powstania teorii procesów stochastycznych. Wraz z aksjomatyką teorii prawdopodobieństwa [23] w 1933, zasadniczym twierdzeniem o *istnieniu* procesu stochastycznego i abstrakcyjnej definicji *warunkowej wartości oczekiwanej*, teoria procesów stochastycznych stała się częścią matematyki. Pierwsze monografie przedmiotu to *Processus stochastiques et mouvement brownian* P. Lévy'ego [26] z 1948 i *Stochastic processes* J. L. Dooba [11] z 1953 roku.

Formowanie się matematycznych podstaw teorii prawdopodobieństwa i teorii procesów stochastycznych dokonywało się jednocześnie z budowaniem ogólnej teorii miary [40]. Pojęcie σ-ciała pojawiło się w 1898 w pracy Boréla [3], w której wprowadził on pojęcie zbiorów borelowskich. W 1902 H. Lebesgue w [25] konstruuje teorię miary i całki względem klasycznej miary na $\mathbb{R}^d$. To, że teoria Lebesgue'a może zostać przeniesiona na abstrakcyjne przestrzenie mierzalne, zauważył M. Fréchet w 1915 [17]. Zasadnicze twierdzenie C. Carathéodory'ego o rozszerzaniu miar pojawia się w jego książce [5] z 1918 roku. W 1930 roku O. Nikodym [31] podaje abstrakcyjny dowód twierdzenia nazywanego dzisiaj twierdzeniem Radona–Nikodyma o rozkładzie miar. W tym momencie budowanie abstrakcyjnej teorii całki i miary zostało zakończone. Jej systematyczny wykład został zaprezentowany, po raz pierwszy, w monografii S. Saksa [34] z 1930 roku (francuskie tłumaczenie z języka polskiego w 1933 roku). Bardziej specjalne rozdziały tej teorii, jak miary na przestrzeniach liniowych, zostały rozwinięte już w latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych.

Teoria prawdopodobieństwa i teoria procesów stochastycznych przez długi czas nie cieszyły się poważaniem matematycznego establishmentu. W swej historii matematyki z 1960 roku N. Bourbaki [4] nie zauważa ich jeszcze, chociaż obszerny rozdział poświęca całkowaniu, a rozwinięta teoria procesów istniała już od prawie trzydziestu lat. W następnym wydaniu z 1984 roku [4] znajduje się rozdział zatytułowany *Całkowanie w przestrzeniach nielokalnie zwartych*. Podkreślona w nim została ważność miary Wienera i teorii Prochorowa miar na przestrzeniach polskich (czyli metrycznych, ośrodkowych i zupełnych). Zauważa się w nim, że miary takie pojawiły się dzięki teorii procesów stochastycznych. Miary na przestrzeniach lokalnie zwartych i w szczególności na lokalnie zwartych grupach stały się ważną częścią matematyki znacznie wcześniej. N. Bourbaki pisze: „*Perhaps the reason for the late influence of these developments on measure theory must be sought in the relative isolation of Probability Theory, which remained on the margin of traditional mathematical disciplines until recent times*”.

Na zakończenie wstępu przytoczę interesującą opinię D. Mumforda, wybitnego specjalisty z geometrii algebraicznej pracującego od kilkunastu lat w zastosowaniach teorii prawdopodobieństwa. W artykule zatytułowanym *The dawning of the age of stochasticity* [30] pisze on, że: „*We argue that stochastic differential equations are more fundamental and relevant to modelling the world than deterministic equations. [...] Instead of focussing on describing the pathologies of the strange attractors to which the classical solution tends asymptotically, the center of attention is now the existence of an invariant probability measure in which almost all solutions spend their whole lives*”.

W omówieniu skoncentruję się na następujących tematach: 1) proces Wienera, 2) proces Poissona, 3) twierdzenie o istnieniu, 4) martyngały, 5) procesy Markowa, 6) równania Kołmogorowa, 7) równania stochastyczne, 8) rachunek Malliavina, 9) całka stochastyczna i matematyka finansowa, 10) procesy gaussowskie, 11) warunkowe wartości oczekiwane i momenty zatrzymania.

Autor dziękuje recenzentowi za uwagi i sugestie.

1. Proces Wienera. Przedmiotem zainteresowania L. Bacheliera były ceny akcji notowane na giełdzie paryskiej. Każdego dnia ich przebiegi są różne. Nie sposób przewidzieć, jak będą wyglądały w przyszłości. Można się jednak pokusić, by wypowiadać o nich sądy mniej lub bardziej wiarygodne.

Sądy te wygodnie jest wypowiadać w języku procesów stochastycznych. Zilustrujmy to na przykładzie. Niech $X(t)$, $t \in [0,1]$, oznacza cenę określonej akcji po czasie t od otwarcia giełdy. Ponieważ możliwe są różne przebiegi, więc powinniśmy mieć na uwadze nie jedną funkcję $X(t), t \in [0,1]$, ale całą rodzinę $X(t,\omega)$, $t \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$, potencjalnie możliwych funkcji, przy czym przedział $[0,1]$ odpowiada czasowi otwarcia giełdy, na przykład 8 godzinom. Celem matematycznego opisu byłoby przyporządkowanie stwierdzeniom A typu:

$$\begin{aligned} &A: \quad X(t_1) \in [a_1,b_1], \ldots, X(t_n) \in [a_n,b_n], \\ &\text{gdzie} \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant 1 \qquad a_i \leqslant b_i,\ i = 1,\ldots,n, \end{aligned}$$

prawdopodobieństw ich zajścia, czyli pewnych liczb z przedziału $[0,1]$, w sposób niesprzeczny i odzwierciedlający rzeczywisty stan rzeczy.

Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną i $X(t)$, $t \in [0,1]$, to rzeczywiste zmienne losowe. Wtedy zbiór

$$\{\omega : X(t_1,\omega) \in [a_1,b_1], \ldots, X(t_n,\omega) \in [a_n,b_n]\}$$

należy do $\mathcal{F}$ i dlatego liczba

$$\mathbb{P}\big(\{\omega : X(t_1,\omega) \in [a_1,b_1], \ldots, X(t_n,\omega) \in [a_n,b_n]\}\big),$$

która jest *prawdopodobieństwem zajścia* A, jest dobrze określona. Wymaganie, by rodzina $\mathcal{F}$ była σ-ciałem, odpowiada żądaniu, by operacje logiczne na *stwierdzeniach* — *zbiorach* z $\mathcal{F}$ nie wyprowadzały poza $\mathcal{F}$.

L. Bachelier wprowadził następujące postulaty, które powinien spełniać proces cen akcji:

i) ciągłość trajektorii: dla dowolnego $\omega \in \Omega$, funkcje $X(t,\omega), t \in [0,1]$ są ciągłe,

ii) niezależność przyrostów: dla dowolnych $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1$ i dowolnych $a_i \leqslant b_i$, $i = 1,\ldots,n$, $n = 1,2,\ldots$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(\{\omega : X(t_i,\omega) - X(t_{i-1},\omega) \in [a_i,b_i], \quad i = 1,2,\ldots,n\}\big) \\ &\qquad = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{\omega : X(t_i,\omega) - X(t_{i-1},\omega) \in [a_i,b_i]\}\big) \end{aligned}$$

iii) jednorodność w czasie: dla $t,h \geqslant 0$, $t+h \leqslant 1$ i $a \leqslant b$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(\{\omega : X(t+h,\omega) - X(t,\omega) \in [a,b]\}\big) \\ &\qquad = \mathbb{P}\big(\{\omega : X(h,\omega) - X(0,\omega) \in [a,b]\}\big). \end{aligned}$$

Twierdzenie (P. Lévy). *Załóżmy, że* $X(t)$, $t \in [0,1]$, *jest procesem stochastycznym spełniającym warunki* i), ii), iii). *Istnieją wtedy stałe* $\sigma \geqslant 0$ *i* $m \in \mathbb{R}$ *takie, że:*

i) albo $\sigma = 0$ *i* $\mathbb{P}(\{\omega : X(t+h,\omega) - X(t,\omega) = mh,\ t+h \leqslant 1\}) = 1$, *ii) albo* $\sigma > 0$ *i dla dowolnych* $a \in \mathbb{R}^1$, $t, h \geqslant 0$, $t + h \leqslant 1$,

$$\mathbb{P}\big(\{\omega : X(t+h,\omega) - X(t,\omega) \leqslant a\}\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h\sigma}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(x-mh)^2}{2\sigma h}} dx.$$

Proces spełniający warunki i), ii) i iii) nazywa się *procesem Wienera.* Prawdopodobieństwa zdań związanych z przebiegiem procesu Wienera są więc funkcjami parametrów m i σ i warunku początkowego $X(0,\omega)$, $\omega \in \Omega$. Od tego momentu będziemy zakładać, że $X(0,\omega) = 0$, $\omega \in \Omega$, $m = 0$ i $\sigma = 1$ i oznaczać proces Wienera przez W.

Zmienne losowe Z określone na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i o wartościach w $(E, \mathcal{E})$ przekształcają miarę $\mathbb{P}$ określoną na $(\Omega, \mathcal{F})$ na pewną miarę μ na $(E, \mathcal{E})$ w myśl wzoru

$$\mu(\Gamma) = \mathbb{P}\big(\{\omega : Z(\omega) \in \Gamma\}\big), \quad \Gamma \in \mathcal{E}.$$

Ta nowa miara nazywa się *rozkładem* zmiennej Z. Dla probabilistów naprawdę interesujące są właśnie obrazy miar, a nie wyjściowa miara $\mathbb{P}$.

Proces Wienera W można traktować jako odwzorowanie mierzalne z Ω w $C[0,1]$, zadane wzorem:

$$\omega \to W(\cdot, \omega),$$

którego wartościami są trajektorie procesu. Nietrudno wykazać, że jest ono odwzorowaniem mierzalnym. Obraz miary $\mathbb{P}$ przy tym przekształceniu, czyli rozkład procesu Wienera na przestrzeń $C[0,1]$, nazywa się *miarą Wienera.* Oznaczać ją będziemy symbolem μ_W. Wiener udowodnił następujące, zaskakujące własności miary Wienera μ_W:

- Zbiór funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0,1]$, które w jakimś punkcie mają skończoną pochodną prawostronną, ma miarę μ_W zero.
- Funkcje, które spełniają warunek Höldera z wykładnikiem $< \frac{1}{2}$, tworzą zbiór pełnej miary Wienera.
- Funkcje, które spełniają warunek Höldera z wykładnikiem $\frac{1}{2}$, tworzą zbiór miary zero.

Zauważmy, że powyższe twierdzenie nic nie mówi o istnieniu procesu Wienera. Biorąc pod uwagę niezwykłość własności miary Wienera, problem istnienia staje się bardzo istotny. W roku 1923 N. Wiener w pracy [39] udowodnił istnienie takiego procesu. Dowód oparł na opublikowanej nieco wcześniej pracy Daniella [8]. Jest on niekonstruktywny. W 1934 Wiener wraz z Paley'em podali dowód konstruktywny, który teraz naszkicujemy.

Rozpoczniemy od twierdzenia Steinhausa z 1922 [37].

Twierdzenie (H. Steinhaus). *Niech* λ *oznacza miarę Lebesgue'a na przedziale* $[0,1[$. *Dla dowolnej miary unormowanej* ν *na* $(-\infty, +\infty)$ *istnieje taki ciąg funkcji borelowskich* (f_n) *na przedziale* $[0,1[$, *że dla dowolnych*

$a_1, \ldots, a_m$, $m = 1, 2, \ldots$

$$\lambda\bigl(\{\omega : f_k(\omega) \leqslant a_k, \quad k = 1, \ldots, m\}\bigr) = \prod_{k=1}^{m} \nu\bigl(\{\omega : f_k(\omega) \leqslant a_k\}\bigr)$$

Zauważmy, że trójka $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \nu)$ jest przykładem przestrzeni probabilistycznej i że w tej przestrzeni funkcje $f_1, \ldots$ są, z definicji, niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie ν każda.

Na przykład niech, dla ustalonej liczby naturalnej m, ν będzie miarą taką, że $\nu\{k\} = \frac{1}{m}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Dla dowolnej liczby $\omega \in [0,1[$ niech $f_n(\omega)$ oznacza n-ty współczynnik rozwinięcia ω względem potęg m^{-1}:

$$\omega = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(\omega)}{m^n}.$$

Wtedy ciąg (f_n) ma wymagane własności.

Niech teraz ciąg (f_n) odpowiada mierze ν:

$$\nu(\Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx, \qquad \Gamma \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty).$$

Paley i Wiener [33] udowodnili, że wzór

$$W(t,\omega) = f_1(\omega)t + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n+1}(\omega) \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \sin n\pi t, \qquad t \in [0,1], \qquad \omega \in [0,1[,$$

definiuje proces Wienera na przedziale $[0,1[$.

Konstrukcja, w której funkcje trygonometryczne zostały zastąpione przez klasyczną bazę Schaudera w $C[0,1]$, należy do P. Lévy'ego i Z. Ciesielskiego [26] i [6].

2. Proces Poissona. Niech $X(t)$, $t \geqslant 0$, oznacza liczbę zgłoszeń, które napłynęły do centrali telefonicznej w przedziale $[0,t]$. Erlang [15] zakładał, że proces ten powinien spełniać założenia ii) i iii) z definicji procesu Wienera. Zamiast postulatu ciągłości trajektorii żądał, by trajektorie były funkcjami niemalejącymi, przyjmującymi nieujemne wartości całkowite i miały skoki równe 1. Procesy takie łatwo skonstruować. Okazuje się, że ich rozkłady są sparametryzowane parametrem $\lambda > 0$. Niech ν będzie tak zwaną miarą wykładniczą na $[0, +\infty)$:

$$\nu(dx) = \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

i niech $f_1, f_2, \ldots$ będzie ciągiem odpowiadającym mierze ν, którego istnienie zapewnia twierdzenie Steinhausa. Wtedy proces

$$X(t,\omega) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t < f_1(\omega), \\ k, & \text{gdy } f_1(\omega) + \ldots + f_k(\omega) \leqslant t < f_1(\omega) + \ldots + f_{k+1}(\omega) \end{cases}$$

jest procesem, którego istnienie postulował Erlang. Ponieważ rozkłady zmiennych $X(t)$ są poissonowskie:

$$\mathbb{P}\big(\{\omega : X(t,\omega) = k\}\big) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

proces X nazywa się procesem *Poissona*.

3. Twierdzenie o istnieniu. Jeżeli X jest procesem stochastycznym na $[0,T]$ o wartościach w E, to dla dowolnego rosnącego ciągu liczb $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T$ dobrze zdefiniowany jest obraz miary $\mathbb{P}$ przez odwzorowanie:

$$\omega \to (X(t_1,\omega), \ldots, X(t_n,\omega)) \in E^n.$$

Obrazy te $\mu_{(t_1,\ldots,t_n)}$, które nazywa się *rozkładami skończenie wymiarowymi* procesu X, spełniają oczywisty *warunek zgodności*:

$$\mu_{(t_1,\ldots,t_n,t_{n+1})}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, E) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n), \quad \Gamma_i \in \mathcal{E}, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}.$$

Następujące twierdzenie pochodzi z pracy Kołmogorowa [23]:

Twierdzenie (A. Kołmogorow). *Jeżeli E jest przestrzenią polską i rodzina rozkładów $\Sigma = \{\mu_{(t_1,\ldots,t_n)} : 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T,\ n = 1, 2, \ldots\}$ jest zgodna, to istnieje proces stochastyczny X, którego rozkłady skończenie wymiarowe są identyczne z rodziną Σ.*

Twierdzenie to nie daje żadnej informacji o trajektoriach procesu. Ten niedostatek kompensuje następne twierdzenie Kołmogorowa [35] z 1937 roku:

Twierdzenie (A. Kołmogorow). *Jeżeli E jest przestrzenią polską z metryką ρ oraz istnieją stałe $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $c > 0$ takie, że*

$$\mathbb{E}\big(\rho(X(t), X(s))\big)^{\alpha} \leqslant c|t-s|^{1+\varepsilon}, \quad t, s \in [0,T],$$

to istnieje proces X' o ciągłych trajektoriach i o rozkładach skończenie wymiarowych identycznych z rozkładami skończenie wymiarowymi procesu X.

Z tych dwu twierdzeń wynika już łatwo istnienie procesu Wienera.

4. Martyngały. Martyngały wraz z procesami Markowa stanowią najważniejszą klasę procesów stochastycznych. Precyzyjna definicja martyngału pojawiła się w pracy [38] J. Ville w 1939, jednakże najważniejsze twierdzenia teorii martyngałów są dziełem J. L. Dooba [11]. Martyngały stanowią ważny pomost pomiędzy teorią prawdopodobieństwa a klasyczną analizą.

Niech $\mathbb{T}$ będzie podzbiorem przedziału $[0,+\infty)$, a $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \in \mathbb{T}$ rosnącą rodziną σ-ciał: $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ dla $t \leqslant s$, $t, s \in \mathbb{T}$. Mówimy, że proces X jest *adaptowany*, gdy dla dowolnego $t \in \mathbb{T}$ zmienna $X(t)$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna. Niech $X(t)$, $t \in \mathbb{T}$, będzie procesem adaptowanym o wartościach rzeczywistych takim, że $\int_\Omega |X(t,\omega)|\mathbb{P}(d\omega) < +\infty$, $t \in \mathbb{T}$. Proces $X(t)$, $t \in \mathbb{T}$, nazywa się *martyngałem* (odpowiednio *nadmartyngałem, podmartyngałem*), gdy dla dowolnych $s, t \in \mathbb{T}$, $s \leqslant t$ i dowolnych $A \in \mathcal{F}_s$:

$$\int_A X(s,\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A X(t,\omega)\mathbb{P}(d\omega), \tag{1}$$

(odpowiednio $\geqslant$, $\leqslant$).

Niech u będzie funkcją rzeczywistą, a $W(t)$, $t \in [0,+\infty) = \mathbb{T}$, rzeczywistym procesem Wienera. Niech $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$, będzie najmniejszym σ-ciałem, względem którego zmienne $W(s)$, $s \leqslant t$, są mierzalne. Proces

$$X(t) = u\big(W(t)\big), \quad t \geqslant 0,$$

jest martyngałem, odpowiednio nadmartyngałem i podmartyngałem, wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja u jest liniowa, odpowiednio wklęsła i wypukła.

Przytoczymy dwa podstawowe twierdzenia Dooba [12]. Pierwsze to tak zwane twierdzenie o zbieżności.

Twierdzenie (J. L. Doob). *Jeżeli $X(t)$, $t \in [0,+\infty)$, jest prawostronnie ciągłym nadmartyngałem takim, że*

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}|X(t)| < +\infty,$$

to istnieje skończona granica

$$\lim_{t\to+\infty} X_t = X_\infty, \quad \mathbb{E}|X_\infty| < +\infty.$$

Na przykład funkcja $u(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}$, $x \neq 0$, $u(0) = +\infty$ jest nadharmoniczna w $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, i przez proste uogólnienie wcześniejszej uwagi o funkcjach wklęsłych, proces $X(t) = u(a + W(t))$, $t \geqslant 0$, dla dowolnego $a \neq 0$, jest nadmartyngałem. Warunki twierdzenia są spełnione i dlatego istnieje granica

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{|a + W(t)|^{d-2}} = X_\infty.$$

Nietrudno zauważyć, że $X_\infty = 0$ z prawdopodobieństwem 1. Otrzymujemy więc następujący rezultat. W przestrzeniach euklidesowych o wymiarze $\geqslant 3$, trajektorie procesu Wienera uciekają do nieskończoności. W wymiarach $d = 1$ i $d = 2$ nie ma dodatnich funkcji nadharmonicznych różnych od stałej. Stąd można wywnioskować, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera na prostej i na płaszczyźnie tworzą zbiór gęsty.

Drugie twierdzenie dotyczy tak zwanych *maksymalnych nierówności Dooba*.

Twierdzenie (J. L. Doob). *Jeżeli proces $X(t)$, $t \in [0,T]$, jest prawostronnie ciągłym martyngałem, to dla dowolnego $p > 1$*

$$\Big(\mathbb{E}\big(\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|^p\big)\Big)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \big(\mathbb{E}\,|X(t)|^p\big)^{1/p}.$$

Z twierdzenia tego wynika łatwo następująca klasyczna *nierówność Hardy'ego*. Dla dowolnej funkcji $f \in L^1[0,1]$, i $p > 1$,

$$\left(\int_0^1 \left|\frac{1}{1-t}\int_t^1 f(u)du\right|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^1 |f(u)|^p du\right)^{1/p}.$$

Wystarczy przyjąć $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbb{P} = \lambda$ — miara Lebesgue'a, $\mathcal{F}_t = \sigma([0,\omega]; \omega \leqslant t)$, $t \in [0,1]$,

$$X(t,\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \omega \leqslant t \\ \frac{1}{1-t}\int_t^1 f(u)du, & t < \omega \leqslant 1 \end{cases}$$

Proces X jest martyngałem i nierówność Hardy'ego jest prostym wnioskiem z nierówności Dooba.

5. Procesy Markowa. Procesy Markowa są naturalnym uogólnieniem układów dynamicznych w czasie ciągłym. Dla uproszczenia przyjmijmy, że przestrzenią fazową $(E, \mathcal{E})$ jest $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. *Potokiem* na E nazywamy rodzinę odwzorowań $F(t) : E \to E$ taką, że

$$F(t)\big(F(s)(x)\big) = F(t+s)(x), \quad t, s \geqslant 0, \quad x \in E.$$

Trajektorią potoku o stanie początkowym x nazywamy funkcję $F(t)(x)$, $t \geqslant 0$.

Potokiem stochastycznym lub, inaczej, *funkcją przejścia* nazywa się taką rodzinę P^t, $t \geqslant 0$, odwzorowań $P^t : E \to \mathcal{P}(E)$, $t \geqslant 0$, gdzie $\mathcal{P}(E)$ oznacza zbiór unormowanych, nieujemnych miar na $(E, \mathcal{E})$, że spełnione jest następujące równanie Chapmana-Kołmogorowa:

$$P^{t+s}(x, \Gamma) = \int_E P^t(x, dy) P^s(y, \Gamma), \quad t, s \geqslant 0, \quad \Gamma \in \mathcal{E}.$$

Liczbę $P^t(x, \Gamma)$ należy interpretować jako prawdopodobieństwo tego, że układ przejdzie ze stanu x do zbioru Γ w czasie t.

Potok deterministyczny jest szczególnym przypadkiem potoku stochastycznego. Wystarczy przyjąć:

$$P^t(x, \cdot) = \delta_{(F(t)(x))}(\cdot), \quad t \geqslant 0, \quad x \in E.$$

Wraz z potokiem (P^t) definiuje się indukcyjnie prawdopodobieństwa przejścia w chwilach $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ przez zbiory $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ wzorem

$$P^{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n) = \int_{\Gamma_1} P^{t_1}(x, dx_1) P^{t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_1}(x_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n).$$

Odpowiednikiem trajektorii potoku deterministycznego jest proces Markowa. Jest to taka rodzina zmiennych losowych $X(t)$, $t \geqslant 0$, zadanych na pewnej przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, że

i) $X(0, \omega) = x, \ \ \omega \in \Omega$

ii) $\mathbb{P}\big(\{\omega : X(t_i, \omega) \in \Gamma_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}\big) = P^{t_1, \ldots, t_n}(x, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$.

Dzięki umiejętnemu zastosowaniu teorii zbiorów analitycznych i pojemności Choqueta stało się możliwe sformułowanie giętkiej definicji własności Markowa. Ukoronowaniem rozwoju teorii ogólnych procesów Markowa są monografie Dynkina [13] z 1959 oraz Blumenthala i Getoora [2] z 1968 roku.

Teoria procesów Markowa jest ściśle powiązana z teorią potencjału. Przedmiotem badań teorii potencjału są klasyczne funkcje harmoniczne i nadharmoniczne, w tym potencjały miar oraz różne aspekty zagadnienia Dirichleta. W chwili obecnej istnieje rozwinięta teoria potencjału dla różnych uogólnień klasycznego operatora Laplace'a Δ.

Potencjałem V nazywa się liniowe odwzorowanie z przestrzeni $C_K(E)$ funkcji ciągłych o nośnikach zwartych w przestrzeń $C(E)$ funkcji ciągłych, które funkcjom nieujemnym przyporządkowuje funkcje nieujemne. Mówimy, że potencjał V spełnia *zasadę maksimum*, gdy z tego, że funkcja $g = V\varphi$ osiąga maksimum w jakimś punkcie x, wynika, że $\varphi(x) \geqslant 0$. Przykładem potencjału V jest potencjał newtonowski w wymiarze $d \geqslant 3$:

$$V\varphi(x) = C_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^{d-2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Ogólniej, jeżeli (P^t) jest stochastycznym potokiem, to, przy spełnieniu naturalnych założeń, wzór

$$V\varphi(x) = \int_0^{+\infty} P^t(x, dy)\varphi(y), \quad x \in E \tag{3}$$

definiuje potencjał spełniający zasadę maksimum. Gdy (P^t) odpowiada procesowi Wienera, otrzymujemy potencjał newtonowski. Okazuje się, że zachodzi i twierdzenie odwrotne należące do Hunta [19].

Twierdzenie (G. A. Hunt). *Dla każdego potencjału V spełniającego zasadę maksimum na przestrzeni lokalnie zwartej E istnieje funkcja przejścia (P^t) taka, że potencjał dany jest wzorem* (3).

Dzięki probabilistycznej teorii potencjału różne klasyczne wyniki dotyczące funkcji harmonicznych i ich granicznego zachowania uzyskały głębsze wyjaśnienie.

6. Równania Kołmogorowa. W pracy [24] z 1931 roku Kołmogorow udowodnił, że jeżeli prawdopodobieństwa przejścia $P^t(x, \cdot)$ mają dostatecznie regularne gęstości $p_t(x,y)$, $y \in \mathbb{R}^d$:

$$P^t(x,\Gamma) = \int_\Gamma p_t(x,y)dy, \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad t \geqslant 0, \quad x,y \in \mathbb{R}^d,$$

to są one identyczne z rozwiązaniami podstawowymi pewnego równania dyfuzyjnego,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} Q(x)u_{xx}(t,x) + \langle F(x), u_x(t,x)\rangle, \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{4}$$

z warunkiem początkowym $u(0,x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Równanie (4), w tym kontekście, nazywa się *równaniem Kołmogorowa.* W równaniu (4), $Q(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, jest dodatnio określoną macierzą wymiaru $d \times d$, F pewnym odwzorowaniem z $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, a rozwiązanie u dane jest równością

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x,y)\varphi(y)dy, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Jeszcze w latach trzydziestych uświadamiano sobie, że również bardziej ogólne równania są związane z procesami Markowa. Jak pokazał P. Courrege [7] w 1965, są one postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr} Q(x)u_{xx}(t,x) + \langle F(x), y_x(t,x)\rangle \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(u(t,x+y) - u(t,x) - \frac{\langle y, u_x(t,x)\rangle}{1+|y|^2} \right) \nu(x,dy), \\ u(0,x) &= \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t>0, \end{aligned}$$

gdzie $\nu(x,\cdot)$, $x \in \mathbb{R}^d$, jest rodziną miar nieujemnych na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ takich, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|y|^2 \wedge 1)\nu(x,dy) < +\infty.$$

Można więc powiedzieć, że procesy Markowa są opisywane przez trójkę charakterystyk, $(Q(x), F(x), \nu(x,\cdot), x \in \mathbb{R}^d)$.

7. Równania stochastyczne. Problem konstrukcji procesu Markowa z zadanymi charakterystykami postawił K. Ito na początku lat czterdziestych. Rozwiązał je, przy pewnych dodatkowych założeniach, wprowadzając tak zwane równania stochastyczne, których rozwinięta teoria pojawiła się w 1951 roku w jego pracy [20]. Podamy konstrukcję Ito w przypadku, gdy $\nu(x,\cdot) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Poniższe twierdzenie jest bardzo szczególnym przypadkiem teorii Ito.

Twierdzenie. *Załóżmy, że* $Q(x) = \bar{Q} > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, F *jest odwzorowaniem lipschitzowskim,* $\nu(x,\cdot) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, *i że* $W(t)$, $t \geqslant 0$ *jest d-wymiarowym procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dla dowolnego x, $\omega \in \Omega$, *równanie*

$$X(t,\omega) = x + \int_0^t F(X(s,\omega))ds + \bar{Q}^{1/2} W(t,\omega), \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest procesem Markowa startującym z punktu x *o charakterystykach* $(\bar{Q}, F(x), 0,\ x \in \mathbb{R}^d)$.

Równanie (5) zapisuje się symbolicznie:

$$\begin{aligned} dX &= F(X)\,dt + \bar{Q}^{1/2}\,dW,\\ X(0) &= x. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że nadal $\nu(x,\cdot) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, ale odrzućmy założenie, że funkcja $Q(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, jest stała. Okazuje się, że proces Markowa z charakterystykami $(Q(x), F(x), 0; x \in \mathbb{R}^d)$ można skonstruować jako rozwiązanie równania

$$X(t,x) = x + \int_0^t F(X(s,\omega))ds + \int_0^t Q^{1/2}(X(s,\omega))dW(s,\omega),$$

które można otrzymać metodą kolejnych przybliżeń. Specjalnej uwagi wymaga występująca po prawej stronie całka względem procesu Wienera W. Ponieważ trajektorie procesu W nie mają ograniczonej wariacji i trajektorie rozwiązania X są zaledwie hölderowskie z wykładnikiem $< \frac{1}{2}$, to całki tej nie możemy zdefiniować jako klasycznej całki Stieltjesa. Tym niemniej, z prawdopodobieństwem 1 istnieją granice

$$\lim_n \sum_{t_i^n \leqslant t} Q^{1/2}(X(t_i^n,\omega))\big(W(t_{i+1}^n,\omega) - W(t_i^n,\omega)\big)$$

dla dostatecznie szybko zagęszczającego się ciągu podziałów (t_i^n). Fakt ten stanowi klucz do ogólnej teorii całki Ito.

Na ogół jednak miary $\nu(x,\cdot)$ są różne od zera. Nazywa się je *miarami skoków procesu*. Na przykład, gdy miary te są takie same dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$: $\nu(x,\cdot) = \bar{\nu}(\cdot)$, to $\bar{\nu}(\Gamma)$ jest średnią liczbą skoków ze zbioru Γ, które proces wykonuje w przedziale jednostkowym. W ogólnym przypadku punktem wyjścia konstrukcji jest nie tylko proces Wienera, ale pewna rodzina kanonicznych procesów Poissona, które wchodzą do definicji całki stochastycznej występującej w równaniu na poszukiwany proces X. Ta ogólna konstrukcja została zaproponowana przez Ito, w tej samej pracy z 1951 roku.

8. Rachunek Malliavina. Możliwość konstruowania, w sposób czysto probabilistyczny, rozwiązań równań typu Kołmogorowa, pozwala żywić nadzieję, że metodami probabilistycznymi można dowodzić pewnych faktów o równaniach parabolicznych. Najgłośniejszy przypadek tego typu związany jest z nazwiskiem Malliavina i z jego dowodem twierdzenia Hörmandera o równaniach hipoeliptycznych. Punktem wyjścia pracy Malliavina [28] jest lemat.

Lemat. *Niech μ będzie miarą na $\mathbb{R}^d$. Załóżmy, że istnieje taka stała $c > 0$, że dla dowolnej funkcji φ ograniczonej wraz ze wszystkimi pochodnymi mamy*

$$(\delta) \qquad \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\mu(dx) \right| \leqslant c \sup_x |\varphi(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^d, \ i = 1, \dots, d.$$

Wtedy miara μ ma gęstość względem miary Lebesgue'a.

Żądając zachodzenia podobnych nierówności dla wyższych pochodnych uzyskuje się istnienie gęstości różniczkowalnych do odpowiedniego rzędu. Malliavin odkrył, że zmienne losowe, będące rozwiązaniami równań stochastycznych, można w odpowiednim sensie (*sensie Malliavina*) różniczkować i że przy pomocy tych pochodnych można formułować warunki na istnienie gęstości. Ograniczymy się do podania typowego wyniku. Dla uproszczenia przyjmijmy, że $d = 1$. Niech $\Omega = C[0, T; \mathbb{R}^1]$ i niech $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, będzie zmienną losową o wartościach rzeczywistych. Niech R będzie liniowym operatorem z $L^2 = L^2[0, T; \mathbb{R}^1]$ w H. Jeżeli dla pewnego $\omega \in \Omega$ istnieje funkcja $Y(\omega, \cdot) \in L^2$ taka, że dla dowolnego $h \in L^2$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \big(X(\omega + \varepsilon Rh) - X(\omega) \big) = \langle Y(\omega, \cdot), h \rangle_{L^2},$$

to funkcję $Y(\omega)$ nazywa się R-pochodną. Jeżeli $Rh = \int_0^t h(s)ds$, $t \in [0, T]$, $h \in L^2$, to R-pochodna jest tak zwaną pochodną Malliavina. Oznaczać będziemy ją przez $D_M X(\omega)$ (dokładniej, operator D_M jest domknięciem zdefiniowanego wyżej operatora). Zauważmy, że $D_M X$ jest procesem stochastycznym. *Rachunek Malliavina* podaje sposoby obliczania pochodnej Malliavina i własności tych pochodnych dla różnego rodzaju zmiennych, w szczególności dla rozwiązań równań stochastycznych. Załóżmy, że $X = (X_1, \dots, X_m)$ jest d-wymiarową zmienną losową określoną na $\Omega = C[0, T; \mathbb{R}^d]$. Macierz Malliavina γ_Γ dana jest wzorem

$$\gamma_X = (\langle D_M X_i, D_M X_j \rangle_{L^2}).$$

Jeden z głównych wyników teorii mówi, że przy bardzo słabych ograniczeniach na wektor X, odwracalność macierzy γ_Γ gwarantuje istnienie gęstości rozkładu zmiennej X. Jeżeli dodatkowo

$$(\det \gamma_X)^{-1} \in \bigcap_{p>1} L^p(\Omega),$$

to wtedy rozkład X ma gęstość klasy C^∞, [28] i [32].

Rozpatrzmy w szczególności równanie stochastyczne

$$(6) \qquad dX(t) = F(X(t))dt + G(X(t))dW(t), \quad X(0) = x \in \mathbb{R}^n,$$

z d-wymiarowym procesem Wienera. Niech $Q(x) = G(x)G^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Macierz dyfuzji $Q(x)$ jest zawsze nieujemnie określona i gdy $d < n$, to jest macierzą osobliwą. Równanie Kołmogorowa odpowiadające (6) ma postać (4). Niech $G^1(x), \dots, G^d(x)$ będą kolumnami macierzy $G(x)$ i $G^0(x) = F(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} G_x^j(x) \circ G^j(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Tutaj $G_x^j(x) \circ G^j(x)$ oznacza pochodną odwzorowania $G^j(x)$ w punkcie x i w kierunku $G^j(x)$. Przypomnijmy, że jeżeli A i B są różniczkowalnymi odwzorowaniami $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$, to ich nawias Liego $[A, B]$ jest odwzorowaniem $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$ danym wzorem:

$$[A, B](x) = A_x(x) \circ B(x) - B_x(x) \circ A(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mówimy, że pola $G^0, \dots, G^d$ spełniają warunek Hörmandera, gdy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ wektory

$$\begin{aligned} &G^1(x), \dots, G^d(x), [G^i, G^j](x), \quad 0 \leqslant i, j \leqslant d, \\ &[G^i, [G^j, G^k]](x), \quad 0 \leqslant i, j, k \leqslant d, \dots \end{aligned}$$

rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

Jedna z wersji twierdzenia Hörmandera, udowodniona przez Malliavina, mówi

TWIERDZENIE. *Jeżeli współczynniki równania* (6) *są klasy C^∞ i spełniają warunek Hörmandera, to równanie Kołmogorowa* (4) *ma rozwiązanie podstawowe klasy C^∞.*

9. Całka stochastyczna i matematyka finansowa. W połowie lat siedemdziesiątych zakończona została budowa teorii *całki stochastycznej*

$$\int_0^t \Phi(s)\,dX(s), \tag{7}$$

dla możliwie najszerszej klasy procesów X i Φ. Była ona, w dużej mierze, dziełem matematyków francuskich zgrupowanych wokół P. A. Meyera [29].

Wygodnym okazało się systematyczne traktowanie procesu stochastycznego jako odwzorowania z produktu $[0, T] \times \Omega$, w zbiór liczb rzeczywistych, lub, ogólniej, w przestrzeń mierzalną oraz dodanie do $\mathcal{F}$ rosnącej rodziny σ-ciał: $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ dla $t \leqslant s$ zawartych w $\mathcal{F}$. Wprowadzone zostały dwie ważne klasy procesów stochastycznych: semimartyngały i procesy prognozowalne. *Semimartyngały* to sumy martyngałów i procesów o trajektoriach ze skończoną wariacją. Najmniejsze σ-ciało podzbiorów $[0, T] \times \Omega$, względem którego mierzalne są wszystkie rzeczywiste procesy adaptowalne i ciągłe, nazywa się σ-ciałem *prognozowalnym*. Przypomnijmy, że proces X jest *adaptowany*, gdy dla dowolnego $t \geq 0$ zmienna $X(t)$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna. *Procesy prognozowalne* to takie, które są mierzalne względem σ-ciała prognozowalnego. Załóżmy, że adaptowany process $\Phi(t)$, $t \geqslant 0$, jest przedziałami stały:

$$\Phi(s) = \Phi(t_i), \quad s \in]t_i, t_{i+1}], \quad t_i \uparrow +\infty.$$

Naturalnie jest wtedy zdefiniować całkę stochastyczną, dla $t \in]t_k, t_{k+1}]$, wzorem:

$$\int_0^t \Phi(s) dX(s) = \sum_{i \leqslant k-1} \Phi(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) + \Phi(t_k)(X(t) - X(t_k)).$$

K. Bichteler i C. Dellacherie [9] udowodnili, że operator całkowania, traktowany jako biliniowa operacja, daje się rozszerzyć na produkt przestrzeni procesów prognozowalnych Φ i przestrzeni semimartyngałów X, i że uzyskane rozszerzenie jest w pewnym sensie maksymalne.

W połowie lat siedemdziesiątych zaczęły się również pojawiać prace świadczące o tym, że wyrafinowana teoria całkowania stochastycznego może stać się podstawowym narzędziem matematyki finansowej. Pogląd ten w dojrzały sposób zaprezentowała praca [18]. Koronnym osiągnięciem tej teorii jest tak zwane *zasadnicze twierdzenie o wycenie akcji* autorstwa Delbaena i Schachermayera [10].

Niech $X(t) = (X^1(t), \ldots, X^d(t))$, $t \in [0, T]$ będzie procesem cen akcji, określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, na której zadana jest rosnąca rodzina σ-ciał $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Dla każdego $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t$ jest rodziną tych zdarzeń, które mogą zajść do chwili t. Zakłada się, że proces X jest adaptowalny. Agent giełdowy z kapitałem wyjściowym $x \geqslant 0$ może w chwili początkowej $t = 0$ część swego kapitału umieścić w banku, a za resztę kupić różnego rodzaju akcje. Niech $\Phi^0(0), \Phi^1(0), \ldots, \Phi^d(0)$ oznacza odpowiednio wielkość kapitału umieszczonego w banku i ilość zakupionych akcji odpowiednio rodzaju $1, \ldots, d$. Zauważmy, że

$$\Phi^0(0) + \Phi^1(0)X^1(0) + \ldots + \Phi^d(0)X^d(0) = x.$$

Załóżmy, że bank przyjmuje wkłady na procent zerowy i że w każdym momencie agent może spieniężać posiadane akcje i kupować za nie inne i pożyczać z konta bankowego na finansowanie transakcji. Niech $\Phi^1(t), \ldots, \Phi^d(t)$ oznacza liczbę akcji, które ma on w chwili t. Załóżmy, że strategia inwestowania $\Phi(t)$, $t \geqslant 0$, jest przedziałami stała:

$$\Phi(s) = \Phi(t_i), \quad s \in]t_i, t_{i+1}], \quad t_i \uparrow +\infty,$$

czyli że w momentach t_i dokonuje się zmiany portfela akcji na portfel

$$\big(\Phi^1(t_i), \ldots, \Phi^d(t_i)\big),$$

który będzie niezmienny na $]t_i, t_{i+1}]$. Przyrost kapitału na przedziale $[0, t]$, spowodowany ruchem cen i sposobem inwestowania, równa się, gdy $t \in]t_k, t_{k+1}]$:

$$\sum_{i \leqslant k-1} \Phi(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) + \Phi(t_k)(X(t) - X(t_k)),$$

czyli jest identyczny z całką stochastyczną [18].

Mówimy, że rynek zdefiniowany jako piątka $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, (X(t),\ t \in [0,T]))$, *dopuszcza arbitraż*, gdy istnieje taka strategia Φ, że

$$\mathbb{P}\Big(\int\limits_0^T \Phi(s)dX(s) \geqslant 0\Big) = 1, \qquad \mathbb{P}\Big(\int\limits_0^T \Phi(s)dX(s) > 0\Big) > 0.$$

Oznacza to, że przez samo kupowanie i sprzedawanie akcji można się wzbogacić nie ponosząc przy tym ryzyka.

Zasadnicze twierdzenie o wycenie akcji mówi [10], że przy odpowiednich założeniach, rynek nie dopuszcza arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara $\tilde{\mathbb{P}}$ równoważna mierze $\mathbb{P}$ taka, że proces cen $X(t)$, $t \in [0,T]$, jest na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ martyngałem. Twierdzenie to ma wiele ważnych zastosowań.

10. Miary i procesy gaussowskie. Miary i procesy gaussowskie pojawiają się w olbrzymiej ilości zagadnień teoretycznych i praktycznych. Zgodnie z definicją miara gaussowaka na $\mathbb{R}^1$ jest albo skoncentrowana w jednym punkcie, powiedzmy $m \in \mathbb{R}^1$, albo ma gęstość $\frac{1}{\sqrt{2\pi q}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2q}}$, $x \in \mathbb{R}^1$, z pewnym $m \in \mathbb{R}^1, q > 0$. Miara probabilistyczna μ na przestrzeni Banacha E jest gaussowska, gdy dowolny ciągły funkcjonał liniowy f na E, traktowany jako zmienna losowa na przestrzeni probabilistycznej $(E, \mathcal{B}(E), \mu)$, ma rozkład gaussowski. Jeżeli miara μ na $\mathbb{R}^d$ jest gaussowska, to dla pewnego $\lambda > 0$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda |x|^2} dx < +\infty.$$

Twierdzenie, że analogiczny fakt jest prawdziwy dla dowolnych miar gaussowskich na przestrzeniach Banacha, zostało udowodnione przez X. Fernique [16]. Stanowi ono jeden z filarów teorii procesów stochastycznych.

Stochastyczny proces $X(t)$, $t \geq 0$, o wartościach rzeczywistych nazywa się gaussowski, gdy dla dowolnych $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_d$, $d = 1, 2, \ldots$, wektorowe zmienne losowe $\big(X(t_1), \ldots, X(t_d)\big)$ mają rozkłady gaussowskie. Jednym z centralnych zagadnień teorii procesów gaussowskich, postawionym jeszcze przez Kołmogorowa w 1950 r., było podanie warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie ciągłej wersji X' procesu X w terminach funkcji:

$$m(t) = \mathbb{E}X(t), \ \ q(t,s) = \mathbb{E}(X(t) - m(t))(X(s) - m(s)), \ \ t, s \geq 0.$$

Proces X' jest ciągłą wersją procesu X, gdy ma ciągłe trajektorie i

$$\mathbb{P}(X'(t) = X(t)) = 1, \ \ t \geq 0.$$

Oczywistym warunkiem koniecznym istnienia ciągłej wersji jest ciągłość funkcji m, q. Bez zmniejszenia ogólności rozważań można założyć, że funkcja m jest tożsamościowo równa zero. Warunek konieczny i dostateczny, który powinna spełniać funkcja q w przypadku, gdy proces X jest stacjonarny, czyli gdy q zależy tylko od różnicy $t - s$, został podany przez X. Fernique również w pracy [16]. Potraktujmy odcinek $[0, 1]$ jako przestrzeń metryczną z metryką ρ daną wzorem:

$$\rho(t, s) = \sqrt{\mathbb{E}(X(t) - X(s))^2}.$$

To, że ρ jest metryką, sprawdza się natychmiastowo. Dla dowolnego $r > 0$ oznaczmy przez $N(r)$ minimalną ilość ρ- kul o promieniach r pokrywających $[0, 1]$.

TWIERDZENIE. *Stacjonarny proces gaussowski ma ciągłą modyfikację wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego* $\epsilon > 0$

$$\int_0^\epsilon \sqrt{\log N(r)}dr < +\infty.$$

Wynik ten był istotnym krokiem w rozwiązaniu problemu istnienia ciągłych wersji w przypadku ogólnym.

11. Warunkowe wartości oczekiwane i momenty zatrzymania. W dowodach twierdzeń używa się często dwu pojęć teorii, o których dotychczas nie było mowy: warunkowe wartości oczekiwane i momenty zatrzymania. Swobodne operowanie nimi wymaga wprawy i intuicji probabilistycznej i dlatego nie były one używane w tym artykule. Ich definicje nie są jednak skomplikowane i zostaną teraz podane.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{G}$ pewnym σ-ciałem zawartym w $\mathcal{F}$, a X zmienną losową o wartościach rzeczywistych i skończonej wartości oczekiwanej. *Warunkową wartością oczekiwaną* zmiennej X względem σ-ciała $\mathcal{G}$ jest zmienna losowa Y, mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{G}$ taka, że dla dowolnego zdarzenia $A \in \mathcal{G}$:

$$\int_A X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega). \tag{8}$$

Zmienna losowa Y jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbiorów $\mathbb{P}$ miary zero i oznaczana symbolem $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. W szczególnym przypadku, gdy $A_1, \ldots, A_N$ jest rozbiciem przestrzeni Ω na zbiory rozłączne $\mathcal{G}$ σ-ciałem sum zbiorów A_i, to

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = \frac{\int_{A_i} X(\zeta)\mathbb{P}(d\zeta)}{\mathbb{P}(A_i)}, \ \omega \in A_i, \ \ i = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Jeżeli zmienna losowa X ma skończony drugi moment: $\mathbb{E}|X|^2 < +\infty$, to $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ jest rzutem ortogonalnym w przestrzeni Hilberta $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ funkcji mierzalnych względem $\mathcal{F}$ i całkowalnych z kwadratem, na podprzestrzeń funkcji mierzalnych względem $\mathcal{G}$.

Definicja martyngału może być teraz wyrażona krócej. Process $X(t)$, $t \in \mathbb{T}$, jest *martyngałem*, gdy dla $t \geq s$,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s). \tag{10}$$

Zmienna losowa τ o wartościach w zbiorze $[0, +\infty]$ nazywa się *momentem zatrzymania* względem σ-ciał $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $t \geq 0$,

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{11}$$

W szczególności, jeżeli X jest procesem Wienera na R^1 takim, że dla dowolnego $t \geq 0$, zmienna $X(t)$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna, to tak zwany pierwszy moment dotarcia X do zbioru domkniętego F:

$$\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X(t, \omega) \in F\}, \tag{12}$$

jest momentem zatrzymania. Przyjmujemy, że infimum zbioru pustego jest równe $+\infty$. Więcej informacji znajdzie czytelnik na przykład w [21].

Literatura

[1] L. Bachalier, *Théorie de la spéculation.* Ann. Sci École Num. Sup. 17 (1900), 21–86.
[2] R. Blumenthal and R. K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, New York, 1968.
[3] E. Borél, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Paris 1898.
[4] N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Masson Editeur, Paris 1984.
[5] C. Carathéodory, *Vorlesung über reelle Funktionen*, Leipzig–Berlin, 1918.
[6] Z. Ciesielski, *Hölder condition for realizations of Gaussian processes*, Trans. Amer. Math. Society 99 (1961), 403–413.
[7] P. Courrege, *Sur la forme integro–differentielle des operateurs de C_k^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum*, sem. Théorie du Potentiel, 1965/66, Exposé 2.
[8] P. J. Daniell, *Integrals in an infinite number of dimensions*, Ann. of Math. (2), 20 (1918), 281–288.
[9] C. Dellacherie, *Un survol de la théorie de l'integral stochastique*, Stochastic Processes and Applications 10(1980), 115–144.
[10] F. Delbaen and W. Schachermayer, *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Math. Ann. 330 (1994), 463–520.
[11] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, 1953.
[12] J. L. Doob, *The law of large numbers for continuous stochastic processes*, Duke Math. J. 6 (1940), 290–306.
[13] E. B. Dynkin, *Podstawy teorii procesów Markowa*, Państwowe Wydawnictwa Fizyko-Matematyczne, Moskwa, 1959, w języku rosyjskim.
[14] A. Einstein, *Ueber die von der molekular-kinetischen Theorie Warme gefordete Bewegung von in ruhenden Flussichkeiten suspendierten Teilchen*, Annalen der Physik 4, 17(1905), 549–560.
[15] A. K. Erlang, *The theory of probabilities and telephone conversations*, Nyt Tidsskrift für Matematik, B. vol. 20 (1909), 33.

[16] X. Fernique, *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, LNiM, 480 (1975).
[17] M. Fréchet, *Sur l'intégral d'une fonctionnelle entendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Math. France 43 (1915).
[18] J. M. Harrison and S. R. Pliska, *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Processes and Applications, 11 (1981), 215–260.
[19] G. A. Hunt, *Markoff processes and potentials*, I, II, III, Illinois J. Math., 1 (1957), 44–93, 316–369, 2 (1958), 151–213.
[20] K. Ito, *On stochastic differential equations*, Mem. Amer. Math. Soc., 4 (1951).
[21] O. Kallenberg, *Fondations of Modern Probability*, Springer, 2002.
[22] J. F. C. Kingman, *Procesy Poissona*, PWN, Warszawa, 2001.
[23] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Erg. der Math., Bd2, Berlin, Springer, 1933.
[24] A. Kolmogoroff, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Ann. 104 (1931), 415–458.
[25] H. Lebesgue, *Integral, longeur, air*, Ann. Math. (3), VII (1902), 231–359.
[26] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownian*, Gauthier–Villars, Paris, 1948.
[27] F. Lundberg, *Zur Theorie der Rückversicherung*, Verhandl. Kongr. Versicherungsmath. Wien, 1909.
[28] P. Malliavin, *Stochastic calculus of variation and hypo-elliptic operators*, Proc. Int. Symp. Stoch. Diff. Eqns, Kyoto, 1976, Kinokunigen–Wiley, 1978.
[29] P. A. Meyer, *Un cours sur les intégrales stochastiques*, LNiM 511, 1976, 245–400.
[30] D. Mumford, *The dawning of the age of stochasticity*, Mathematics, Frontiers and Perspectives, 2000.
[31] O. Nikodym, *Sur une genéralisation des intégrales de M. J. Radon*, Fund. Math. 15 (1930), 131–179.
[32] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer, 1995.
[33] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1934.
[34] S. Saks, *Zarys Teorii Całki*, Warszawa, 1930, *Théorie de l'intégral*, Warszawa-Lwów, 1933, *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwów 1937, Monografie Matematyczne No 7.
[35] E. E. Slucky, *Alcuni proposizioni sulla theoria degli funzioni aleatorie*, Giorn. Inst. Ital. Attuari, 8 (1937), 183–199.
[36] M. R. Smoluchowski, *Zarys kinetycznej teorji ruchów Browna i roztworów mętnych*, Rozprawy i Sprawozdania z Posiedzeń Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejętności, Kraków, A46 (1906), 257-282. Niemiecki przekład w Annalen der Physik 4, 21 (1906), 756–780.
[37] H. Steinhaus, *Les probabilités denombrables et leur rapport à la théorie de la mesure*, Fund. Math. 4 (1922), 286–310.
[38] J. Ville, *Etude critique de la notion de collectif*, Paris 1939.
[39] N. Wiener, *Differential spaces*, J. Math. Phys., Math. Inst. Tech. 2 (1923), 131–174.
[40] J. Zabczyk, *Początki procesów stochastycznych*, Sprawozdanie z 5 Konferencji z Historii Matematyki, Dziwnów, Maj 6–10, 1991.